U.D. 4: Derivadas y aplicaciones

Índice

1. Concepto de derivada

Antes de leer los apuntes de esta sección, mira el siguiente vídeo:

1.1. Tasa de variación media y tasa de variación instantánea

La **tasa de variación media** (TVM) de la función $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ es:

$$TVM\,[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La tasa de variación media mide el promedio de variación de la función en el intervalo.

La **tasa de variación instantánea** (TVI) de la función $f(x)$ en el punto $x = a$ es:

$$TVI = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

La tasa de variación instantánea se puede ver como lo que ocurre con la TVM cuando el intervalo va reduciendo su amplitud.

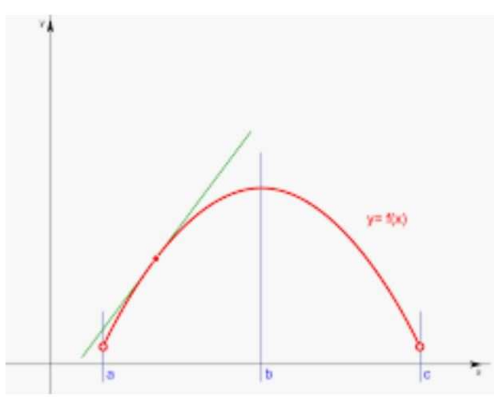
1.2. Definición de derivada de una función en un punto

La derivada de una función $f(x)$ en un punto en $x = a$ se define como la TVI en ese punto:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Interpretación geométrica de la derivada

La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente esa función en ese punto.



De donde se deduce que:

- Si $f'(a) > 0$, la función es creciente en x = a.
- Si $f'(a) < 0$, la función es decreciente en x = a.
- Si hay un máximo o mínimo relativo en x = a, entonces $f'(a) = 0$.

3. Reglas de derivación

3.1. Derivadas de funciones elementales

Función	Derivada	Ejemplo
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$	
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	
$f(x) = a^n$	$f'(x) = a^x \ln a$	
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	
$f(x) = \log_a x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x \ln a}$	
$f(x) = \operatorname{sen} x$	$f'(x) = \cos x$	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\operatorname{sen} x$	
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \dfrac{1}{cos^2 x}$	

3.2. Derivadas de las operaciones con funciones

- **Producto por un escalar:**

$$(kf)'(x) = kf'(x)$$

Ejemplo:

- **Suma y resta:**

$$(f \pm g)'(x) = f'(x) \pm g'(x)$$

Ejemplo:

- **Producto:**

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Ejemplo:

- **Cociente:**

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Ejemplos:

- **Composición (Regla de la cadena):**

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

La regla de la cadena se aplica a la composición de funciones (cuando una función está dentro de otra) y lo que viene a decir es que primero se deriva la función que lo engloba todo (la que está más hacia fuera), dejando dentro de esta derivada lo que había dentro de la función, y luego se multiplica por la deriva de la función que estaba en el interior.

Ejemplos:

Ejercicio 1 *Deriva las siguientes funciones:*

(a) $y = x^2 - 2x - 3$	**(b)** $y = -x^2 - 3x$	**(c)** $y = x^2 - 4x$
(d) $y = x^4$	**(e)** $y = x^6$	**(f)** $y = x^4 + x^2$
(g) $y = x^3$	**(h)** $y = x^5$	**(i)** $y = x^3 + x$
(j) $y = \frac{1}{x}$	**(k)** $y = \frac{-2}{x+1} - 3$	**(l)** $y = \frac{3}{x-2} + 1$
(m) $y = \sqrt{2x+3}$	**(n)** $y = \sqrt[3]{x}$	**(ñ)** $y = \sqrt[4]{3x-5}$
(o) $y = 3^x$	**(p)** $y = 2^{3x-2}$	**(q)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$
(r) $y = \log_3 x$	**(s)** $y = \log(x+1)$	**(t)** $y = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$

Ejercicio 2 *Deriva las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = \frac{x^3 - 5x + 3}{x^2 - 5x + 6}$	**(b)** $f(x) = \frac{8}{x^2 + 6x + 8}$
(c) $f(x) = \frac{x^3 + 4x^2 + 2x}{x^2 + 4}$	**(d)** $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x^2 - 1}{x^3 - 7x + 6}}$
(e) $f(x) = \sqrt[4]{5x+3}$	**(f)** $f(x) = \sqrt[6]{x^2 + x - 2}$
(g) $f(x) = \log_3(x^2 + x - 6)$	**(h)** $f(x) = \ln(-x^2 + x + 2)$
(i) $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x^2-1}}$	**(j)** $f(x) = \sqrt[8]{\frac{x^2 + 3x}{x^2 - 9}}$
(k) $f(x) = \log\left(\frac{x^2 - 1}{-x^2 + 2x - 1}\right)$	**(l)** $f(x) = \log_7\left(\frac{x^3 - 3x^2 + x - 3}{x^2 - 1}\right)$

4. Ecuación de la recta tangente

Como ya hemos dicho, la derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en dicho punto. Con lo cual, la ecuación de la recta tangente viene dada por:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplos:

Ejercicio 3 *Calcula la ecuación de la recta tangente a las funciones siguientes en los puntos que se indican:*

- *A* $f(x) = x^2 + 5x + 2$ *en* $x = -1$.
- *A* $g(x) = \frac{1}{x}$ *en* $x = 2$.
- *A* $h(x) = x^2 \cdot e^x$ *en* $x = 0$.

5. Derivabilidad

Para que una función sea derivable en un punto debe cumplirse las siguientes condiciones:

- Que f sea continua en $x = a$
- Que las derivadas laterales coincidan $f'(a^-) = f'(a^+)$

Los puntos en los que estudiaremos la derivabilidad serán los mismos que en los que estudiábamos la continuidad, es decir, los puntos de cambio de trozo y los que anulen al denominador.

Ejemplos:

Ejercicio 4 *Estudia la derivabilidad de las siguientes funciones:*

a) $f(x) = \begin{cases} 3x+3 & si \quad x < 1 \\ 4x^2 - 5 & si \quad 1 < x \leq 4 \\ 3 & si \quad x > 4 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3x-5 & si \quad x < 1 \\ 2x^2 - 4 & si \quad x \leq 1 \end{cases}$

Ejercicio 5 *Sea la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3x + 4 & si \quad x \leq 2 \\ 4 - \dfrac{a}{x} & si \quad x > 2 \end{cases}$

Halle el valor de a para que dicha función sea continua y estudie la derivabilidad de f para ese valor de a.

6. Aplicaciones de la derivada

6.1. Estudio de la monotonía (crecimiento y decrecimiento

Ya sabemos que

- Si $f'(a) > 0$, la función es creciente en x = a.
- Si $f'(a) < 0$, la función es decreciente en x = a.

Para estudiar la monotonía de una función seguiremos los siguientes pasos:

- Derivamos la función.
- Resolvemos la ecuación $f'(x) = 0$.
- Estudiamos los signos de f'.

6.2. Estudio de los extremos (máximos y mínimos)

Para estudiar los extremos basta con observar la monotonía.

Ejemplos:

Ejercicio 6 *Estudia la monotonía y los extremos de las siguientes funciones:*

(a) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$	**(b)** $f(x) = x \ln x$	**(c)** $f(x) = \frac{x}{e^x}$
(d) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$	**(e)** $f(x) = e^x(x-1)$	**(f)** $f(x) = \ln(x^2+1)$

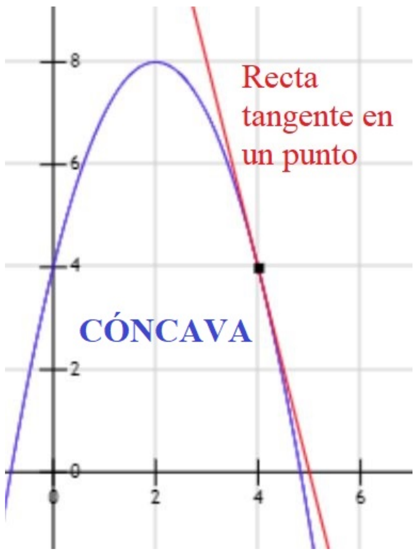
Ejercicio 7 *El beneficio, en millones de euros, de una empresa en función del tiempo t, en años, viene dado por:*

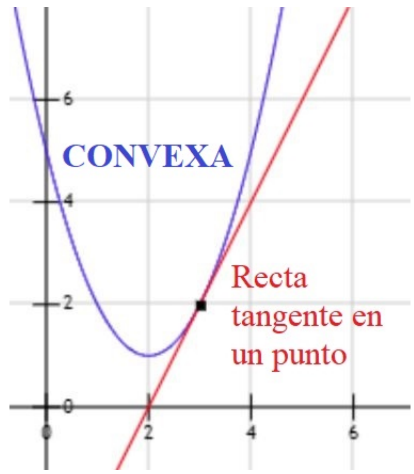
$$f(t) = -t^2 + 12t - 31, \quad 4 \leq t \leq 7.$$

¿Para qué valor de t alcanza la empresa su beneficio máximo y a cuánto asciende?. ¿Para qué valor de t alcanza su beneficio mínimo y cuál es éste?

6.3. Estudio de la curvatura

El estudio de la forma de una función y el decidir si es cóncava o convexa se llama curvatura y se hace utilizando la segunda derivada de la función.





Los puntos donde la función cambie de cóncava a convexa o viceversa, se llamarán puntos de inflexión.

Se tiene que:

- Si $f''(a) > 0$, la función es convexa en x = a.
- Si $f''(a) < 0$, la función es cóncava en x = a.

Para estudiar la curvatura de una función seguiremos los siguientes pasos:

- Hallamos la segunda derivada.
- Resolvemos la ecuación $f''(x) = 0$.
- Estudiamos los signos de f''.

Ejercicio 8 *Estudia la curvatura de las funciones de los apartados a y b del ejercicio 6.*

7. Observaciones

Recordemos que:

- Si $f'(a) > 0$, la función es creciente en el punto x = a.
- Si $f'(a) < 0$, la función es decreciente en el punto x = a.
- Si hay un máximo o mínimo relativo en x = a, entonces $f'(a) = 0$.
- La derivada de una función en un punto coincide con la pendiente de la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto, $m = f'(a)$.
- Si $f''(a) > 0$, la función es convexa en x = a.
- Si $f''(a) < 0$, la función es cóncava en x = a.
- Si hay un punto de inflexión en x=a, entonces $f''(a) = 0$.

Ejercicio 9 *Se sabe que la expresión que representa el número medio de clientes $N(t)$ que acuden un día a una cadena de almacenes, en función del número de horas t que llevan abiertos, es*

$$N(t) = at^2 + bt, \quad 0 \leq t \leq 8.$$

Sabiendo que el máximo de clientes que han acudido ese día ha sido de 160 y que se ha producido a las 4 horas de abrir, calcule a y b.

Ejercicio 10 *Sea $f(x) = ax^2 + bx - 2$, calcule los valores de a y b , sabiendo que $f(-1) = 1$ y que en el punto de abscisa $x = 0$ la recta tangente a la gráfica de f es paralela a la recta $y = 2x + 1$.*