U.D. 7: Programación lineal

Índice

1. Sistemas de inecuaciones lineales con dos incógnitas

Una **inecuación lineal con dos incógnitas** es una desigualdad algebraica que se puede escribir de una de estas formas:

$$ax + by < c; \quad ax + by \leq c; \quad ax + by > c; \quad ax + by \geq c$$

Para resolverla consideramos la ecuación ax + by = c , asociada a la inecuación, que se obtiene convirtiendo la desigualdad en una igualdad y representamos la recta asociada a esta ecuación, de forma discontinua en los casos primero y tercero y de forma continua en los casos segundo y cuarto; y, luego, seleccionamos la región del plano cuyos puntos verifiquen la desigualdad. Para representar la recta podemos despejar la variable y y dar una tabla de valores (en los casos que nos quede $x = a$ o $y = b$ basta con representar una recta vertical u horizontal, respectivamente).

Un **sistema de inecuaciones lineales con dos incógnitas** es un conjunto de inecuaciones lineales con dos incógnitas. La solución del sistema será la intersección de todas las regiones soluciones de la inecuaciones que lo forma, así que si rallamos la parte que no es solución en cada inecuación, la región factible del sistema será la que queda en blanco.

Ejercicio 1 *Resuelve:*

$$a)\left\{\begin{array}{c} 3x-y\geq 1\\ 2x-y<6\\ x\geq 0\\ y\leq 0\end{array}\right. \qquad b)\left\{\begin{array}{c} 2x+y\geq 1\\ -x-y>6\\ x\geq 0\\ y\leq 0\end{array}\right.$$

2. Problemas de programación lineal

Llamamos **problema de programación lineal** a todo problema consistente en hallar el valor óptimo (máximo o mínimo) de una función lineal de dos variables, llamada **función objeto**, dentro de un recinto determinado por unas restricciones en forma de inecuaciones.

2.1. Resolución de problemas de programación lineal

Para resolver un problema de programación lineal seguimos los siguientes pasos:

- Planteamos el problema, es decir, hallamos la función objeto y las restricciones. Para ello podemos ayudarnos de una tabla como la siguiente:

	$MagnitudA$	$MagnitudB$	$\cdots$
x			
y			
$Total$			

- Hallamos la región factible (resolviendo el sistema de inecuaciones dado por las restricciones).

- Calculamos los vértices de la región factible. Para calcular un vértice hacemos un sistema de ecuaciones con las ecuaciones de las dos rectas a las que pertenece.

- Sustituimos estos vértices en la función objeto.

Observaciones:

- La/s soluciones del programa lineal están siempre en la frontera de la región factible, nunca en el interior.
- Si un programa lineal tiene solución única, entonces se encuentra en uno de los vértices de la región factible.
- Si una función objetivo toma el mismo valor en dos vértices, entonces también toma ese mismo valor en todos los puntos del segmento que une estos vértices y, por tanto, tiene infinitas soluciones (todos los puntos del segmento).

Ejercicio 2 *Cierta sala de espectáculos tiene una capacidad máxima de 1500 personas, entre adultos y niños. El número de niños asistentes no puede superar los 600. El precio de la entrada a una sesión de un adulto es de 4,8 euros, mientras que la de un niño es de un* 40 % *menos. El número de adultos no puede superar al doble del número de niños. Cumpliendo las condiciones anteriores, ¿cuál es la cantidad máxima que se puede recaudar por la venta de entradas? ¿Cuántas de las entradas serán de niños?*

Ejercicio 3 *Dado el sistema de inecuaciones siguiente:*

$$\begin{cases} x+2y \geq -4 \\ y \leq x+1 \\ x+3y \leq 3 \\ 2x \leq 3y+6 \end{cases}$$

a) Representa gráficamente el recinto definido por el sistema anterior.
b) Calcula los vértices de ese recinto.
c) Obtén en dicho recinto el valor máximo y el mínimo de la función $F(x,y) = x - 2y + 5$ *. Di en qué puntos se alcanzan.*

Ejercicio 4 *Un orfebre fabriba dos tipos de joyas. Las de tipo A precisan 1 g de oro y 2 g de plata, vendiéndoloas a 50 euros cada una. Para la fabricación de las del tipo B emplea 2 g de oro y 2 g de plata, y las vende a 80 euro. El orfebre tiene solo en el taller 70 g de oro y 100 g de plata. Calcula cuántas joyas ha de fabricar de cada clase para obtener un beneficio máximo.*