U.D. 6: Matrices y determinantes. Sistemas de ecuaciones

Índice

1. Matrices

1.1. Definiciones

Definición 1 *Una matriz A, de dimensión $m \times n$, es un objeto matemático del tipo:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- Esta matriz tiene m filas y n columnas.
- Es de dimensión $m \times n$.
- Sus elementos a_{ij} son números reales.
- El elemento a_{ij} se encuentra en fila i y columna j.
- Se suele designar $A = (a_{ij})_{m,n}$

Tipos de matrices:

- **Matriz fila**: está constituida por una sola fila.
- **Matriz columna**: está constituida por una sola columna.
- **Matriz cuadrada:** tiene el mismo número de filas que de columnas. En este caso se llama **diagonal principal** a la formada por los término de la forma a_{ii}
- **Matriz rectangular:** tiene distinto número de filas que de columnas.
- **Matriz nula:** todos sus elementos son ceros.
- **Matriz triangular superior:** matriz cuadrada cuyos elementos situados por debajo de la diagonal principal son ceros.
- **Matriz triangular inferior:** matriz cuadrada cuyos elementos situados por encima de la diagonal principal son ceros.
- **Matriz diagonal**: matriz cuadrada cuyos elementos por encima y por debajo de la diagonal principal son todos nulos.
- **Matriz identidad:** matriz diagonal en la que los elementos de la diagonal principal son todos 1.

Traspuesta de una matriz: Dada una matriz A, su **matriz traspuesta** se representa por A^t y se obtiene cambiando las filas por las columnas.

Propiedades: $(A^t)^t A$, $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

Si una matriz verifica que $A^t = A$, se dice que es una **matriz simétrica**.

Ejercicio 1

Para cada una de las matrices: $A = \begin{pmatrix} -3 & 5 & -7 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$,

$C = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & -4 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,

$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, responde a las cuestiones:

i. Escribe sus dimensiones, ¿hay alguna matriz cuadrada? ¿Y alguna matriz triangular?

ii. Identifica los términos: $a_{23} = \boxed{}$; $b_{21} = \boxed{}$; $c_{11} = \boxed{}$; $d_{12} = \boxed{}$; $e_{32} = \boxed{}$; $f_{22} = \boxed{}$; $g_{42} = \boxed{}$

iii. Escribe las matrices traspuestas de cada una de las matrices anteriores.

iv. ¿Son iguales las matrices C y D?

v. ¿Hay alguna matriz simétrica?

vi. Las matrices F y G tienen ***nombre propio***, ¿sabrías cuáles son?

1.2. Operaciones

1.2.1. Suma de matrices

Definición 2 *Sean dos matrices A y B del mismo orden* $m \times n$, $A = (a_{ij})_{m,n}$ *y* $B = (b_{ij})_{m,n}$ *. Se define la suma de A y B, denotado por* $A + B$*, como la* *matriz*

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}.$$

Es por tanto necesario que las matrices ***sean de la misma dimensión****.*

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 3+2 & -1+2 \\ 0+0 & 2+(-1) & 1+(-2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la suma:

Asociativa	$(A+B)+C = A+(B+C)$
Conmutativa	$A+B = B+A$
Elemento neutro	$\mathbf{0}_{m,n}$ (matriz nula); que cumple: $A+0 = 0+A = A$
Elemento simétrico	$-A$ (opuesta de A); que cumple: $A+(-A) = \mathbf{0}$

1.2.2. Producto por un escalar

Definición 3 *Diremos que k es un escalar, cuando $k \in \mathbb{R}$. Es decir, cuando k sea un número real.*

Sea $A = (a_{ij})_{m,n}$ una matriz de dimensión $m \times n$, y sea $k \in \mathbb{R}$ un escalar. Se define el producto de k por la matriz A, kA, como la matriz

$$kA = (ka_{ij})_{m,n}$$

Propiedades del producto por un escalar:

Asociativa	$(a \cdot b) \cdot A = a \cdot (b \cdot A)$
Distributiva I:	$(a+b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$
Distributiva II:	$a \cdot (A+B) = a \cdot A + a \cdot B$
Producto por el número 1:	$1 \cdot A = A$

Ejemplo: Sean las matrices:

$$3 \times \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

1.2.3. Producto de matrices

Definición 4 *Sea $A = (a_{ij})_{m,n}$ y $B = (b_{ij})_{n,p}$ (igual número de columnas de A que de filas de B). Se define el producto de A por B, AB, como la matriz $C = (c_{ij})_{m,p}$, siendo c_{ij} el número que resulta de multiplicar la fila i de A por la columna j de B. Es decir*

$$c_{ij} = (a_{i1},\ a_{i2},\ \dots,\ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \dots \\ b_{nj} \end{pmatrix} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}$$

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times 2+2\times 1 & 1\times 4+2\times(-1) & 1\times 1+2\times 2 \\ 2\times 2+(-2)\times 1 & 2\times 4+(-2)\times(-1) & 2\times 1+(-2)\times 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 5 \\ 2 & 10 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades del producto:

Asociativa	$(A_{m,n} \cdot B_{n,p}) \cdot C_{p,q} = A_{m,n} \cdot (B_{n,p} \cdot C_{p,q})$
No Conmutativa	En general, $A \cdot B \neq B \cdot A$
Distributiva I:	$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
Distributiva II:	$(B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$

Observación: para que se pueda realizar la multiplicación el número de filas de la segunda matriz debe coincidir con el número de columnas de la primera. Además el resultado tendrá tantas filas como la primera matriz y tantas columnas como la segunda.

Ejercicio 2

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$, comprueba las operaciones:

(a) $A + B$ (b) $2A - 3B$ (c) $A^T - \frac{1}{2}B$

(d) $B \cdot (-A)$ (e) $A^2 - B^2$ (f) $C \cdot D$

(g) $D \cdot C$ (h) $D^T - 3C$ (i) $D \cdot A \cdot C$

Ejercicio 3

Determina los valores de m para los cuales $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ verifique $X^2 - \frac{5}{2}X + I = 0$

Ejercicio 4

Calcula A^n y B^n siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

Ejercicio 5

Resuelve: $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Ejercicio 6

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$, calcula $A^2, A^3, \ldots, A^{128}$

2. Determinantes

A cada matriz cuadrada A se le asigna un escalar particular denominado determinante de A, denotado por $|A|$ o por $det(A)$.

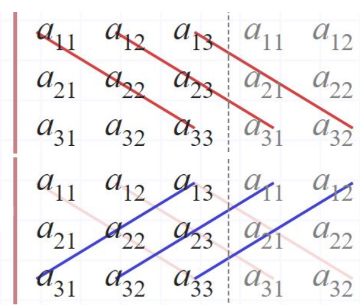
2.1. Determinantes de orden dos

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

2.2. Determinantes de orden tres

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = +a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}$$



2.3. Cálculo del determinantes por sus adjuntos

Definición 5 *Si en una matriz cuadrada de orden n se selecciona el elemento a_{ij} , cuando suprimimos su fila y su columna se obtiene una submatriz de orden $(n-1)$. Su determinante es un menor de orden $(n-1)$ que se llama menor complementario del elemento a_{ij} , y se designa por α_{ij} .*

Definición 6 *Se llama adjunto de a_{ij} al número $A_{ij} = (-1)^{i+j}\alpha_{ij}$, es decir, al menor complementario con su signo o con el signo cambiado según que la suma de los subíndices $i + j$ sea un número par o impar.*

El valor de un determinante es igual a la suma de productos de los elementos de una línea por sus adjuntos correspondientes:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} + \ldots + a_{1n} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots \end{vmatrix}$$

2.4. Propiedades

- $|A^t| = |A|$
- $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
- $|A| = 0$ si:
  - Posee dos líneas iguales
  - Todos los elementos de una línea son nulos.
  - Los elementos de una línea son combinación lineal de las otras.
- Un determinante triangular es igual al producto de los elementos de la diagonal principal.
- Si en un determinante se cambian entre sí dos líneas paralelas su determinante cambia de signo.
- Si a los elementos de una línea se le suman los elementos de otra paralela multiplicados previamente por un nº real el valor del determinante no varía.
- Si se multiplica un determinante por un número real, queda multiplicado por dicho número cualquier línea, pero sólo una.
- Si todos los elementos de una fila o columna están formados por dos sumandos, dicho determinante se descompone en la suma de dos determinantes.

$$\begin{vmatrix} a+b & c \\ d+e & f \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

Ejercicio 7

Calcula el valor de los determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 7 & 7 \end{vmatrix}$ **(b)** $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix}$ **(c)** $\begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -4 & 0 \end{vmatrix}$

Ejercicio 8

Calcula el valor de los determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} -2 & 0 & 6 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{vmatrix}$

Ejercicio 9

Justifica, sin desarrollar, que los siguientes determinantes son nulos:

(a) $\begin{vmatrix} 4 & 7 & 12 \\ 5 & -2 & 15 \\ -1 & 6 & -3 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 32 & 54 & 75 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ a & b & c \\ b+c & a+c & a+b \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 8 \\ -1 & 4 & -6 \\ 1 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} -8 & 25 & 40 \\ \frac{2}{5} & 3 & -2 \\ 0 & 27 & 0 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 7 & 3 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ -14 & -6 & 10 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} x & x+1 & x+2 \\ x & x+3 & x+4 \\ x & x+5 & x+6 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1+a & 2+a & 3+a & 4+a \\ a & a & a & a \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix}$

Ejercicio 10

Resuelve las ecuaciones:

(a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1-x \\ 1-x & 1+x \end{vmatrix} = 12$ (b) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & a \end{vmatrix} = 0$ (c) $\begin{vmatrix} a-1 & 1 & -1 \\ 0 & a+6 & 3 \\ a-1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

(d) $\begin{vmatrix} x-2 & 1-2x \\ x & x \end{vmatrix} = 6$ (e) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & a^2 \end{vmatrix} = 0$ (f) $\begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & a & 2 \end{vmatrix} = 0$

Ejercicio 11

Si $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 16$, razona cuál es el valor de los determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} a & 4b \\ c & 4d \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & b+4a \\ c & d+4c \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 5c & 5d \\ 5a & 5b \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{c}{a} \\ ab & ad \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} -a & -c \\ 4b & 4d \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} \frac{c}{4} & \frac{-d}{4} \\ \frac{a}{4} & \frac{-b}{4} \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 4a-4c & 4b-4d \\ c & d \end{vmatrix}$

Ejercicio 12

Sabiendo que $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ x & y & z \end{vmatrix} = 2$, calcula el valor de los determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a+12 & b+12 & c+12 \\ \frac{x}{3} & \frac{y}{3} & \frac{z}{3} \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} a & x & 1 \\ b & y & 1 \\ c & z & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ c-a & b-c & c \\ z-x & y-z & z \end{vmatrix}$.

(d) $\begin{vmatrix} 1-x & 1-y & 1-z \\ a+7x & b+7y & c+7z \\ 7x & 7y & 7z \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ x-a & y-b & z-c \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} \frac{a}{2} & \frac{b}{2} & \frac{c}{2} \\ \frac{1}{5}x & \frac{1}{5}y & \frac{1}{5}z \\ -4 & -4 & -4 \end{vmatrix}$

Ejercicio 13

Halla el valor de los siguientes determinantes:

(a) $\begin{vmatrix} 0 & 4 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 7 & 0 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} -1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & -5 & 10 & 4 \\ 7 & -8 & 9 & -2 \end{vmatrix}$

Ejercicio 14

Resuelve las ecuaciones:

(a) $\begin{vmatrix} x & 1 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x & 1 \\ 1 & 0 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **(b)** $\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$ **(c)** $\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & 3 & 3 \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} = 0$

3. Matriz inversa

Definición 7 *Sea A una matriz cuadrada de orden n. Diremos que A^{-1} es la matriz inversa de A, cuando $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$, siendo I_n la matriz identidad de orden n.*

Propiedades:

- $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(k \cdot A)^{-1} = k^{-1} \cdot A^{-1}$
- $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$
- Una matriz tiene matriz inversa si y solo si $|A| \neq 0$

3.1. Cálculo de la matriz inversa por el método de Gauss

- Construir una matriz del tipo $M = (A|I)$, es decir, A está en la mitad izquierda de M y la matriz identidad I en la derecha.
- Utilizando el método Gauss-Jordan vamos a transformar la mitad izquierda, A, en la matriz identidad, que ahora está a la derecha, y la matriz que resulte en el lado derecho será la matriz inversa: A^{-1} . Recordamos que para aplicar el método de Gauss-Jordan podíamos realizar las siguientes transformaciones: intercambio de dos filas, multiplicación o división de toda una fila por un número, combinación lineal de filas.

Para aplicar el método de Gauss-Jordan utilizaremos los siguientes pasos:

a) Intentamos que la 1ª fila tenga como primer coficiente 1.

b) Usamos la primera fila para anular todos los coeficientes de la primera columna de la segunda fila en adelante.

c) Usamos la segunda fila para eliminar todos los coeficientes de la segunda columna desde la tercera fila en adelante.

d) Vamos siguiendo este proceso hasta obtener una matriz escalonada.

e) Luego procedemos de modo análogo con los elementos que están por encima de la diagonal principal de la matriz A.

f) Cuando hayamos transformado la matriz A en una matriz diagonal, dividimos cada fila por el coeficiente correspondiente.

3.2. Cálculo de la matriz inversa por la matriz adjunta traspuesta

La matriz inversa de A coincide con la traspuesta de la matriz adjunta dividida por el determinante de A.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\left[Adj(A)\right]^t$$

Matriz adjunta de una matriz de orden 2:
Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Matriz adjunta de una matriz de orden 3:
Sea $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b & c \\ h & i \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & c \\ g & i \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & b \\ g & h \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

Ejercicio 15

Halla las matrices inversas de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 16

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, prueba cuál de las siguientes matrices es su inversa: $M = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ o $N = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Ejercicio 17

Considera las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} t & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -t \\ 2t & 1 & -1 \\ 2 & t & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix}$$

a. Halla los valores del parámetro t para los que las matrices anteriores tienen inversa.

b. Calcula, si es posible, A^{-1} para $t = 2$.

c. Calcula, si es posible, B^{-1} para $t = 2$.

d. Para $t = -1$, resuelve $\det(C^{-1} - xI) = 0$

4. Ecuaciones y sistemas matriciales

Definición 8 *Una ecuación en las que las incógnitas son matrices se denomina ecuación matricial.*

Para resolver una ecuación matricial, despejamos la matriz incógnita X. Teniendo en cuenta que:

- Las matrices que están sumando o restando en un miembro pasan, al otro, cambiadas de signo.
- Para despejar cuando hay una matriz multiplicando, multiplicamos ambos miembros por la matriz inversa (teniendo cuidado con el orden porque la multiplicación no es conmutativa):

$$A \cdot X = B$$
$$A^{-1} \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Definición 9 *Un sistema de ecuaciones en el que las incógnitas son matrices se llama sistema matricial.*

Para resolver sistemas lineales de ecuaciones matriciales se procede de la misma forma que para resolver sistemas de ecuaciones lineales, es decir, por los métodos de reducción, sustitución o igualación.

Ejercicio 18

Halla las matrices X e Y que verifican el sistema $2X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $X - Y = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 19

Halla dos matrices A y B tales que: $2A + 3B = \begin{pmatrix} 8 & 4 & 7 \\ 18 & 11 & -6 \\ 8 & 3 & 13 \end{pmatrix}$; $-A + 5B = \begin{pmatrix} 9 & -2 & 16 \\ 17 & 1 & -10 \\ 9 & 5 & 13 \end{pmatrix}$

Ejercicio 20

Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, halla una matriz B tal que $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$

Ejercicio 21

Resuelve la ecuación matricial: $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 22 & 14 \end{pmatrix}$

Ejercicio 22

Determina la matriz X que verifica: $AXA - B = 0$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Ejercicio 23

Halla una matriz X tal que $XAX^{-1} = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & -9 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$

Ejercicio 24

Resuelve las ecuaciones matriciales:

a. Dada $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, halla una matriz X tal que $AXA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$

b. $A^{-1}XA = B$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

c. $(A + X)B = I$, siendo A y B las matrices del apartado anterior

d. $AXB = C$, siendo $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. Problemas con matrices

Ejercicio 25 *En un instituto I hay alumnos de tres pueblos, A, B y C. La distancia entre A y B es 5 km, la de B a C es 8 km, la de A a C es 10 km y la de A a I es 8 km. Una empresa de transporte escolar hace dos rutas: la ruta 1 parte de B y recorre sucesivamente C, A e I; la ruta 2 parte de C y recorre sucesivamente B, A e I. El número de alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo es:*

a) Determine la matriz M, 2x3, que expresa los kilómetros que recorren los alumnos de cada pueblo por cada ruta.

b) Determine la matriz N, 3x2, que indique los alumnos que siguen cada ruta de cada pueblo.

Pueblo A: 12 alumnos la ruta 1 y 8 alumnos la ruta 2.

Pueblo B: 14 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.

Pueblo C: 6 alumnos la ruta 1 y 9 alumnos la ruta 2.

c) Si la empresa cobra 11 céntimos por Km a cada persona, determine la matriz $P = 0,12M \cdot N$, e interprete cada uno de sus elementos.

6. Sistemas de ecuaciones lineales

Definición 10 *Llamamos sistema lineal de m ecuaciones con n incógnitas a todo conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Se expresa en la forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots\ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots\ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \ldots\ldots\ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Un sistema de ecuaciones se dice que es:

a) Sistema incompatible (S.I.) cuando no tiene solución.

b) Sistema compatible determinado (S.C.D.) cuando tiene una única solución.

c) Sistema compatible indeterminado (S.C.I.) cuando tiene infinitas soluciones.

Las siguientes transformaciones en un sistema dan lugar a sistemas equivalentes:

a) Multiplicar (o dividir) una ecuación por un escalar no nulo.

b) Sumarle a una ecuación una combinación lineal de las restantes.

c) Eliminar una ecuación que sea combinación lineal de otras del sistema.

6.1. Expresión matricial de un sistema

Un sistema de ecuaciones se puede expresar de la forma matricial $A \cdot X = B$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$

A la matriz A se le llama matriz de coeficientes. Definimos la matriz ampliada como:

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots\dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots\dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots\dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

6.2. Método de Gauss para la resolución de sistemas

Un **sistema escalonado** tiene la siguiente forma:

$$\left.\begin{aligned} ax+by+cz&=d \\ ey+fz&=g \\ hz&=j \end{aligned}\right\}$$

Este tipo de sistemas de ecuaciones es muy sencillo de resolver ya que se van despejando las incógnitas desde la última ecuación (en la que prácticamente está despejada) hasta la primera.

El método de Gauss para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales consiste en aplicar reiteradamente el método de reducción al sistema de ecuaciones para obtener un sistema de ecuaciones equivalente al inicial que sea escalonado.

Utilizaremos las transformaciones adecuadas para obtener otro sistema equivalente: intercambio de dos filas, multiplicación o división por un número, combinación lineal.

Para aplicar el método de Gauss utilizaremos los siguientes pasos:

a) Intentamos que la 1ª ecuación tenga coeficiente 1 para la x.

b) Usamos la primera ecuación para eliminar la incógnita x en la 2ª,3ª,... ecuación.

c) Usamos la 2ª ecuación para eliminar la incógnita y en la 3ª,... ecuación.

d) Vamos siguiendo este proceso hasta obtener una matriz escalonada.

e) Resolvemos el sistema escalonado.

Al aplicar el método de Gauss podemos obtener los siguientes casos:

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & * & * \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

Con el mismo número de ecuaciones no nulas que de incógnitas SCD	Con menor número de ecuaciones no nulas que de incógnitas SCI	Con una ecuación en la que se anula todo menos el término independiente SI

Ejercicio 26 *Resuelve los siguientes sistemas:*

(a) $\left\{\begin{aligned} x+y &= 1 \\ y+z &= -2 \\ x+z &= 3 \end{aligned}\right.$ (b) $\left\{\begin{aligned} x+y+z &= 0 \\ x+3y+2z &= 0 \\ 2x+4y+3z &= 0 \end{aligned}\right.$ (c) $\left\{\begin{aligned} 3x+4y-z &= 3 \\ 6x-6y+2z &= -16 \\ x-y+2z &= -6 \end{aligned}\right.$