U.D. 3: Funciones

Índice

1. Recordatorio de 1º de Bachillerato

1.1. Dominio

El dominio de una función es el conjunto de valores de la variable independiente para los cuales existe la función.

- **Función polinómica:** su dominio es el conjunto formado por todos los números reales.

- **Función racional:** su dominio es el conjunto de todos los números reales que no anulen al denominador.

- **Función radical:** en las funciones de la forma $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ debemos distinguir si el índice es par o impar.

  - Si el índice es par: $Dom(f) = \{x \in \mathbb{R}/g(x) \geq 0$.
  - Si el índice es impar: $Dom(f) = Dom(g)$.

- **Función exponencial:** su dominio es el conjunto de todos los números reales que no anulen al denominador.

- **Función logarítmica:** su dominio es el conjunto de todos los números reales positivos.

En resumen, una función no está definida cuando se anula su denominador, cuando el radicando de una raíz de índice par es negativo o cuando el logaritmo se aplica a algo menor o igual que 0.

También tendremos que tener en cuenta si la función está sujeta a un contexto, por ejemplo en los problemas. En este caso el contexto puede delimitar el dominio. Y cuando una función está definida a trozos ya que el dominio de definición también depende de esos trozos.

1.2. Representación de funciones

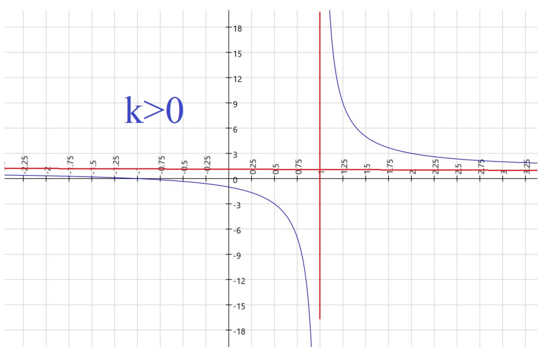
- **Funciones cuadráticas:** tienen la forma: $y = ax^2 + bx + c$. La gráfica de estas funciones son parábolas de vértice: $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ y su dominio es $\mathbb{R}$. Las formas de estas parábolas (que sus ramas estén hacia arriba o hacia abajo, que sean más o menos anchas,...) dependen, exclusivamente del valor de a:

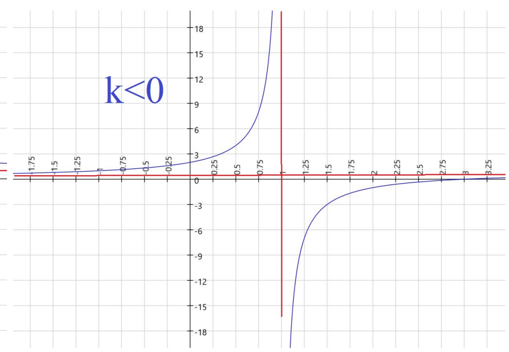
  - Si $a > 0$, las ramas van hacia arriba.

  - Si $a < 0$, las ramas van hacia abajo.

  Para representar este tipo de funciones lo primero que tendremos que hacer es hallar el vértice.

- **Funiones de proporcionalidad inversa y sus traslaciones:** son de la forma $y = \frac{k}{x-a} + b$, su representación gráfica es una hipérbola. Estas funciones tienen una asíntota vertical en $x = a$ y una asíntota horizontal en $y = b$.





Ejercicio 1 *Estudia el dominio de las siguientes funciones:*

$a)\ f(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2} \qquad b)\ f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & si \quad x \leq 6 \\ 2x & si \quad 6 < x \leq 10 \end{cases}$

$c) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & si \quad x \leq 6 \\ \frac{x}{x-1} & si \quad 6 < x \leq 10 \end{cases}$

Ejercicio 2 *En un ensayo clínico de 10 meses de duración, el porcentaje de células de un determinado tejido afectadas por un tipo de enfermedad en el paciente de estudio, viene dado por la función:*

$$P(t) = \begin{cases} 8t - t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$$

donde t es el tiempo en meses.

a) *¿Cuál es el dominio de definición de la función?*

b) *Represente gráficamente la función $P(t)$*

2. Límites

2.1. Concepto de límite

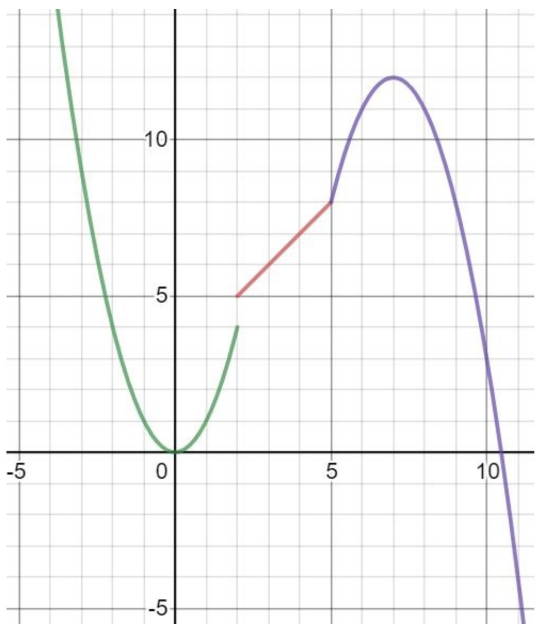
Hay una definición formal de límite pero por su dificultad prescindiremos de ella y trabajaremos de forma más intuitiva.

2.1.1. Límite en un punto. Límites laterales

- El **límite lateral** de la función f(x) en x = a **por la izquierda** es el valor al que se aproxima la función f(x) cuando la variable independiente x se aproxima al valor x = a por la izquierda; es decir, por valores menores que a. Se representa por $\lim\limits_{x \to a^-} f(x)$ y se lee "límite de f(x) cuando x tiende hacia a por la izquierda".

- El **límite lateral** de la función f(x) en x = a **por la derecha** es el valor al que se aproxima la función f(x) (la altura) cuando la variable independiente x se aproxima al valor x = a por la derecha; es decir, por valores menores que a. Se representa por $\lim\limits_{x \to a^+} f(x)$ y se lee "límite de f(x) cuando x tiende hacia a por la derecha".

- Para que exista el límite de una función en x = a, tienen que existir los límites laterales y han de ser iguales. Se expresa como $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ y se lee "límite de f(x) cuando x tiende hacia a".



$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = 5$$

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 8$$

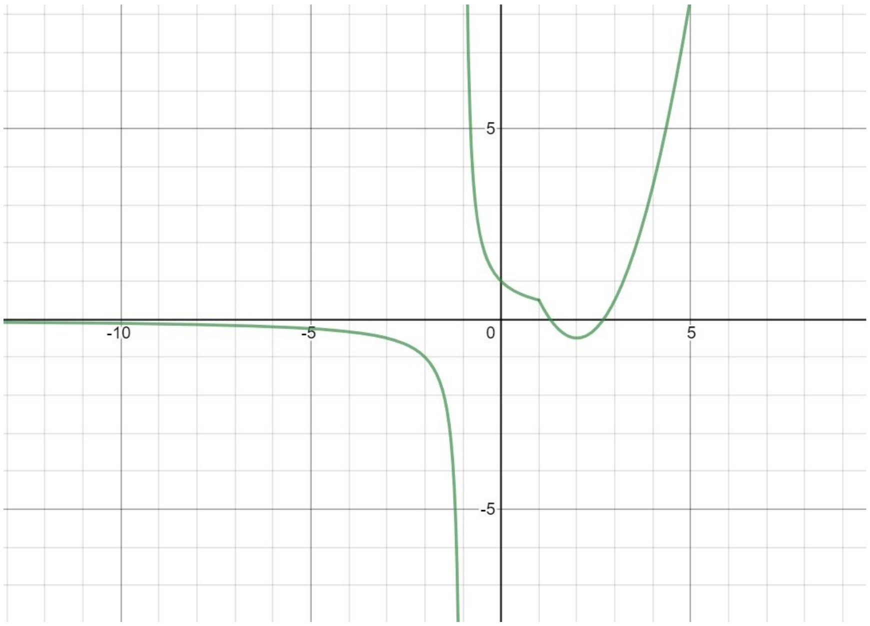
$$\lim_{x \to 5^+} f(x) = 8$$

$$\lim_{x \to 5} f(x) = 8$$

2.1.2. Límite en el infinito

El **límite cuando x tiene a más infinito** de la función f(x) es el valor al que se aproxima la función f(x) (la altura) cuando la variable independiente x se va haciendo cada vez mayor (es decir, cuando nos movemos a la derecha en el eje de abcisas). Se representa por $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ y se lee "límite de f(x) cuando x tiende a más infinito".

El **límite cuando x tiene a menos infinito** de la función f(x) es el valor al que se aproxima la función f(x) (la altura) cuando la variable independiente x se va haciendo cada vez menor (es decir, cuando nos movemos a la izquierda en el eje de abcisas). Se representa por $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ y se lee "límite de f(x) cuando x tiende a menos infinito".



Límites en un punto:

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = \nexists$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1}{2}$$

Límites en el infinito:

$$\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$$

Ejercicio 3 *A la vista de la gráfica, calcula los siguientes límites:*

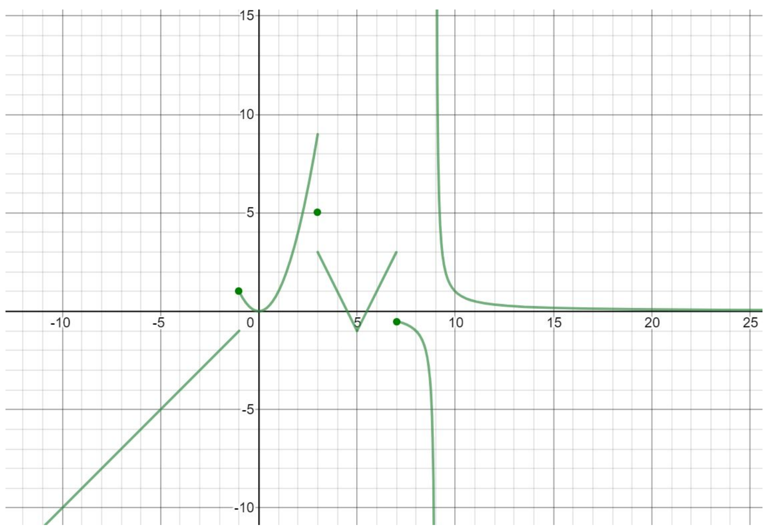
a) $\lim_{x\to -\infty} f(x)$ *b)* $\lim_{x\to +\infty} f(x)$ *c)* $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ *d)* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$

e) $\lim_{x\to 1} f(x)$ *f)* $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ *g)* $\lim_{x\to 0^+} f(x)$ *h)* $\lim_{x\to 0} f(x)$

i) $\lim_{x\to 3^-} f(x)$ *j)* $\lim_{x\to 3^+} f(x)$ *k)* $\lim_{x\to 3} f(x)$ *l)* $\lim_{x\to 5^-} f(x)$

m) $\lim_{x\to 5^+} f(x)$ *n)* $\lim_{x\to 5} f(x)$ *ñ)* $\lim_{x\to 7^-} f(x)$ *o)* $\lim_{x\to 7^+} f(x)$

p) $\lim_{x\to 7} f(x)$ *q)* $\lim_{x\to 9^-} f(x)$ *r)* $\lim_{x\to 9^+} f(x)$ *s)* $\lim_{x\to 9} f(x)$



2.2. Cálculo de límites

2.2.1. Cálculo de límite en un punto

Para hallar el límite de una función en un punto basta con sustituir en la función el valor dado para el límite.

Ejemplo:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 1}{2x + 3} = \frac{2^2 - 1}{2 \cdot 2 + 3} = \frac{3}{7}$$

2.2.1.1. Caso K/0

K/0 tiene un valor infinito, pero los signos dependerán de los signos del numerador y del denominador. Cuando al hallar un límite nos aparezca este resultado estudiaremos los **límites laterales**; el resultado de los límites laterales siempre en infinito, pero el signo dependerá de los signos obtenidos para el numerador y el denominador. Si ambos límites laterales coinciden, exite en límite; en caso contrario, no existirá el límite.

Ejemplo 1:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{x - 2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\textit{Como no coinciden } \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{x-2} = \nexists$$

Ejemplo 2:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0}$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 2^+} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \frac{4}{0^+} = +\infty$$

$$\textit{En este caso } \lim_{x \to 2} \frac{x^2}{(x-2)^2} = +\infty$$

2.2.2. Cálculo de límites en el infinito

Para hallar el límite de un polinomio en el infinito basta con observar qué ocurre con el término de mayor grado.

Ejemplos:

$$\lim_{x \to +\infty} (4x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \to +\infty} 4x^2 = 4(+\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^2 + 2x - 3) = \lim_{x \to -\infty} 4x^2 = 4(-\infty)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (4x^3 + x - 5) = \lim_{x \to -\infty} 4x^3 = 4(-\infty)^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \to \infty} \sqrt{-4x^2 + 2x - 3} = \lim_{x \to +\infty} \sqrt{-4x^2} = \sqrt{-4(+\infty)^2} = \nexists$$

2.2.2.1. Caso ∞/∞

Cuando tengamos un cociente de polinomios y calculemos el límite en el infinito, obtendremos la indeterminación ∞/∞. En este caso distinguiremos tres posibilidades:

a) **El grado del numerador es mayor que el grado del denominador:** en este caso el límite es infinito y el signo se determina respetando la regla de los signos.

b) **El grado del numerador es menor que el grado del denominador:** en este caso el límite el 0.

c) **El grado del numerador es igual que el grado del denominador:** el límite es el cociente de los coeficientes principales.

Ejercicio 4 *Calcula los siguientes límites:*

a) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x-2}{x^2+1}$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2}{x^2-4}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x}{x^2-4x+4}$ *d)* $\lim\limits_{x\to -\infty} (3x^3+2x^2-1)$

e) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt{x^2+x+3}$ *f)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{-5x-2}$ *g)* $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{3x^2-5x+1}{2x^2+5x-3}$ *h)* $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-x^2+3x}{3x^4-4x-3}$

Ejercicio 5 *Sea $f(t)$ el porcentaje de ocupación de un determinado complejo hotelero en función del tiempo t, medido en meses, transcurridos desde su inauguración:*

$$f(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2}t^2+20t & si \quad 0 \le t \le 6 \\ \frac{90t-240}{t+4} & si \quad t > 6 \end{cases}$$

¿Qué ocurriría con el porcentaje de ocupación si estuviera abierto indefinidamente?

2.2.3. Operaciones con límites e indeterminaciones

Para un mayor conocimiento sobre el álgebra de límites y las indeterminaciones, repasar los contenidos vistos en el primer curso de Bachillerato.

3. Continuidad

3.1. Definición

Una función es **continua** en un punto $x = a$, si coinciden los límites laterales de la función y el valor de la misma en ese punto. Es decir:

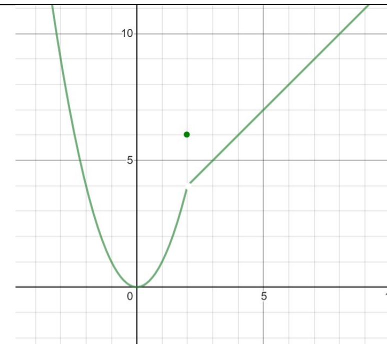
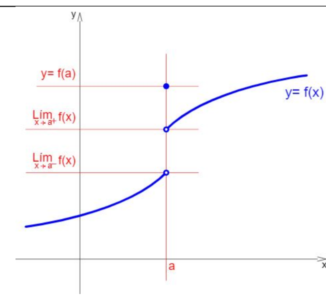
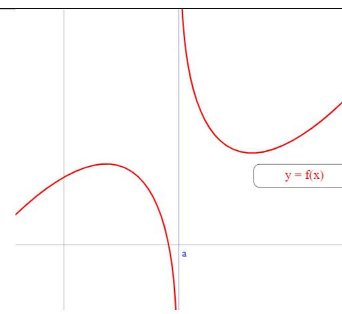
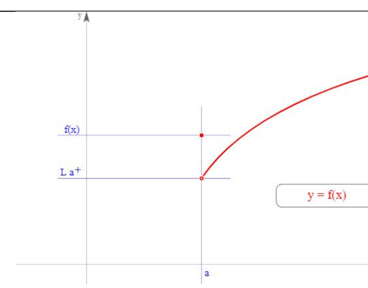
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Los puntos en los que tendremos que estudiar la continuidad son:

- Aquellos que anulen al denominador.
- Los puntos de cambio de trozo.

3.2. Tipos de discontuidad

Dependiendo que los resultados obtenidos al hallar los límites laterales podemos obtener las siguientes discontinuidades:

Tipo de disconti-nuidad	**Descripción**	**Gráfica**
Evitable	Falla f(a), es decir, $\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) \neq f(a)$	
De primera especie de salto finito	$\lim_{x \to a^-} f(x) \neq \lim_{x \to a^+} f(x)$ son distintos pero son finitos	
De primera especie de salto infinito	Existen ambos límites latera-les y alguno de los dos es infi-nito	
De segunda especie	No existe alguno de los límites laterales	

Ejercicio 6 *Estudia la continuidad de la siguiente función:*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & si \quad x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & si \quad x > 2 \end{cases}$$

Ejercicio 7 *Se estima que el beneficio de una empresa, en millones de euros, para los próximos 10 años viende dado por la función* $B(t) = \begin{cases} at - t^2 & si \quad 0 \leq t \leq 6 \\ 2t & si \quad 6 < t \leq 10 \end{cases}$, *siendo* t *el tiempo transcurrido en años. Calcule el valor del parámetro* a *para que* B *evolucione de forma continua.*

4. Asíntotas

Las asíntotas son rectas hacia las que se aproxima una rama infinita de la función, entendiendo por rama infinita cualquier tramo continuo de la función de longitud infinita.

4.1. Asíntotas horizontales

Las asíntotas horizontales y oblicuas nos indican adonde se acerca la función cuando $x \to \pm\infty$. Son dos rectas, una de ellas horizontal, por lo que tiene pendiente cero, y otra oblicua, de pendiente distinta de cero. Para estudiar las **asíntotas horizontales** calcularemos, por tanto, los siguientes límites:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x)$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)$$

Si algunos de estos límites tiene un valor numérico a, entonces la función tiene una asíntota horizontal en $y = a$.

4.2. Asíntotas verticales

Los valores candidatos a ser asíntotas verticales son aquellos que anulan al denominador. Por ello, para estudiar las asíntotas verticales hallaremos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to a} f(x) \; \textit{siendo } x = a \textit{ punto que anula al denominador.}$$

Si el límite (o algún límite lateral) es infinito, entonces la función presenta una asíntota vertical en $x = a$.

4.3. Asíntotas oblicuas

No puede haber asíntotas horizontales y oblicuas a la vez; por ello, solo se estudiarán las asíntotas oblicuas donde no haya asíntota horizontal. En este caso tendremos que hallar dos límites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = m$$

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx) = n$$

La asíntota oblicua sería $y = mx + n$. En el caso de que el primer límite diera infinito, en lugar de un número m, no habría asíntota oblicua y no tendríamos que hallar el segundo límite.

Ejercicio 8 *Sea la función*

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & si \quad x \leq 1 \\ \frac{4}{x} & si \quad x > 1 \end{cases}$$

Determine sus asíntotas.

Ejercicio 9 *La cantidad, C, que una entidad bancaria dedica a créditos depende de su liquidez, x, según la función:*

$$C(x) = \begin{cases} \frac{150+5x}{100} & si \quad 10 \leq x \leq 50 \\ \frac{200+10x}{25+3x} & si \quad x > 50 \end{cases}$$

Donde C y x están expresadas en miles de euros. Calcula la asíntota horizontal e interprétela en el contexto del problema.

Ejercicio 10 *Para la función f definida de la forma $\dfrac{ax}{x+b}$, determine, razonadamente, los valores de a y b sabiendo que tiene como asíntota vertical la recta de ecuación $x = -2$ y como asíntota horizontal la ecuación $y = 3$.*