

U.D. 5: Integrales

Índice

1. Primitiva de una función	1
2. Integral indefinida	1
2.1. Integrales inmediatas	2
3. Cálculo de integrales	2
3.1. Propiedades	2
3.2. Reglas de integración	2
4. Integral definida	3
4.1. Cálculo del área de un recinto	3

1. Primitiva de una función

$F(x)$ es una **primitiva** de $f(x)$ si $F'(x)=f(x)$. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$, entonces cualquier función de la forma $F(x)+C$ también lo es.

2. Integral indefinida

Se llama **integral indefinida** de $f(x)$ al conjunto de todas las primitivas de dicha función.

$$\int f(x)dx = F(x) + C \iff F'(x) = f(x)$$

2.1. Integrales inmediatas

$$\int dx = x + C$$

$$\int nx^{n-1}dx = x^n + C$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int a^x \ln a dx = a^x + C$$

$$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int -\operatorname{sen} x dx = \cos x + C$$

3. Cálculo de integrales

3.1. Propiedades

$$\int (f(x) \pm g(x)) dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx$$

$$\int k \cdot f(x) dx = k \int f(x) dx$$

3.2. Reglas de integración

$$\int a dx = ax + C$$

$$\int ax^n dx = \frac{ax^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{a}{x^n} dx = \int ax^{-n} dx = \frac{ax^{-n+1}}{-n+1} + C = \frac{a}{(-n+1)x^{(n-1)}} + C \quad \text{si } n \neq 1$$

$$\int \frac{a}{mx+n} dx = \frac{a \ln |mx+n|}{m} + C$$

$$\int ae^{mx+n} dx = \frac{ae^{mx+n}}{m} + C$$



Ejercicio 1 *Calcula las siguientes integrales:*

$$a) \int \left(x^5 + \frac{5x^2}{4} \right) dx \quad b) \int e^{x+1} dx \quad c) \int \left(3x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx$$

$$d) \int \frac{4}{x} dx \quad e) \int e^{-x} dx \quad f) \int \frac{1}{3x+2} dx$$

4. Integral definida

Sea f una función tal que $f(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$, se denomina **integral definida** de $f(x)$ en el intervalo $[a, b]$ y se representa por $\int_a^b f(x) dx$ al área encerrada entre la gráfica de la función, las rectas $x=a$ y $x=b$, y el eje OX. Si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$



Ejercicio 2 *Calcula las siguientes integrales definidas:*

$$a) \int_1^3 \left(x^5 + \frac{5x^2}{4} \right) dx \quad b) \int_0^2 e^{x+1} dx \quad c) \int_{-1}^1 \left(3x^3 + \frac{3}{4}x^2 \right) dx$$

4.1. Cálculo del área de un recinto

Para hallar el área de un recinto delimitado por funciones usaremos la integral definida. Para ello distinguiremos dos casos:

- **Caso 1:** Queremos hallar el área entre la función $f(x)$ y el eje OX. En este caso, los pasos a seguir son:
 - Hallar los puntos de corte de $f(x)$ con el eje OX (resolviendo $f(x) = 0$).
 - Cálculamos el área de las distintas regiones mediante una integral definida.
 - Sumamos el área de todas estas regiones.



- **Caso 2:** Queremos hallar el área entre dos funciones. En este caso, los pasos a seguir son:
 - Hallar los puntos de corte de $f(x)$ con $g(x)$ (resolviendo $f(x) = g(x)$).
 - Cálculamos el área de las distintas regiones mediante una integral definida $(\int_a^b (f(x) - g(x))dx)$.
 - Sumamos el área de todas estas regiones.



Ejercicio 3 a) *Calcula el área comprendida entre la curva: $y = 3x^2 - x + 1$, el eje X y las rectas $x = 0$ y $x = 4$.*

b) *Halla el área del recinto limitado por la función $f(x) = x^3 - 4x$ y el eje X.*

c) *Halla el área comprendida entre la curva $y = 2x^2 + 2x - 1$ y la recta $y = 4x + 3$.*