# U.D. 7: Probabilidad

## Índice



## 1. Nociones básicas

Un experimento aleatorio es aquel en el que no es posible predecir los resultados al repetirse bajo las mismas condiciones.

- **Espacio muestral (E):** es el conjunto de todos los resultados posibles.
- **Suceso aleatorio:** cualquier subconjunto del espacio muestral.
- **Suceso elemental:** tiene un único resultado posible.
- **Suceso seguro:** es el que siempre ocurre.
- **Suceso imposible ($\emptyset$):** es aquel suceso que no se puede obtener.

## 2. Operaciones con sucesos

- **Unión** ($\cup$)**:** es el suceso que resulta si se obtiene el suceso A **o** el suceso B (o ambos). Es decir, es el suceso formado por todos los resultados de A y de B juntos.

- **Interseción** ($\cap$)**:** es el suceso que resulta si se obtienen el suceso A **y** B a la vez. Es decir, está formado por todos los resultados comunes a A y B.

- **Suceso contrario o complementario** ($\overline{A}$)**:** el complementario a A es que no ocurra A.

- **Leyes de Morgan:**
$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$
$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

- **Sucesos compatibles e incompatibles:** Dos sucesos son compatibles si pueden obtenerse simultáneamente; por tanto, su intersección es no vacía. En caso contrario, son incompatibles.

**Ejemplo:**

**Ejercicio 1** *En el experimento aleatorio de lanzar un lado de 8 caras, escribe los siguientes sucesos:*

*a)* *El espacio muestral.*

*b)* *A: sacar par.*

*c)* *B: sacar mayor que 5.*

*d)* *C: sacar impar.*

*e)* *El contrario de los sucesos anteriores.*

*f)* $A \cup B$, $A \cap C$.

*g)* $\overline{A \cap B}$

# 3. Probabilidad simple

Si el espacio muestral tiene todos los sucesos equiprobables, podemos definir la probabilidad usando la **regla de Laplace:**

$$P(A) = \frac{n^{o}\ resulados\ favorables\ a\ A}{n^{o}\ resultados\ posibles}$$

**Ejemplo:**

En cualquier caso podemos definir la probabilidad de manera axiomática del siguiente modo. La probabilidad es una función matemática que verifica:

- $P(A) \geq 0$ para todo suceso A
- $P(E) = 1$
- Si A y B son incompatibles ($A \cap B = \emptyset$), entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

Como consecuencias de esta definición tenemos las siguentes **propiedades:**

a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

b) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

**Ejemplo:**

**Ejercicio 2** *Dados dos sucesos A y B de un mismo espacio muestral se sabe que* $P(A) = \frac{2}{3}$, $P(B) = \frac{1}{5}$ *y* $P(A \cup B) = 5 \cdot P(A \cap B)$.

*a) Calcular la probabilidad de que se verifiquen los suceso A y B.*

*b) Calcular la probabilidad de que sólo se verifique el suceso B.*

**Ejercicio 3** *Sabemos que* $P(A) = 0,6$, $P(B) = 0,3$ *y* $P(A \cap B) = 0,2$. *Calcula:*

*a)* $P(A \cup B)$

*b)* $P(\bar{A})$

*c)* $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

# 4. Probabilidad condicionada

A veces la probabilidad de un suceso se ve afectada si se conoce con anterioridad información sobre la ocurrencia de otro suceso relacionado con él. La **probabilidad condicionada** es la probabilidad de que ocurra un evento A, <u>sabiendo</u> que también sucede otro evento B.

$$P(A|B) = \frac{resultados\ de\ B\ que\ son\ favorables\ a\ A}{resultados\ de\ B} = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Se dirá que dos sucesos son **independientes** si la obtención o no de uno de ellos no afecta a la probabilidad de que se obtenga el otro. Es decir, son independientes si: $P(A|B) = P(A)$ o $P(B|A) = P(B)$. De forma práctica, en lugar de usar la definición, diremos que A y B son independientes si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.

**Ejemplos:**

**Ejercicio 4** *Sabiendo que:* $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = 0,18$; $P(A) = 0,3$; $P(A \cap B) = 0,2$. *Calcula* $P(B)$, $P(A/B)$ *y* $P(A \cup B)$.

**Ejercicio 5** *Sabemos que Sabemos que* $P(A) = 0,75$, $P(B) = 0,125$ *y* $P(A \cap B) = 0,1$. *Calcula:*

*a)* $P(A|B)$

*b)* $P(\bar{A}|B)$

*c)* $P(A \cup B)$

**Ejercicio 6** *Dados los sucesos aleatorios A y B, se sabe que:*

$$P(B^c) = \frac{3}{4} \text{ y } P(A) = P(A|B) = \frac{1}{3}$$

*a) Razone si los sucesos A y B son independientes.*

*b) Calcule* $P(A \cup B)$

# 5. Probabilidad compuesta

Estaremos hablando de probabilidad compuesta cuando estemos observando más de un experimento aleatorio. A la hora de representas la información podemos usar:

- **Tablas de contingencia:**

| | **A** | **A$^c$** | |
|---|---|---|---|
| **B** | Casos favorables a A y B | Casos favorables a B y no A | Casos favorables a B |
| **B$^c$** | Casos favorables a A y no B | Casos favorables a no A, ni B | Casos favorables a no B |
| | Casos favorables a A | Casos favorables a no A | Total de casos |

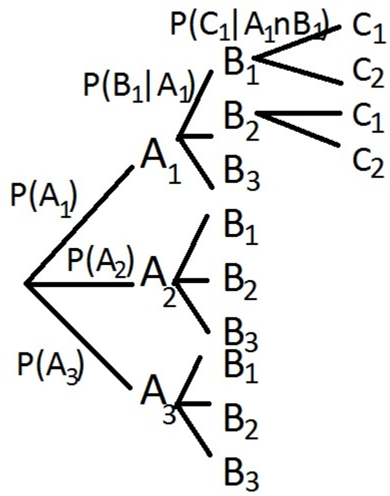
**Ejemplos:**

**Ejercicio 7** *En un centro de Bachillerato, los alumnos de 1º son el 60 % del total, y los de 2º el 40 % restante. De todos ellos, el 86 % posee móvil y el 55 % son de 1º y tienen móvil.*

*a) Calcule la probabilidad de que un alumno de 1º, elegido al azar, posea móvil.*

*b) Elegido un alumno, al azar, resulta que tiene móvil. ¿cuál es la probabilidad de que sea de 2º?*

- **Diagramas en árbol:**




Además, tenemos los siguientes resultados:

**Teorema de la probabilidad total:**

$$P(C_i) = P(A_1)\cdot P(B_1|A_1)\cdot P(C_i|A_1 \cap B1) + P(A_1)\cdot P(B_2|A_1)\cdot P(C_i|A_1 \cap B2) +$$

$$+ P(A_1)\cdot P(B_3|A_1)\cdot P(C_i|A_1 \cap B3) + P(A_2)\cdot P(B_1|A_2)\cdot P(C_i|A_2 \cap B1) + \cdots$$

**Teorema de Bayes:**

$$P(M_i|N) = \frac{P(N|M_i)\cdot P(M_i)}{P(N)}$$

donde el denomindador se puede hallar con el teorema de la probabilidad total.

**Ejemplos:**

**Ejercicio 8** *En una pequeña ciudad hay dos bibliotecas. En la primera, el 50 % de los libros son novelas mientras que en la segunda lo son el 70 %. Un lector elige al azar una biblioteca siguiendo un método que implica que la probabilidad de elegir la primera biblioteca es el triple que la de elegir la segunda. Una vez llega a la biblioteca seleccionada, elige al azar un libro, novela o no.*

*a)* *Calcular razonadamente la probabilidad de que elija una novela.*

*b)* *Sabiendo que el libro seleccionado es una novela, obtener razonadamente la probabilidad de que haya acudido a la primera biblioteca.*

**Ejercicio 9** *En una bolsa de caramelos surtidos hay 10 caramelos con sabor a naranja, 5 con sabor a limón y 3 con sabor a fresa. Todos tienen el mismo tamaño y hasta extraerlos de la bolsa no se sabe de qué sabor son. Se extraen tres caramelos al azar.*

*a)* *Calcular de forma razonada la probabilidad de extraer primero uno con sabor a naranja, luego otro con sabor a fresa y, por último, uno con sabor a limón.*

*b)* *Calcular de forma razonada la probabilidad que sean de tres sabores diferentes.*

**Ejercicio 10** *En un aparato de radio hay presintonizadas tres emisoras A, B y C que emiten durante todo el día. La emisora A siempre ofrece música, mientras que la B y la C lo hacen la mitad del tiempo de emisión. Al encender la radio se sintoniza indistintamente cualquiera de las tres emisoras.*

*a)* *Obtener de forma razonada la probabilidad de que al encender la radio escuchemos música.*

*b)* *Si al poner la radio no escuchamos música, calcular de forma razonada cuál es la probabilidad de que esté sintonizada la emisora B.*

**Explicación-resumen de todo el tema:**