

## ÍNDICE

|   |   |         |
|---|---|---------|
| ➤ | Justificación.....  | pág. 2  |
| ➤ | El trabajo en Matemáticas.....  | pág. 2  |
| ➤ | Didáctica de las Matemáticas en Educación Infantil.....                     | pág. 5  |
| ○ | Introducción.....   | pág. 5  |
| ○ | Bloque I: La numeración, las operaciones y la resolución de problemas.....  | pág. 7  |
| ○ | Bloque II: Orientación y representación espacial.....                       | pág. 16 |
| ○ | Bloque III: Las medidas.....  | pág. 19 |
| ➤ | Sistema de numeración decimal.....  | pág. 23 |
| ➤ | Operaciones.....  | pág. 27 |
| ○ | Suma.....   | pág. 27 |
| ○ | Resta.....  | pág. 28 |
| ○ | Multiplicación.....   | pág. 29 |
| ○ | División.....   | pág. 31 |
| ➤ | La medida: Estimación y cálculo de magnitudes.....                          | pág. 34 |
| ➤ | Geometría.....  | pág. 35 |
| ➤ | Tratamiento de la información. Estadística, Azar y Probabilidad.....        | pág. 36 |
| ➤ | Resolución de problemas.....  | pág. 42 |
| ➤ | Cálculo mental.....   | pág. 49 |
| ○ | Introducción.....   | pág. 49 |
| ○ | Justificación y aportaciones de las investigaciones.....                    | pág. 49 |
| ○ | El cálculo mental en la educación infantil.....                             | pág. 52 |
| ○ | Contenidos y actividades para el Cálculo Mental en el primer ciclo.....     | pág. 52 |
| ○ | Contenidos y actividades para el Cálculo Mental en el segundo ciclo.....    | pág. 55 |
| ○ | Tratamiento del Cálculo Aproximado en el segundo ciclo.....                 | pág. 58 |
| ○ | Contenidos y actividades para el Cálculo Mental en el tercer ciclo.....     | pág. 59 |
| ▪ | Conocimientos básicos para el Cálculo Mental.....                           | pág. 60 |
| ▪ | Estrategias más habituales.....   | pág. 62 |
| ▪ | Aplicaciones.....   | pág. 65 |
| ○ | Contenidos y actividades para el Cálculo Aproximado en el tercer ciclo..... | pág. 67 |
| ▪ | Conocimientos básicos.....  | pág. 68 |
| ▪ | Principales estrategias.....  | pág. 68 |
| ▪ | Algunas actividades.....  | pág. 69 |
| ○ | Distribución de los contenidos y actividades en el tercer ciclo.....        | pág. 70 |
| ○ | Orientaciones didácticas generales.....                                     | pág. 71 |

## JUSTIFICACIÓN

A partir del análisis de los resultados de las distintas pruebas diagnósticas, se ha observado a lo largo de distintos cursos el deficiente dominio del alumnado en algunos elementos de competencia directamente relacionados con las siguientes dimensiones del área de Matemáticas, como son:

- Organizar, comprender e interpretar información.
- Expresarse matemáticamente.
- Plantear y resolver problemas.

Esto ha propiciado el uso del documento de Metodología Común para el área de Matemáticas.

## EL TRABAJO EN MATEMÁTICAS

Los contenidos del aprendizaje de las matemáticas deben relacionarse con la *experiencia cotidiana* de los alumnos y de las alumnas. El sentido de esta área en la Educación primaria es eminentemente experiencial; los contenidos de aprendizaje toman como referencia lo que resulta familiar y cercano al alumnado, y se abordan en contextos de resolución de problemas y de contraste de puntos de vista. Los niños y las niñas deben aprender matemáticas utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para adquirir progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos.

La enseñanza-aprendizaje de las matemáticas debe atender equilibradamente, primero, al establecimiento de *estrategias y destrezas cognitivas*; después, a su aplicación funcional en el entorno, y, finalmente, a su valor instrumental creciente, formalizador del conocimiento humano y del conocimiento científico.

El área de Matemáticas contribuye al desarrollo de las *competencias básicas* del alumnado en los siguientes ámbitos:

- **Competencia matemática y en ciencias y tecnología.** en todos y cada uno de sus aspectos, lo que se logra en la medida en que el aprendizaje de los contenidos va dirigido precisamente a su utilidad para enfrentarse a las múltiples ocasiones en las que niños y niñas emplean las matemáticas fuera del aula. El conocimiento e interacción con el mundo físico porque hace posible una mejor comprensión y una descripción más ajustada del entorno. En primer lugar, con el desarrollo de la visualización (concepción espacial), los niños y las niñas mejoran su capacidad para hacer construcciones y manipular mentalmente figuras en el plano y en el espacio, lo que les será de gran utilidad en el empleo de mapas, planificación de rutas, diseño de planos, elaboración de dibujos, etc. En segundo lugar, a través de la medida se logra un mejor conocimiento de la realidad y se aumentan las posibilidades de interactuar con ella y de transmitir informaciones cada vez más precisas sobre aspectos cuantificables del entorno. Por último, la destreza en la utilización de representaciones gráficas para interpretar la información aporta una herramienta muy valiosa para conocer y analizar mejor la realidad.
- **Competencia digital,** en varios sentidos: Por una parte porque proporcionan destrezas asociadas al uso de los números, tales como la comparación, la aproximación o las relaciones entre las diferentes formas de expresarlos, facilitando así la comprensión de informaciones que incorporan cantidades o medidas. Por otra parte, a través de los contenidos del bloque cuyo nombre es precisamente tratamiento de la información se contribuye a la utilización de los lenguajes gráfico y estadístico, esenciales para interpretar la información sobre la realidad. En menor escala, la iniciación al uso de calculadoras y de herramientas tecnológicas para facilitar la comprensión de contenidos matemáticos, está también unida al desarrollo de la competencia digital.

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- **Sentido de iniciativa y espíritu emprendedor** a través de la resolución de problemas constituyen la principal aportación que desde el área se puede hacer a. La resolución de problemas tiene, al menos, tres vertientes complementarias asociadas al desarrollo de esta competencia: la planificación, la gestión de los recursos y la valoración de los resultados. La planificación está aquí asociada a la comprensión en detalle de la situación planteada para trazar un plan y buscar estrategias y, en definitiva, para tomar decisiones; la gestión de los recursos incluye la optimización de los procesos de resolución; por su parte, la evaluación periódica del proceso y la valoración de los resultados permite hacer frente a otros problemas o situaciones con mayores posibilidades de éxito. En la medida en que la enseñanza de las matemáticas incida en estos procesos y se planteen situaciones abiertas, verdaderos problemas, se mejorará la contribución del área a esta competencia. Actitudes asociadas con la confianza en la propia capacidad para enfrentarse con éxito a situaciones inciertas, están incorporadas a través de diferentes contenidos del currículo.
- **Competencia para aprender a aprender:** A menudo es un requisito para el aprendizaje la posibilidad de utilizar las herramientas matemáticas básicas o comprender informaciones que utilizan soportes matemáticos. Para el desarrollo de esta competencia es también necesario incidir desde el área en los contenidos relacionados con la autonomía, la perseverancia y el esfuerzo para abordar situaciones de creciente complejidad, la sistematización, la mirada crítica y la habilidad para comunicar con eficacia los resultados del propio trabajo. Por último, la verbalización del proceso seguido en el aprendizaje, contenido que aparece con frecuencia en este currículo, ayuda a la reflexión sobre qué se ha aprendido, qué falta por aprender, cómo y para qué, lo que potencia el desarrollo de estrategias que facilitan el aprender a aprender.
- **Competencia en comunicación lingüística** desde el área de Matemáticas se debe insistir en dos aspectos: Por una parte la incorporación de lo esencial del lenguaje matemático a la expresión habitual y la adecuada precisión en su uso. Por otra parte, es necesario incidir en los contenidos asociados a la descripción verbal de los razonamientos y de los procesos. Se trata tanto de facilitar la expresión como de propiciar la escucha de las explicaciones de los demás, lo que desarrolla la propia comprensión, el espíritu crítico y la mejora de las destrezas comunicativas.
- **Competencia en conciencia y expresiones culturales** desde la consideración del conocimiento matemático como contribución al desarrollo cultural de la humanidad. Así mismo, el reconocimiento de las relaciones y formas geométricas ayuda en el análisis de determinadas producciones artísticas.
- **Competencias sociales y cívicas** se refiere, como en otras áreas, al trabajo en equipo que en Matemáticas adquiere una dimensión singular si se aprende a aceptar otros puntos de vista distintos al propio, en particular a la hora de utilizar estrategias personales de resolución de problemas.

Las matemáticas deben presentarse al alumnado como un *conjunto organizado* de conocimientos y procedimientos que van evolucionando a lo largo del tiempo, reforzando la utilización paralela del razonamiento empírico inductivo y del razonamiento deductivo y la abstracción.

Para conseguir este razonamiento en nuestro centro se propone trabajar semanalmente, independientemente de la programación del libro, del tema, o del nivel una serie de actividades en los siguientes aspectos:

- **Realización de dictados numéricos:** Números naturales, romanos, fraccionarios, decimales, operaciones, descomposiciones que afianzan la lectura y escritura de números, los términos de las operaciones estudiadas y la descomposición en órdenes de unidades.
- **Cálculo mental:** Se trabajará 5 minutos diarios que ayudan a la construcción e inducción de estrategias y destrezas matemáticas y a interiorizar las propiedades de las operaciones.
- **Batería de operaciones:** Actividades de repaso que ayudan a memorizar los algoritmos y recordar las operaciones en horizontal.
- **Problemas:** Los procesos de resolución de problemas constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática.

En cuanto a la **corrección** en esta área se tendrán en cuenta los siguientes aspectos:

- La libreta de matemáticas del alumno/a es el verdadero libro de consulta, es la herramienta que recoge todas las estrategias que el niño/a ha desarrollado a lo largo de los distintos aspectos de esta área, por lo que se le debe exigir orden, limpieza y claridad.
- Nos aseguraremos desde el principio que todos los ejercicios matemáticos se realicen con *lápiz* y nunca con bolígrafo, para evitar cualquier tipo de presentación descuidada.

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- Se enseñará a los alumnos y a las alumnas que no borren lo que esté mal, sino que dejen espacios para las posibles correcciones, anotaciones o comentarios, junto a los ejercicios realizados por ellos.
- Tales correcciones, anotaciones o comentarios se realizarán siempre en color rojo, bien sea con el bicolor en los primeros cursos o con el bolígrafo cuando éste se empiece a usar.
- Debemos incidir en la ortografía a la hora de escribir en éste área.
- En cuanto al manejo de la calculadora, se debe restringir a casos concretos como:
  - Cuando haya que realizar cálculos engorrosos en los que el interés no se centra en las operaciones sino en los procesos y razonamientos.
  - Para realizar la comprobación de resultados numéricos en las operaciones hechas con lápiz y papel, en su cuaderno.

## DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS EN EDUCACIÓN INFANTIL

### INTRODUCCIÓN

Las matemáticas en educación infantil, al igual que en lengua y otras materias, son conocimientos en los que los niños ya vienen iniciados desde la experiencia de la propia vida: conteo, formas,...pero de una forma no estructurada. Le compete a la escuela realizar un trabajo matemático de calidad, y no por ser a temprana edad dejar de ser científico. Hay que aprovechar la curiosidad infantil que junto con la perseverancia y la disciplina son elementos fundamentales para avanzar en los aprendizajes matemáticos.

Las matemáticas son uno de los elementos esenciales de la cultura de nuestra época; son mucho más que una disciplina formal, pues constituyen una de las formas básicas de conocimiento que permiten comunicar, interpretar, predecir y conjeturar.

Las matemáticas aparecen en todas las expresiones humanas; permiten codificar información y obtener una imagen del medio social y natural suficiente para actuar. Y el sistema de enseñanza aprendizaje tendrá en cuenta en todo momento el desarrollo psicológico del alumno (psicología genética y social), por ello la metodología deberá ser:

- **Activa:** El aprendizaje se apoya en la acción. El niño estará implicado en todo momento en el proceso enseñanza-aprendizaje, partiendo de la manipulación hasta llegar al momento de la simbología:
  - 1.- Acción y manipulación: será el primer paso en toda actividad, donde el niño manipulan los materiales y actúan sobre el medio. La función de las matemáticas es anticipar resultados y la manipulación es un medio con el que los niños pueden validar soluciones.
  - 2.- Representación: la acción y manipulación deben expresarse mediante un gráfico, un diagrama o cualquier esquema donde representen datos y relaciones fundamentales entre ellos.
  - 3.- Expresión simbólica de los conceptos trabajados: con la notificación simbólica las relaciones adquieren una expresión formalizada que permite operar de acuerdo con sus reglas establecidas.
- **Basada en un aprendizaje significativo:** Se conoce en contra de los conocimientos anteriores. Los aprendizajes previos de los alumnos hay que tenerlos en cuenta para construir nuevos conocimientos. Partiendo de esta teoría se le proponen a los alumnos situaciones matemáticas que ellos puedan vivir, que provoquen la emergencia de problemas matemáticos, que les creen conflictos con los conocimientos que ya tenían y su resolución sea construible por los propios alumnos y verificable.
- **Interacción del alumno con el medio:** Los conflictos cognitivos entre miembros de un mismo grupo social pueden facilitar la adquisición de conocimientos. Hay que tener en cuenta lo que un niño hace solo y lo que puede hacer en interacción con la ayuda de los otros (niños, adultos,...):

- El niño aprende otras respuestas distintas a las suyas.
  - La necesidad de llevar a cabo regulaciones sociales para llegar a un consenso implica que el alumno sea más activo cognitivamente.
  - Las distintas respuestas son portadoras de información y llama la atención del niño otros aspectos que él no había considerado.
- **Importancia del lenguaje matemático:** Poner en común es "hacer público", por ello el lenguaje matemático como medio de comunicación social es primordial. El lenguaje permitirá al alumno, entre otras cosas:
    - Apropiarse de situaciones nuevas (vocabulario)
    - Identificar nociones y procedimientos.

Es tan importante el lenguaje que sin una correcta expresión verbal de los contenidos no hay buena comprensión. Por ello, cuanto más preciso sea el lenguaje, mejor. Se deben usar términos matemáticos (de acuerdo siempre a la edad) para que el alumnado vaya familiarizándose con una expresión correcta que le permitirá apropiarse de un vocabulario adecuado.

El sistema de enseñanza aprendizaje activo nos lleva a una interacción entre: maestro/a, alumno/a y contenidos.

El papel que el/la **maestro/a** desempeña en el proceso de enseñanza activa le obliga a actuar en diferentes momentos, haciendo una exposición razonada del trabajo desarrollado o por desarrollar (la exposición no debe confundirse con un control absoluto del discurso por parte del profesor), en su exposición dará coherencia al trabajo realizado, pero siempre se debe hacer mediante el diálogo y debate con los alumnos, creando en ellos un grado de implicación y compromiso ante las distintas situaciones de aprendizaje.

**El/La alumno/a** será el principal elemento activo de todo el proceso.

- Los contenidos** son un aspecto muy importante a tener en cuenta, pues es preciso tratar todos los campos propios de la materia:
- La lógica como cultivo del razonamiento.
  - El cálculo como conocimientos de los números.
  - La geometría como representación mental del espacio.

Todo ello relacionado entre sí se da en un contexto, dentro de un sistema educativo y marcado por el aspecto social y cultural de las matemáticas.

Dividiremos la materia en tres grandes Bloques de conocimientos:

- La numeración, las operaciones y la resolución de problemas.
- Orientación y representación espacial. La geometría
- La medida.

Los tres grandes bloques se interrelacionan y aunque sin perder la perspectiva de lo que se está trabajando en cada momento, se apoyarán unos en los otros. Esta interrelación tendrá como fin último alcanzar los dos grandes objetivos del área matemática en la educación Infantil:

- Comprender y representar nociones y relaciones lógicas y matemáticas referidas a situaciones de la vida cotidiana, acercándose a estrategias de resolución de problemas.
- Representar aspectos de la realidad vivida o imaginada de forma cada vez más personal y ajustada a los distintos contextos y situaciones, desarrollando competencias comunicativas en diferentes lenguajes y formas de expresión.

### INTRODUCCIÓN

El número y la numeración son objetos culturales, utilizados cotidianamente en el ambiente familiar y social; por ello debemos tenerlo en cuenta en la enseñanza. Para diseñar el proceso de enseñanza hay que determinar el conjunto de situaciones que dan sentido al número y a la numeración y no limitarnos al conteo exclusivamente. Aunque en matemáticas número y numeración son dos aspectos distintos, en estos niveles no pueden trabajarse independientemente, ambas nociones están íntimamente ligadas. Las situaciones que puedan dar significación al número y la enumeración serán aquellas que den respuesta a la pregunta ¿para qué tenemos necesidad del número y su designación?

En este ciclo consideramos principalmente dos funciones del número que los alumnos pueden reconocer y utilizar para construir una significación idónea:

- El número como memoria: memoria de cantidad, evoca una cantidad sin que esté presente (aspecto cardinal) y memoria de posición, que permite evocar el lugar de un objeto en una sucesión ordenada (aspecto ordinal)
- El número nos permite tener la posibilidad de anticipar resultados en situaciones no presentes o incluso no realizadas, pero sobre las que tenemos ciertas informaciones.

La enumeración de colecciones es un paso previo a la construcción del número y de las operaciones aritméticas elementales.

### I. LA ENUMERACIÓN. ENUMERACIÓN DE COLECCIONES

Para determinar una colección con el fin de contarla hay que tomar las siguientes decisiones:

- Elegir un primer elemento y aplicarle una función de reconocimiento (identificación, denominación, comparación,...).
- Elegir un sucesor de este primer elemento controlando que es diferente del o de los precedentes.
- Reiterar la operación hasta que todos los elementos de la colección hayan sido señalados.

Enumerar una colección exige pues las competencias siguientes:

- Distinguir dos elementos diferentes, por un carácter distinto o por su posición (si la situación no lo permite no habría enumeración posible)
- Reconocer la pertenencia o no de todos los elementos a la colección que se quiere enumerar (reconocer su propiedad característica)
- Elegir un primer elemento.
- Poder conservar la memoria de esta colección.
- Poder determinar el subconjunto de elementos no elegidos (distinguir un elemento elegido de uno no elegido, no designar dos veces el mismo elemento)
- Determinar para cada elemento elegido un sucesor en el conjunto de los elementos no elegidos, es decir elegir un primer elemento en ese nuevo conjunto.
- Saber cuando ha terminado la tarea.

Por todo ello se presentarán ejemplos de algunas actividades tipo de enumeración:

#### "Juego de las huchas"

- Materiales: Disponemos de una colección de botes de yogurt o vasos de plástico no transparentes en los que hemos hecho una ranura en la base.
- Actividad: colocamos los vasos boca abajo y pedimos a los niños que cojan botones o fichas de una cesta e introduzcan un botón y solo uno en todos y cada uno de los vasos.

#### "Juego del cartero"

- Materiales: Un mueble con casilleros, cajas de zapatos o cualquier estructura parecida al conjunto de buzones de los bloques de pisos.
- Actividad: Se trata de colocar una carta y solo una en cada una de los casilleros del mueble o similar.

Las **estrategias o procedimientos** que puede poner en funcionamiento el niño son:

- Enumeración instantánea, basado en un control visual instantáneo.
- Marcar los botes a medida que se van distribuyendo los botones.
- Utilizar el espacio, separando un bote cada vez que introduce un botón.
- Organizar el espacio según una estructura de orden total (poner en línea los botes). Esta estructuración permite al alumno establecer un orden previo a la acción, así la coordinación espacio-temporal será más fácil y no necesitará más utilizar los desplazamientos de los objetos.
- Si el alumno no puede modificar la posición espacial de los objetos, ni marcarlos, es preciso que pueda estructurarlos mentalmente por medios de señales interiores o exteriores a la colección, con el fin de producir un orden total. Esta estrategia depende pues del número de objetos en la colección, el espacio del entorno, la relación del espacio del alumno que enumera, las capacidades del alumno para estructurar la colección, con el fin de producir un orden total.

Las **variables didácticas** que van a permitir al profesor provocar cambios en las estrategias del alumno será las siguientes:

- Utilización o no de marcajes.
- Desplazamientos o no de los objetos.
- Tipo de configuración espacial de los objetos (lineal, varias filas, circular)
- Números de objetos de la colección.
- Naturaleza del espacio en el que se desarrolla la actividad, micro-espacio, meso-espacio, macro-espacio.

## II. CONSTRUCCIÓN DE COLECCIONES EQUIPOTENTES.

Debemos ir inculcando al niño la utilidad de los números, ser conscientes de que son instrumentos eficaces para memorizar una cantidad. Nos permiten, en la resolución de problemas, constituir colecciones equipotentes a otras colecciones ya dadas; en definitiva, desarrollar el dominio de procedimientos para la cardinación. Para todo ello será necesario llegar a utilizar el conteo y utilizar la escritura cifrada.

Entre muchas vamos a enumerar algunas actividades tipo:

### **“Coordinación de colecciones”**

- Materiales: Objetos manipulables (botones, bloques lógicos, ...)
- Actividad: contar colecciones de objetos donde el niño busque las estrategias que él considere más adecuadas.

**Verificación de la conservación de cantidades.** Empleo del cuantificador “tantos como”,

### **“Repartimos los lápices a nuestros compañeros de equipo”**

- Materiales: lápices.
- Actividad: repartimos los lápices de nuestro equipo, debemos llevar tantos lápices como compañeros haya.

## "Juego del tren"

- Material: cajas que simulan ser vagones de tren. Tableros donde representan los asientos libres y los ocupados, muñecos,...
- Actividad: Se trata de ir a buscar en una sola vez, el número de pasajeros necesarios para completar las plazas libres del tren. El vagón tendrá una especie de andén donde los niños dejarán los muñecos y los irán colocando de uno en uno en los asientos libres del vagón. Al final de la actividad el niño comprobará si la actividad está bien o no.

## "Juego del robot"

- Material: robot dibujado sobre una cuadrícula, gomettes de diferentes colores (cada color en una caja), una ficha con el dibujo de robot incompleto.
- Actividad: Un robot está dibujado sobre una cuadrícula. En su cuerpo están bien diferenciados todos sus componentes: cabeza, brazos, piernas, tronco,...Cada parte está bien constituida por un número diferente de cuadrados. Ciertos cuadrados están recubiertos de gomettes de diferentes colores (la determinación de su número y posición es una variable que controla el profesor). El profesor pondrá en una esquina de la clase el robot ya realizado después de habérselo enseñado a los niños y explicado la actividad. A cada equipo le dará un robot incompleto e indicará a cada niño la parte del robot que le toca rellenar (esto permitirá adaptar la situación a la capacidad de coordinación que tiene cada niño). En la mesa del maestro se colocarán los gomettes y los niños deben ir y pedir los que necesitan para rellenar cada parte, justo los que necesiten, ni más ni menos.

En estas actividades los alumnos deberán enfrentarse a un problema, en él deben buscar soluciones y producirlas y ellos mismos verificarán si son correctas o no. Para encontrar las soluciones deberán realizar sucesivamente tareas de "cardinal" la primera colección, memorizar el número de elementos que tiene y constituir una segunda colección equipolente.

Variables didácticas:

- El número de cuadrados o asientos libres.
- La disposición espacial de los cuadrados o asientos libres.
- Las dimensiones del robot o paneles del vagón.
- El número de viajes permitidos
- Pedir verbalmente o por escrito el material que necesita.

Los procedimientos posibles que podrán poner en juego los alumnos serán:

- Correspondencia uno a uno.
- Correspondencia subconjunto a subconjunto.
- Dibujos de palotes o signos gráficos
- Determinación del cardinal de la colección por medio de: estimación visual, subitizar, contar, recontar, ; Los dedos de la mano,...

## "Juego de los mosaicos"

- Materiales: Mosaico ya realizado, gomettes, modelo del mosaico para realizar
- Actividad: los alumnos deben realizar un mosaico compuesto de partes independientes o un motivo decorativo del mismo, compuesto de elementos de formas diferentes a partir del modelo que les presentemos.

Los mosaicos están compuestos por figuras geométricas de forma y colores diferentes que es preciso ir a buscar a unas cajas que están situadas en un lugar determinado de la clase, desde donde no se verá el mosaico. En una primera fase el niño completará la sección del mosaico que le corresponda de un solo viaje; en una segunda etapa le impondremos una segunda condición: elaborar un mensaje escrito.

Variables didácticas:

- El número de elementos para cardinal.
- Posición espacial del mosaico.

### “El juego del tesoro”

- Material: Dos dados, una pequeña caja para cada niño que pueda cerrarse, una colección de objetos tan atrayente para los niños como sea posible.
- Actividad: Los niños están repartidos en grupos, uno de los niños es el secretario. El maestro tiene una caja llena de piedras y joyas, para que ellos tengan su caja deberán lanzar los dados y pedir tantas piedras como puntos hayan salido. Cada niño meterá las piedras en su caja y escribirá su nombre en una etiqueta. El secretario será el encargado de dar el número de piedras pedido por el alumno.

### III. EL NÚMERO PARA ANTICIPAR Y CALCULAR. ( La adición y la sustracción)

Puede conducir a los alumnos a tomar consciencia de que es posible anticipar mentalmente resultados de una situación aditiva y sustractiva (búsqueda de una suma, de un complemento, de una diferencia,...) Aunque el objetivo en estos niveles no es que produzcan escrituras aditivas con sus términos y signos si se les da a los alumnos la ocasión de poner en funcionamiento sus procedimientos “espontáneos” o de elaborar otros nuevos en un contexto numérico familiar (recuento, descuento, ...)

Algunas de las actividades tipo serían las siguientes:

### “La caja negra” o “juego de esconder”

- Material: Una caja opaca en un lugar visible para todos los alumnos. Bolas o cubos
- Actividad: un niño mete en una caja X objetos que se dicen en voz alta o se escribe en la pizarra (también puede ser con la tirada del dado , se introducen tantos objetos como puntos han salido en el dado); otro alumno mete después Y objetos en la misma caja, también se dice en voz alta el número de objetos o se escribe en la pizarra; los objetos se introducen a la vez, no de uno en uno. Se cierra la caja y se pide a los alumnos cuantos objetos habrá en la caja.

Variable didáctica: La cantidad de objetos que pueden introducirse en cada tirada.

En otras fases se desarrollará la misma actividad pero de distinto modo:

- 2ª fase: Se desarrolla del mismo modo pero el segundo alumno deberá sacar Y objetos de la caja.
- 3ª fase: el primer alumno mete X objetos en la caja, se llama a un segundo alumno y se le dice que queríamos tener Z objetos en la caja, ¿Cuántos debería meter él ahora.
- 4ª fase: se puede extender la actividad con la suma de tres números.

### Juego de “Colorín-colorado”

- Material: Un saco con piedrecitas de río o bien semillas.

- Actividad: Un niño pone un cierto número de semillas en las manos del profesor (menos de 6), las cuenta en voz alta. Otro niño hace lo mismo en la otra mano. El profesor cierra las manos y todos dicen: colorín colorado ¿cuántas tengo en las manos? Después de dar la respuesta se realizará la validación contando las semillas.

Variables didácticas: La cantidad de semillas que se colocan en una mano y otra.

Hay varias fases:

- 1ª fase: se cuentan las piedras o semillas de una mano y otra, las junta y pregunta ¿Cuántas piedras tengo en las manos?
- 2ª fase: el profesor muestra a los alumnos que dispone de un cierto número de semillas en sus manos juntas (por ejemplo 7). Esconde sus manos detrás de la espalda y hace aparecer una sola mano que tiene X semillas (5) Y pregunta: colorín colorado ¿Cuántas tengo en la otra mano?

### “Juego de los dados”

- Material: dos dados con cifras en sus caras, con puntos, con puntuación o cifra hasta el 3, hasta el 6,...
- Actividades: intervienen dos jugadores o más. La actividad básica es que los dos jugadores lanzan los dados, gana el que obtenga mayor puntuación.

La actividad anterior puede complicarse con dados cifrados, semillas, una caja opaca o un papel blanco y lápiz. La regla es la misma que la anterior, pero los niños pueden meter en la caja tantas semillas como indica cada una de las cifras de los dados. También podrán anotar en un papel el número de cada tirada. Las semillas o los diferentes dibujos o números permitirán verificar el resultado.

Variables didácticas: En lugar de lanzar dos dados, podemos pedir que lancen un dado dos veces consecutivas, esto implica la memorización del primero.

### “Juego de los dedos de la mano”

- Materiales: los dedos de las manos.
- Actividades: Se secuenciarán del siguiente modo:
  - Mostrar 8 dedos de muchas maneras con las dos manos.
  - Mostrar 4 dedos en una mano y completar con la otra hasta tener 7 en total.
  - Etc.

En esta actividad el niño llegará a tener constancia de la equivalencia:

1 mano → 5 dedos

2 manos → 10 dedos

Debe desarrollar su capacidad de mostrar directamente los dedos (sin contar): 3 dedos, 5 dedos, ...

### “Desplazamiento sobre pistas”

- Material: una pista con números situada en la pizarra, pared, suelo (los números son variables según el dominio numérico conocido por los alumnos) y un dado

- Actividades: un alumno lanza el dado y avanza con el peón tantas casillas como indique el número del dado. A cada lanzamiento del dado se pide a los alumnos que digan cuántas casillas faltan para la llegada. Para ello el profesor tapa las casillas que le siguen. Se validan los resultados desplazando el peón y contando efectivamente las casillas que quedan sobre la pista.

El dado puede ser usual o bien podemos utilizar un dado con los números 1, 2 3 solamente. Con este último dado, podemos pintar unas caras rojas y otras verdes (tienen el mismo número pero diferente color), las caras verdes indican avanzar y las verdes retroceder.

Esta situación permite proponer a los alumnos pequeños problemas en un contexto ordinal (los números están formando una serie ordenada) y donde adjuntar n, es avanzar n casillas sobre la pista de números. la pista se convierte en un instrumento para resolver problemas aditivos o sustractivos.

### “Las pistas coloreadas”

- Materiales: para cada alumno una pista numérica, dos lápices de color diferente y un dado.
- Actividades: Cada jugador lanza un dado alternativamente y colorea, sobre su pista, el número de casillas indicado por el dado. Alternamos el color para delimitar sus tiradas y para evitar contar desde el principio.

El jugador que gana es el que ha ido más lejos en un número limitado de tiradas o el que primero llegue a la casilla previamente establecida al comienzo del juego.

También puede hacerse de forma colectiva y a partir de las pistas coloreadas el profesor puede proponer cuestiones del tipo:

- Dividir un todo en partes: “ he jugado tres veces y he coloreado hasta la casilla 9, encuentra qué números me han podido salir cada vez”
- Medir una distancia: “tengo 6 casillas, ¿qué número me debe salir para llegar a la casilla 10?”
- Buscar la casilla de partida: “acabo de sacar un 4, y he coloreado de rojo hasta la casilla 7, ¿qué número tenía coloreado ya de color azul?”

### “Problemas orales”

- Actividad: Todas las situaciones anteriores pueden ser evocadas simplemente sin necesidad de jugar. Por ejemplo: Tengo 6 canicas en la caja y añado 3 ¿cuántas tengo?, o bien, “estoy en la casilla 7 de las pistas coloreadas, avanzo 2 ¿dónde estoy ahora?”

En estos pequeños problemas nos interesa no solamente el resultado final sino que debemos observar detenidamente las respuestas de los niños, sus procedimientos.

### “Las flores”

- Materiales: Hoja con el diseño y gomettes situados en bandas. Una hoja en blanco para cada niño.
- Actividad: en una primera fase realizamos una flor grande entre todos. Se coloca un círculo en el centro y se les explica a los niños que alrededor vamos a colocar los pétalos (esta flor yo quiero que tenga 9 pétalos. Los pétalos están en esta caja sobre mi mesa y están colocados en bandas de gomettes ( el profesor muestra las bandas y hace que los niños observen que todas tienen 5 gomettes).

¿Cuántas bandas es necesario tomar para poner los 9 pétalos a la flor? (el profesor estará muy atento en la discusión del número de bandas y número de pétalos, algunos alumnos confundirán el número de bandas con el número de pétalos). Es necesario insistir que nos pueden sobrar pétalos pero nunca una banda completa(es conveniente el número de cinco pétalos en un banda pues les permiten identificarlos con 5 dedos de la mano).

Cuando todos los alumnos estén de acuerdo un niño colocará los pétalos en el póster.

En una segunda fase, cada alumno resuelve su problema (individualmente), cada alumno hace su flor. El niño recibe una hoja en blanco con un círculo en medio y una hoja problema donde está indicado el número de pétalos que necesita. Debe pedir a la maestra el número de bandas (para ello se dará a cada niño el número determinado según su capacidad numérica, y se pueden establecer variables didácticas: que sea verbalmente, por escrito...)

Posteriormente cada alumno verificará su trabajo y explicará o justificará su petición.

La misma actividad se podrá realizar poniendo un flor como modelo en una zona de la clase, el niño la observará y tendrá que hacer la petición por escrito al profesor del material que le debe dar. ( se gestionarán las variables didácticas en función de lo que pretenda el profesor)

#### IV. EL NÚMERO PARA COMPARAR COLECCIONES

Los alumnos pondrán en funcionamiento procedimientos de comparación de colecciones y elaborarán un lenguaje idóneo y adecuado para la comparación de números, empleando correctamente los términos "más que", "menos que" o bien tantos como (trabajado anteriormente).

##### **"Juego de las cajas apiladas"**

- Materiales: Cajas, botones y dados.
- Actividad: Esta actividad se realizará por parejas. El maestro prepara unas cajas que contienen un cierto número de objetos, están apiladas y sólo es visible el contenido de la caja de arriba. Un niño lanza un dado y tomará la caja de arriba si el número de objetos que contiene la caja es más pequeño que el número que ha obtenido en el dado. Al final de la primera vuelta se comparan las colecciones de los distintos jugadores y gana el que tiene más objetos.

##### **Juego de las cajas alineadas**

- Material: Cajas, botones y dados.
- Actividad: El maestro alinea las cajas delante de todos los niños para que las puedan ver, de tal manera que no estén ordenadas según el número de elementos que contienen.

Se intenta mejorar los procedimientos del juego anterior, buscar procedimientos más eficaces, comenzar a estructurar la línea numérica como representación de orden de los números.

Se presenta el juego con la siguiente consigna: Lanzamos el dado, si el número de puntos de una caja es más pequeño que el número de puntos del dado, podremos coger el contenido de la caja. Sólo podemos coger el contenido de una única caja, pero podemos elegirla entre todas las que tenemos delante. Al final gana el que más objetos haya conseguido.

Los niños deben ir construyendo la estrategia "ganadora" que consiste en elegir, de entre todas las cajas con menor número de objetos, la de "mayor" número, porque será con la que más aumente su ganancia.

##### **"Juego de las pistas"**

- Material: Una pista numérica, (formada por un tablero con pistas (6,8,..) que parten desde el exterior y convergen en una central que será la llegada (cada pista tiene un número de casillas distintas a las otras) fichas y dados

- Actividad: Un jugador lanza un dado. Si el número de casillas de su pista es más pequeño que el que aparece en el dado su ficha se coloca directamente en la casilla central (la de llegada). Después de cinco vueltas gana el que más fichas a conseguido reunir en la casilla de llegada.

## V. EL NÚMERO PARA LLEVAR A CABO TRANSACCIONES

### “Juego del banquero”

- Material: Dados y botones o billetes de cartulina de 3 o 4 colores.

- Actividad:

*1ª fase: Iniciación.*

Los niños son repartidos en grupos de grupos de cuatro: tres jugadores y un “banquero” que dispone de una caja conteniendo botones o fichas amarillas, rojos, azules y verdes.

Cada jugador lanza un dado, y el banquero le da tantas fichas amarillas como puntos obtiene en el dado. Además cuando un jugador posea cuatro botones amarillos, **deberá cambiarlos** al banquero por un rojo, de igual modo deberá cambiar cuatro rojos por un azul y cuatro azules por un verde.

Después de asegurarse que las reglas del juego han sido entendidas por todos y correctamente aplicadas en una segunda prueba, el profesor dispone que continúe la actividad, que durará 15 o 20 minutos, a su término detiene el juego y pregunta a cada grupo: ¿ Quién ha ganado? Se les pide a continuación que sobre una hoja representen sus ganancias. Se admiten hacer dibujos.

*2ª fase: Actividad de comunicación*

Se modifica el reparto de tareas en cada grupo: Se nombra un banquero, dos jugadores y un “secretario”, que anota sobre una hoja, en la que figura los nombres (fotos) de los jugadores en columna los puntos obtenidos por cada uno.

Cada jugador juega seis veces. Se detiene la partida. Las fichas de cada jugador se envuelven en un papel con su nombre. Las hojas de los secretarios de dos grupos se intercambian y con la información que contienen, deben ser capaces de “adivinar” las fichas contenidas en los correspondientes envoltorios de los jugadores.

### “Juego de las tiendas”

- Material: juguetes o material para vender, etiquetas con el precio, billetes de cartulina.
- Actividad: Se montará la tienda, cada objeto tiene su precio. Un niño hará de tendero y el resto van a comprar (Los compradores han obtenido los billetes de compra previamente con tiradas de dados). El comprador deberá anotar lo que quiere comprar y anotar su valor; el tendero deberá comprobar si puede darle el objeto que quiere comprar comparándolo con el dinero que le entrega.

El juego se realizará en un primer momento siendo el tendero el profesor, se consensuarán las normas del juego entre todos, una vez realizadas las actividades de prueba, cada vez será el tendero un niño y pondrán en juego la actividad.

## VI. EL NÚMERO PARA REPARTIR

### “Juego de los gomettes”

- Material: Bandas de cartón y gomettes.
- Actividad: En un grupo de seis niños formamos equipos de dos. Cada equipo será una vez el emisor y otras veces el receptor en una situación de comunicación. Los niños deben:
  - Repartir una colección de gomettes en dos partes iguales, colocándola sobre la banda donde se ha realizado una línea de separación.
  - Completar una banda de las que se conoce una de las partes.

- Determinar la línea de división de una banda, de tal manera, que las dos regiones tengan el mismo número de gomets (tantos como).
- Construir una banda que tenga el doble de gomets que una dada.

Variables didácticas:

- El tamaño de la colección a repartir.
- El número de partes.

## BLOQUE II: ORIENTACIÓN Y REPRESENTACIÓN ESPACIAL

### LA GEOMETRÍA

La inclusión de la orientación, representación espacial y la geometría en el currículum que pretende la introducción del pensamiento lógico matemático parece justificado por:

- El niño está en continuo contacto con los principales conceptos espaciales en su entorno social y escolar.
- Necesidad de un desarrollo precoz de diversas nociones y procedimientos que aseguren un dominio creciente de las relaciones que se establecen entre el individuo y el espacio que conduzcan hacia una percepción del espacio y contribuya al desarrollo de la representación espacial necesaria para modelizar adecuadamente los diversos conceptos geométricos.
- El carácter interdisciplinar convierte a la representación del espacio y a la geometría en un comodín que puede resultar eficaz para la formación y configuración del pensamiento artístico, científico, corporal, musical,...

El ámbito matemático que estamos trabajando encuentra muchas dificultades en niños de estas edades. Por ello se trabajará partiendo de la acción, que lleva implícito la observación, para pasar posteriormente a la representación.

Dificultades a tener en cuenta para preparar y organizar situaciones de aprendizaje:

- A los niños de estas edades les resulta más fácil adquirir un lenguaje en términos absolutos que a términos relativos, ya que estos últimos exigen tener en cuenta un elemento de referencia.
- Estos puntos de referencia pueden estar orientados (el niño, un coche, un animal,..) o pueden carecer de orientación (un balón, un bloque lógico, una farola,..), lo que determina una mayor o menor complejidad de las resoluciones de las situaciones propuestas.
- En la representación es preciso tener en cuenta la dificultad que entraña representar una situación vivida en el plano horizontal. Normalmente el referente natural es el cuerpo del propio niño, pero la situación se complica cuando intervienen otros niños u objetos orientados, ya que existen distintas posiciones según el elemento de referencia que se sobreentienda.
- En estas edades, aunque orientación espacial y geometría matemáticamente son aspectos independientes, debido a las características psicológicas del alumno, van íntimamente ligadas. No obstante deberemos atender a la geometría en todos sus aspectos.

Teniendo en cuenta todos estos aspectos se establecerán las variables didácticas que se consideren oportunas en cada momento del sistema enseñanza-aprendizaje. Entre otras, es conveniente destacar las siguientes:

- La posible existencia de puntos de referencia.

- Tipo de orientación de los puntos de referencia.
- El plano en que se plantea la situación.
- Cantidad de elementos que intervienen.
- Tipo de orientación de los elementos.
- Tipo de representación de la realidad utilizado.

Para desarrollar este apartado de las matemáticas vamos a plantear algunas actividades tipo:

### “Situaciones de aprendizaje de la vida diaria”

1ª fase: situaciones en las que interviene el propio niño, en psicomotricidad, en el patio, en representaciones teatrales,... Pueden ser en términos absolutos (cerca-lejos, arriba-abajo, delante-detrás,...) o relativos (encima de-debajo de, a la derecha de- a la izquierda de,...)

2ª fase: situaciones de clase propuestas al niño en un medio en el que no se ve inmerso desde un punto de vista espacial, en dibujos, láminas, ...

### “Circuitos”

- Materiales: material de psicomotricidad (aros, cuerdas, ...), objetos del aula, ...
- Actividad: Se organiza un circuito y se les indica a los alumnos el recorrido que han de realizar. Se comienza realizando el recorrido, cuando se ha hecho varias veces, se les pide que vayan verbalizando lo que van haciendo. Al final se quita el circuito y se les pide a los alumnos que lo representen en una hoja.

Una vez han terminado de representarlo, se pone de nuevo el circuito y cada niño coge un trabajo distinto al suyo y verifica si es correcto o qué problemas encuentra a la hora de realizar el recorrido tal y como lo ha hecho el compañero.

Variables didácticas:

- Número de elementos.
- Semejanza o parecido de los elementos que se han utilizado o si son totalmente diferentes unos de otros.
- Disposición de los mismos en el espacio.
- Si el circuito se ha quitado o permanece a la hora de la representación.

### “Cuadrículas” o “redes”

- Material: Una cuadrícula en el suelo aprovechando las baldosas, de 3x3, 3x4,...
- Actividad: Es conveniente que el alumno presencie cómo se realiza la cuadrícula, se irán verbalizando las distintas figuras geométricas que vayan apareciendo, el número de cuadrados resultantes,...

1ª fase: realizar el recorrido que la maestra le vaya indicando, siempre utilizando puntos de referencia estables. Previamente se habrá consensuado la forma de desplazarse por la misma: Pasamos de un cuadrado a otro por los lados, nunca por las esquinas o vértices del mismo. Avanzaremos de un cuadrado a otro, nunca se podrá saltar omitiendo uno,...

2ª fase: un alumno va indicando el recorrido a otro compañero.

3ª fase: Se les pide a los niños que dibujen la cuadrícula y representen un recorrido. Posteriormente pasan donde está la cuadrícula y comprueban el resultado de su trabajo.

Esta actividad se irá realizando a lo largo de todo el año, y en distintos momentos para que dominen el espacio y el vocabulario. Las distintas fases se podrán realizar seguidas si hay pocos niños, o en distintos espacios de tiempo. Así mismo, de esta actividad se pueden desarrollar otras distintas en función del criterio del profesor.

Variables didácticas:

- El número de cuadrados que contenga la cuadrícula.
- El recorrido se puede realizar recibiendo órdenes orales o siguiendo las instrucciones de un recorrido dibujado en un papel.

Otras actividades de cuadrículas:

- Trabajar la simetría (representación del producto cartesiano), dar al niño una cuadrícula con dibujos en algunas casillas y que los represente igual en otra cuadrícula en blanco.
- Establecer un cuadro de doble entrada e ir indicando al niño donde debe situar algunos objetos.

**“Poesías, cuentos, retahílas...”**

Se leen poesías, cuentos,... y se les pide que traten de dibujar en un folio las figuras que han aparecido en los relatos. Así mismo lugares, secuencias,..se dialoga sobre los resultados de sus producciones.

**“Reconocimiento de formas geométricas”**

Reconocimiento de formas por el tacto: En una bolsa se introducen figuras geométricas. El niño debe describirlas según su apreciación al tacto. Condiciones a cumplir:

- La bolsa debe ser opaca.
- Las figuras que contengan la bolsa deben ser de todo tipo: Bloques donde predomine el aspecto superficial (Poligonales, con el borde curvo, con el borde mixto: curvo y recto, ...), Tiras longitudinales rectas y curvas de distintas medidas, cuerpos de constitución volumétrica..

Otra actividad consistiría en tener dos bolsas con idénticas figuras. Un niño saca una figura y el compañero al tacto debe sacar una igual o lo más parecida posible. Se dialogará sobre la igualdad o semejanzas entre ellas.

**“Pavimentar el plano”**

- Se utilizarán distintas figuras geométricas (triángulos, cuadrados, rombos, círculos, paralelogramos, hexágonos, polígonos regulares,...).
- El niño deberá pavimentar un plano, bien con una única figura, bien con varias. Hay que tener en cuenta la medida de los lados y los ángulos. El niño deberá elegir, la condición que no se queden espacios libres.

**“La rosa evolutiva”**

- Actividad: A partir de un centro marcado por el profesor se va trabajando con grecas, cenefas, figuras geométricas alrededor de...Con ello se trabaja el movimiento circular. Al principio se trabajará en gran grupo, después en grupo medio y a continuación de forma individual.

**“Colorear frisos”**

- Dados distintos tipos de frisos: distintas formas geométricas, diferente tamaño,...
- Ir coloreando con distintos colores y según la norma que se de en cada momento.
- Por ejemplo: colorear cuadrados, a partir de uno dado, de un color diferente aquellos otros cuadrados que tengan en contacto sus lados.

## BLOQUE III: LAS MEDIDAS

La noción de magnitud se construye sobre procesos de clasificación y seriación. Partimos de un conjunto de objetos destacado uno de los atributos que definen esa magnitud.

Los sentidos nos proporcionan ciertas informaciones para apreciar estos atributos, excepto en el caso de la magnitud de tiempo. Por ejemplo, si pensamos en la magnitud o cantidad de masa, la información sensorial acerca de este atributo corresponde a la fuerza muscular que hay que realizar para sujetar objetos. Los objetos del conjunto se comparan entonces con el criterio "ser tan pesado como", que se puede materializar con el uso de una balanza de doble platillo. Si dos objetos la equilibran son equivalentes respecto a ese atributo y a partir de ahí se pueden ordenar los objetos.

Por ello el trabajo para la construcción de magnitudes va a estar jalonado de numerosas actividades de clasificación y seriación.

Las posibles etapas de una progresión en la enseñanza de magnitudes son:

- Estimación sensorial. Apreciación de magnitudes.
- Comparación directa. (sin intermediarios)
- Comparación indirecta. (con intermediarios)
- Elección de una unidad.
- Sistemas de medidas irregulares.
- Sistemas de medidas regulares.
- El sistema legal: SMD

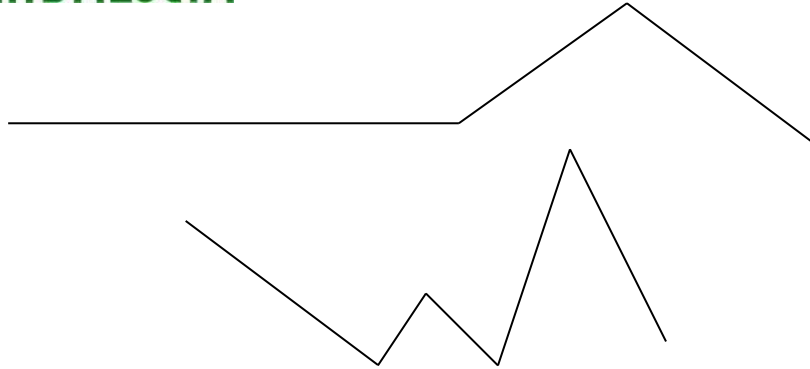
### MAGNITUD DE LONGITUD

Son tres los aspectos que hay que tener en cuenta en las dificultades que encuentra un niño para aislar la longitud.

- Los cambios de posición. Los niños evalúan la longitud en función de los extremos finales de las bandas sin tener en cuenta la posición inicial.



- Los cambios de forma. Ante cambios de formas el niño tiende a emitir juicios no determinantes para la evaluación de la longitud: la posición inicial, el número de curvas, el número de segmentos,...



- La descomposición y recomposición de una banda en partes puede provocar juicios erróneos respecto a la conservación de la longitud final.

En todo momento debe aparecer el vocabulario propio de la longitud: largo-corto, ancho-estrecho, delgado-grueso. La construcción de la magnitud de la longitud necesitará apoyarse en un sistema de formulación adecuado.

Actividades tipo:

- Clasificar bandas u otros objetos según la longitud.
- Ordenar un conjunto de bandas según la longitud.
- Comparar la estatura de los niños.
- Comparar la estatura de los niños a lo largo de todo el año.
- Dada una banda construir otra de igual longitud mediante la composición de otras bandas, iguales o no.
- Verificar, sin mover algunos objetos, si pueden caber en algunos huecos.
- Establecer ordenaciones de objetos que no puedan ordenarse directamente a partir del uso de unidades antropométricas, o bien de patrones comunes.

## MAGNITUD DE MASA

Aunque el concepto de masa y peso matemáticamente son distintos en estas edades son indistinguibles.

Las dos principales interferencias que dificultan el aislamiento de la magnitud de masa de otras informaciones perceptivas de los objetos son:

- El volumen: pesa más el que tiene más volumen.
- La descomposición y recomposición: Si partimos un trozo de plastilina en varios trozos puede que el niño entienda que la masa resultante no es la misma.

Actividades tipo:

- Sopesar, utilizando las manos como platillo de una balanza, objetos para averiguar cuál es más pesado
- Utilizar la balanza de doble platillo dando significación a las distintas posiciones que presente: equilibrada o no.

- Utilizar la balanza para comprobar comparaciones realizadas con las manos.
- Ordenar conjuntos de más de tres objetos en función de su masa, bien sopesando con los brazos o utilizando la balanza.
- Equilibrar un objeto con varios objetos, o bien con bolas de plastilina o arcilla fabricadas al efecto.

## MAGNITUD DE CAPACIDAD

Se trata, junto con la longitud, la superficie y el volumen de una magnitud espacial. Físicamente no presenta diferencias con el volumen, pero sus modelizaciones matemáticas son muy distintas:

- La capacidad es una magnitud lineal.
- El volumen es una magnitud trilineal.

Dispone además de un procedimiento de comparación directa muy elemental: trasvasado de líquidos entre recipientes.

Las principales interferencias que dificultan el aislamiento de la capacidad de otras informaciones perceptivas de los objetos son:

- La forma: ante dos recipientes de la misma forma es habitual evaluar la capacidad por la altura.
- La descomposición y recomposición: si se reparte el contenido de un recipiente en dos puede que el niño entienda que el líquido resultante ya no es el mismo.

Actividades tipo:

- Clasificar recipientes, localizando aquellos que tienen la misma capacidad, a partir del trasvase de líquidos.
- Comprobar, mediante el trasvasado de líquidos, las estimaciones de las comparaciones de las capacidades de distintos recipientes.
- Ordena conjuntos de más de 3 recipientes en función de su capacidad.
- Llena recipientes sirviéndose de otros más pequeños contando el número de veces que se ha necesitado el recipiente pequeño para llenar cada uno de ellos.
- Realizar comparaciones indirectas a partir del marcado de algún recipiente transparente.

## MAGNITUD DE TIEMPO

En esta magnitud es imposible la percepción sensorial; sin embargo, es la que manejamos con más asiduidad (estamos rodeados de instrumentos de medida de tiempo: relojes)

Los trabajos de la magnitud de tiempo en infantil deben organizarse en torno a dos aspectos:

- La noción de duración.
- Los sistemas convencionales de medida del tiempo.

Actividades tipo:

- Comparar la duración de desplazamientos de cochecitos u otros objetos que se desplacen.
- Comparar duraciones de movimientos que no supongan un desplazamiento lineal (peonza), o sucesos que no dejen traza.
- Comparar duraciones de intervalos sonoros (canciones, sonidos cortos,...)
- Comparar duraciones de tareas cotidianas correspondientes a los intervalos de mañana, tarde y noche dentro del ciclo diario.

- Representación de rutinas diarias de manera que permitan localizar otros acontecimientos en relación con ellas.
- Representación de las rutinas semanales de manera que permitan localizar otros acontecimientos en relación con ellos.
- Identificar algunos acontecimientos de su entorno próximo que tengan un ciclo anual.
- Situar esos acontecimientos anuales en relación con ciertas partes del año (las estaciones)
- Identificación de acciones cuyas duraciones puedan relacionarse con las distintas unidades convencionales como día, semana, mes y año.
- Construcción de una hoja de un mes del calendario, reparando en la estructura de la disposición de los números/días.

## SISTEMA DE NUMERACIÓN DECIMAL

### □ Descomposición de números:

- Desde el principio y a lo largo de toda la Educación Primaria, se asociarán los mismos colores a los distintos órdenes de unidades. Así:

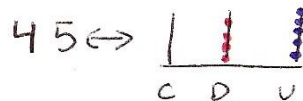
| Abreviatura | Órdenes de unidades | Color a emplear |
|-------------|---------------------|-----------------|
| U           | Unidades            | Azul            |
| D           | Decenas             | Rojo            |
| C           | Centenas            | Verde           |
| UM          | Unidades de millar  | Azul            |
| DM          | Decenas de millar   | Rojo            |
| CM          | Centenas de millar  | Verde           |
| UMM         | Unidades de millón  | Azul            |
| DMM         | Decenas de millón   | Rojo            |
| CMM         | Centenas de millón  | Verde           |

- Se recomienda que al principio se insista en el trabajo manipulativo para ayudar a que el alumno y la alumna asimile muy bien el concepto de Decena. Esto es fundamental, porque si este paso no se comprende bien por parte de nuestros alumnos y alumnas, será imposible que después entienda el concepto de Centenas, Unidades de millar, Decenas de millar, etc.
- También procuraremos cuando empecemos a trabajar con números que tengan Unidades y Decenas solamente, combinar en la libreta la presentación de tales números con regletas y ábacos. Una vez que pasemos a las Centenas, ya sólo usaremos ábacos.
- A continuación se detalla una batería de ejercicios fundamentales para trabajar el aprendizaje de la descomposición numérica:
  - a) Representar un número con regletas y viceversa (esto sólo con números que no pasen de Unidades y Decenas)



Se usarán rayas a partir de números con más de 2 decenas

b) Representar un número con ábacos y viceversa.



c) Descomponer un número según el valor de cada cifra y viceversa.

$$345 \rightarrow 3C + 4D + 5U$$

d) Descomponer un número en forma de suma de unidades y viceversa.

$$345 \rightarrow 300 + 40 + 5$$

e) Desglosar cada una de las cifras de un número en el valor de los distintos órdenes de unidades.

$$345 \rightarrow 3C = 30D = 300U$$

$$4D = 40U$$

$$5U$$

➤ Se trabajarán semanalmente todos estos conceptos durante toda la Educación Primaria. Esto favorecerá otros aspectos matemáticos como el paso de unidades de medida de capacidad, peso, longitud, etc.

□ La **lectura y escritura de números** se trabajará semanalmente en toda la Primaria de forma sistemática mediante *dictados*.

### □ Ordenación y representación numérica

- Los números naturales se presentan por *familias*, trabajando con *ábacos*, regletas y la recta numérica.
- Se trabajarán ejercicios de *anterior y posterior* y de *seriaciones* progresivas y regresivas comenzando por contar hacia delante o hacia atrás, después se le introduce la recta numérica para realizar "saltos", y finalmente se hacen a través de la suma o resta.
- Es conveniente habituar al alumnado cuando se ordenan números en el uso de los *símbolos* <, >, = en todos los niveles y conjuntos numéricos. Para ayudar a relacionar el símbolo con su significado se puede indicar que en el símbolo la zona más abierta, grande, separada, se pone junto al número mayor y la zona más cerrada, pequeña junto al menor.

### □ Aproximación numérica

- Se trabajará el truncamiento y el redondeo, aunque se debe afianzar y hacer más hincapié en éste último. Un método inicial de trabajo puede ser subrayar hasta el orden que se indique en la aproximación, escribir las dos opciones, comprobar el orden siguiente para poder elegir la opción correcta. También se puede utilizar la recta numérica seleccionando hasta el orden que nos interese.

### □ Números romanos

- Se trabajan a partir de 4º de E. Primaria, y se propone realizar dictados que incluyan esta clase de números para afianzar su conocimiento.

### □ Múltiplos y divisores

- Estos contenidos se introducen en 6º de forma que se debe partir de contextos significativos y próximos al alumnado, manejando números pequeños que permitan el cálculo sencillo y una representación mental de los procesos.
- El concepto de múltiplo se puede poner en relación con el de las tablas de multiplicar, estableciendo el paralelismo de "ser múltiplo de" con el de ser "estar en la tabla de".

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- El concepto de mínimo común múltiplo se hace como una aproximación experimental e intuitiva, desarrollando los múltiplos de varios números y buscando el menor de los comunes.
  - El concepto de divisor debe surgir de actividades de experimentación de repartos en partes iguales, destacando que buscar divisores de un número es también buscar parejas de números cuyo producto sea ese número, para así facilitar su comprensión.
  - Es importante hacer ver al alumno la relación entre "ser múltiplo de" y "ser divisible por", lo que permite introducir algunos criterios de divisibilidad que el alumnado puede buscar de forma experimentalmente, como los criterios del 2, 5, 10.
  - También se introduce el concepto de número primo y compuesto, que se debe introducir de forma manipulativa formando grupos iguales a partir de un primo para descubrir que sólo es posible formar grupos de una unidad o un grupo con de todo junto. Es conveniente hacer memorizar a alumno/a los primeros números primos hasta el 19.
- **Números decimales**
- Se iniciará su trabajo manipulativamente presentando estos números como parte de la unidad y construyendo los distintos órdenes: décima, centésima y milésima.
  - Es importante apoyar la presentación teórica con situaciones que ya ha usado el alumno como la lectura del termómetro médico (décimas), manejo de cantidades de dinero (céntimos), mediciones de longitudes (centímetros-centésimas...).
  - Es necesario ampliar el Sistema de Numeración Decimal con los órdenes de unidades decimales, hasta la milésima, revisando en estos órdenes los procedimientos empleados con los números naturales: establecimiento de equivalencias entre unidades, descomposición de un número según los órdenes de unidades y según el valor posicional de sus cifras, paso de un lugar a otro, representación en el ábaco, en la recta numérica y la lectura correcta de los números.
  - Para la comparación y ordenación de números decimales se pueden seguir varios métodos:
    - Colocar los números en columna, haciendo coincidir los órdenes de unidades para la comparación.
    - Igualar los números en cifras decimales, añadiendo ceros, para su comparación.
  - El trabajo sobre la aproximación de números decimales será de utilidad práctica a la hora de valorar resultados de la calculadora, redondear cantidades de dinero...
- **Números negativos**
- Se debe plantear la utilización de estos números como un código para representar situaciones en las que los números naturales resultan insuficientes, ejemplificando situaciones reales como temperatura por encima y debajo de cero, una cuenta corriente con números rojos o en positivo, plantas por debajo de la entrada de un edificio, altitud con referencia al nivel del mar, acontecimientos anteriores o posteriores al nacimiento de Cristo, puntos en determinadas competiciones deportivas...
  - La recta numérica es un instrumento básico para el trabajo con los números positivos y negativos, para su comparación, ordenación, representación de operaciones de suma y resta.
- **Proporcionalidad y porcentaje**
- Estos conceptos se introducen en 6º con el objetivo de construirlos dentro de situaciones muy sencillas, con operaciones próximas al cálculo mental para que el rango numérico no aporte dificultades añadidas.
  - La proporcionalidad se trabaja con tablas usando ejemplos sencillos de relaciones entre dos magnitudes directamente proporcionales o no proporcionales de situaciones cercanas al alumnado.
  - La proporcionalidad directa se trabaja por el método de reducción a la unidad que permite conocer el valor de cualquier otra cantidad, potenciando el uso de estrategias que permitan al alumnado razonar lo que está haciendo, huyendo de la simple mecánica... También se introduce al alumnado el automatismo de la regla de tres.
  - Los porcentajes se trabajan partiendo del conocimiento del alumnado sobre fracciones, números decimales y sus operaciones. Se deben presentar de forma manipulativa y gráfica, mostrando la relación entre el total, la parte que se toma del total y el tanto por ciento.

## OPERACIONES

### SUMA

- ❑ Se procurará poner siempre el *signo a la derecha* en las sumas verticales, porque es desde la derecha desde donde se empieza a sumar.
- ❑ Es importante que el alumno se aprenda la *nomenclatura* de los términos de la suma: sumandos, suma. Se puede afianzar estos conceptos en los dictados numéricos.
- ❑ En las sumas horizontales seguiremos un *orden lógico*, es decir: U+U, D+U, D+D y U+D. Así, iremos presentando este tipo de sumas en orden de dificultad. Utilizaremos en un principio el lápiz bicolor, pintando de azul las unidades y de rojo las decenas.
- ❑ Igualmente para las sumas verticales utilizaremos en un principio el lápiz bicolor, pintando de azul las unidades y de rojo las decenas. De esta forma, se podrá apreciar la *descomposición de los números* a lo largo de la operación.
- ❑ Alternaremos el uso de sumas verticales y horizontales.
- ❑ En el proceso de la **suma sin llevada**, se procurará que el alumno interiorice un sumando y cuente el siguiente, aunque este proceso tendrá dos variantes en función del alumnado con el que trabajemos. Esto es:
  - Para niños que les cueste, que *interioricen el número superior* siempre y cuenten el de debajo.
  - Para niños más ágiles mentalmente, que *interioricen el número mayor* y cuenten el menor.
  - Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 6 \\ + 3 \\ \hline 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 12 \\ + 13 \\ \hline 25 \end{array}$$

- ❑ Para iniciarlos y ayudarlos a interiorizar el concepto de *formación de números* sobre la base de U, D y C, mostraremos paso a paso en las **sumas con llevada** verticales el resultado final ayudándonos con el lápiz bicolor.
- ❑ En cuanto a los *pasos* para presentar la suma vertical con llevadas, serían los siguientes:
  - Se suman las unidades. Si nos pasamos a la decena, escribiremos el número de decena encima de las decenas con números más pequeños.
  - A continuación se suman las decenas de la cuenta y la decena resultante de haber sumado las unidades. Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 1 \\ 18 \\ + 14 \\ \hline 32 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 26 \\ + 35 \\ \hline 61 \end{array}$$

- ❑ Se trabajarán las propiedades conmutativa y asociativa de la suma comenzando siempre con ejemplos prácticos para terminar en el tercer ciclo con fórmulas que los inicien a trabajar con letras. Para trabajar la interiorización de forma habitual se puede aprovechar las actividades de cálculo mental con casos de aplicación de las propiedades.

- En la suma o resta de *números decimales* se pondrá mucho énfasis en la correcta colocación de los sumandos o restandos, de forma que todas las comas queden alineadas, si es una suma vertical, o que sumamos o restamos los mismos órdenes si es horizontal.

## RESTA

- Empezaremos con sumas a las que les falten sumandos. Esto es muy útil para interiorizar el concepto de *reversibilidad de la suma*; un concepto éste que no se trabaja a menudo. No debe ser por ejemplo que a 8 le quito 5, sino que de 5 a 8 van 3.
- Se procurará poner siempre el *signo a la derecha* en las restas verticales, porque es desde la derecha desde donde se empieza a restar.
- En las restas horizontales se usa el lápiz bicolor en un principio y se *irá* del menor al mayor. Esto requiere que el niño interiorice el número menor y cuente hasta llegar al mayor.
- Para las **restas verticales sin llevada** utilizaremos en un principio el lápiz bicolor, pintando de azul las unidades y de rojo las decenas. A la hora de realizarlas, se irá de abajo arriba, interiorizando el número inferior y contando hasta llegar al superior.

Ejemplos:

$$9 - 6 = 3$$

$$18 - 15 = 3$$

$$\begin{array}{r} 15 \\ - 12 \\ \hline 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 26 \\ - 15 \\ \hline 11 \end{array}$$

- Alternaremos el uso de restas verticales y horizontales.
- Es importante que el alumno se aprenda la *nomenclatura* de los términos de la resta: minuendo, sustraendo y diferencia. Se puede afianzar los conceptos con dictados numéricos.
- En las **restas con llevada** también utilizaremos en un principio el lápiz bicolor, pintando de azul las unidades y de rojo las decenas. Esto facilita la asimilación del concepto de *formación de números*.
- En cuanto a la *mecánica* a seguir para estas restas, hay multitud de ellas. Algunas puede que sean mucho más lógicas que la elegida por nuestro centro, pero por comodidad, facilidad y limpieza, nosotros creemos que esta es la mejor. El proceso es el siguiente:
  - Se cuenta de la unidad del sustraendo a la unidad del minuendo.
  - Al sobrepasar la decena, colocaremos un *unito* ("me llevo una") al lado de la decena del sustraendo y la unidad resultante debajo de las unidades.
  - Se añade el *unito* a la decena del sustraendo y se cuenta hasta la decena del minuendo.
  - Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 21 \\ - 12 \\ \hline 09 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ - 19 \\ \hline 16 \end{array}$$

## MULTIPLICACIÓN

### □ Multiplicaciones por una cifra

- Se procurará poner siempre el *signo a la izquierda* en las multiplicaciones verticales
- Insistiremos en la idea de que las multiplicaciones son *sumas repetidas*. De esta forma, el alumno entenderá rápidamente el porqué de la multiplicación y podrá aplicar este concepto en la resolución de problemas de forma rápida.
- Alternaremos el uso de multiplicaciones verticales con horizontales sencillas.
- Para las multiplicaciones verticales pondremos encima del factor superior lo que *nos llevamos* mientras hacemos la multiplicación.
- Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 21 \\ \times 2 \\ \hline 42 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 35 \\ \times 6 \\ \hline 150 \end{array}$$

### □ Multiplicaciones por dos o más cifras

- Se procurará poner siempre el *signo a la izquierda*.
- En estas multiplicaciones, en los resultados que sumaremos después, iremos poniendo un punto debajo de la cifra del factor inferior ya multiplicado, para que los alumnos no ocupen ese lugar en las posteriores multiplicaciones.
- Muchas veces, al acabar de multiplicar el primer dígito del factor inferior han quedado las *llevadas* encima de los dígitos del factor superior. Es muy importante insistir en que hay que borrar esas *llevadas* para que no molesten en las multiplicaciones sucesivas (y por cuestión de limpieza y presentación).
- Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 223 \\ \times 22 \\ \hline 446 \\ 446 \cdot + \\ \hline 4906 \end{array}$$

### □ Multiplicaciones con ceros

- Se procurará poner siempre el *signo a la izquierda*.
- Si en la multiplicación se observa la presencia de ceros al final del factor superior o inferior, o ambos a la vez, se ignorarán en el desarrollo de la cuenta. Éstos serán añadidos al final del resultado tras acabar de multiplicar el resto de las cifras.
- Si en la multiplicación se observa la presencia de ceros en medio del factor inferior, se ignorarán en el desarrollo de la cuenta. Para que no sean multiplicados, se colocará un punto debajo del cero y se pasará a la multiplicación del siguiente dígito del factor inferior.

□ Ejemplos:

$$\begin{array}{r} 220 \\ \times 20 \\ \hline 44 \end{array} \rightarrow \begin{array}{r} 220 \\ \times 20 \\ \hline 4400 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1234 \\ \times 102 \\ \hline 2468 \\ + 1234 \cdot \cdot \\ \hline 125868 \end{array}$$

□ **Potencias**

- Se introduce como expresión abreviada de un producto de factores iguales, destacando en esta etapa el aprendizaje de la lectura, escritura y concepto de potencias trabajando con las más usuales: cuadrados, cubos y potencias de base diez.
- Hay que resaltar la diferenciación entre el factor que se repite y las veces que lo hace, facilita el trabajo con los términos de la potencia.
- El trabajo con cuadrados y cubos debe hacerse desde un aspecto numérico y también geométrico, para así favorecer la comprensión de superficies y volúmenes.
- Se introduce el punto como signo equivalente al aspa para expresar multiplicaciones.
- El trabajo con potencias de base diez facilita la expresión de grandes cantidades o la descomposición de número grandes.

□ **Multiplicación de decimales**

- El algoritmo es, esencialmente igual al de la multiplicación de enteros, atendiendo como aprendizaje nuevo, a la colocación de la coma decimal en el producto o resultado, lo que se justifica indicando la necesidad de colocar las cifras decimales de los productos parciales según los distintos órdenes de unidades.

## DIVISIÓN

□ **Divisiones con una cifra en el cociente**

- Insistiremos en la idea de que las divisiones son *repartos en partes iguales*. De esta forma, el alumno entenderá rápidamente el porqué de la división y podrá aplicar este concepto en la resolución de problemas de forma rápida.
- Será muy importante explicarles lo que es cada elemento de la división poniendo numerosos *ejemplos de la vida cotidiana*. Por ejemplo: que el dividendo es lo que se reparte, el divisor entre cuántos se reparte, el cociente cuánto le toca a cada uno, y que el resto es lo que nos sobra. Así, el alumno asimilará rápidamente después el *concepto de reversibilidad* división / multiplicación en la prueba.
- Alternaremos el uso de divisiones verticales con horizontales sencillas.
- En cuanto a la mecánica de la división, se insistirá al alumno en que se *busca* un número (del dividendo) en una tabla (el divisor) *sin colarnos*, se *resta* el número encontrado al que teníamos, y se *baja* el siguiente número del dividendo.
- En un principio, iremos apuntando en la cuenta esas *restas*, sólo hasta que el alumno sea capaz de realizar esta operación mentalmente sin error. Esta *ayuda* no debería alargarse más allá del primer trimestre de 4º de Educación Primaria.
- Es muy importante que el alumno se aprenda la nomenclatura de los términos de la división (Dividendo, divisor, cociente y resto). Ya que esto será de una gran ayuda a la hora de aprender a realizar la prueba de la división.
- En la prueba de la división mostraremos siempre que sea posible el desarrollo de la fórmula:  $c \times d + r = D$ .
- A la vez que se les muestra a los alumnos como se realiza la prueba de la división, se les inculcará el *concepto de reversibilidad* entre división y multiplicación. Así, los alumnos entenderán que estas dos operaciones son totalmente complementarias, al igual que lo son la suma y la resta.

➤ Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \overline{)567} \quad | \quad 2 \\ 4- \\ \hline 16 \\ 16- \\ \hline 07 \\ 6- \\ \hline 1 \end{array}$$

$$c \times d + r = D$$

$$\begin{array}{r} \overline{)283} \\ \times 2 \\ \hline 566 \\ 1+ \\ \hline 567 \end{array}$$

## □ Divisiones con dos cifras en el cociente

- Partiendo del hecho de que se han asimilado todos los conceptos básicos en la fase de división por una cifra, explicamos solamente la mecánica.
- Cuando se *busque* un número, lo haremos mediante la aproximación de la decena del divisor. Así, si por ejemplo buscamos el número 124 entre 25, la aproximación de la decena del divisor sería 6 ( $2 \times 6 = 12$ ).
- Las multiplicaciones necesarias para averiguar el dígito del cociente se realizarán aparte. Intentaremos *convencer* al alumno una vez ya iniciado éste en la mecánica de la división, de la comodidad de realizar tales multiplicaciones mentalmente. Así, se ahorrará tener que escribir tales multiplicaciones.
- En un principio, iremos apuntando en la cuenta las *restas*, sólo hasta que el alumno/a sea capaz de realizar esta operación mentalmente sin error. Esta *ayuda* no debería alargarse más allá del primer trimestre de 5º de Educación Primaria.
- Es muy importante que el alumno utilice con soltura la nomenclatura de los términos de la división (Dividendo, divisor, cociente y resto).
  - Ejemplo:

$$\begin{array}{r} \overline{)1236} \quad | \quad 11 \\ 11- \\ \hline 13 \\ 11- \\ \hline 26 \\ 22- \\ \hline 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 1 \\ \hline 11 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 11 \\ \times 2 \\ \hline 22 \end{array}$$

## □ Divisiones de números acabados en ceros por unidades seguidas de ceros

- En este tipo de divisiones, hay que hacer un hincapié especial en que sólo se pueden quitar *ceros unidades* en el dividendo con *ceros unidades* en el divisor, *ceros decenas* con *ceros decenas*, y así sucesivamente. Si no recalamos este concepto, corremos el riesgo de que en el futuro, cuando el alumno se encuentre con un dividendo no acabado en cero y el divisor sí o viceversa, empiece a quitar o eliminar dígitos como si de ceros se tratase.

- Ejemplo:

$$\begin{array}{l} 16 \emptyset \emptyset : 1 \emptyset \emptyset = 16 \\ 320 \emptyset \emptyset : 1 \emptyset \emptyset = 320 \end{array}$$

## □ Divisiones con decimales

- Se inicia en 5º el *cociente decimal de dos números enteros* (sacar decimales), cuyo algoritmo se justifica extendiendo a los órdenes de unidades decimales el mismo razonamiento que se siguen con los enteros:
  - Se realiza la división de enteros.
  - Las unidades del resto se transforman en décimas (añadiendo o bajando un cero) y ese reparto de décimas arroja décimas al cociente, etc.
- La división de un *decimal entre un entero* sigue el mismo razonamiento anterior. La mecánica puede realizarse con el mismo sistema que la multiplicación (poner la coma en el cociente al final de la división según las cifras decimales del dividendo) en aquellos casos en los que haya dificultades.
- En la división de un *entero por un decimal* haremos ver al alumno que debe transformar la división en otra equivalente que tenga divisor entero y es conveniente que hagamos que los alumnos interioricen la propiedad que justifica el algoritmo: al multiplicar el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía. Para ello se pueden poner ejemplos muy sencillos que se puedan resolver mentalmente y que afiancen este concepto.
- En la división de un *decimal por otro decimal* se seguirá el mismo razonamiento anterior, y para evitar errores se pondrán distintos ejemplos que recorran la casuística del proceso:
  - En el dividendo hay más/ igual/ menos cifras decimales que en el divisor.
  - El dividendo es mayor/ menor que el divisor.

## □ Fracciones

- La introducción de las fracciones se realiza en 4º a través de situaciones de la vida cotidiana, de naturaleza espacial, en las que es necesario el uso de partes de un todo para expresar...la capacidad de un recipiente, las porciones de una unidad, lo que queda de una chocolatina...y así surgirán conceptos como mitad, tercio, cuarta parte, etc.
- Las representaciones gráficas son imprescindibles en el trabajo con fracciones para introducir el concepto de *fracción como parte de un todo*, partes iguales en las que se divide la unidad y la identificación de sus términos: numerador y denominador. Es fundamental que el alumno asimile que todas las partes deben ser iguales en tamaño y que la suma de las partes debe ser igual al todo (la unidad).
- El concepto de *fracción como cociente exacto* de dos números conecta al alumno con la división y con los números decimales y le permite calcular el valor decimal de una fracción.
- En cuanto al concepto de *fracción de una cantidad* supone que una fracción es un subconjunto de un conjunto de objetos discretos, y por tanto, este conjunto es susceptible de ser dividido en partes iguales, de forma que, en cada parte haya el mismo número de objetos y que la suma de todos ellos nos permita reconstruir el conjunto inicial.
- La *comparación y ordenación* de fracciones se iniciará con fracciones de igual denominador, después con igual numerador y por último fracciones cualesquiera. Siempre se partirá de la representación gráfica para una mejor comprensión. Las fracciones mayores a la unidad presentan dificultades para los alumnos y por eso debemos poner suficientes ejemplos para que asimilen que una sola fracción puede representar más de una unidad.

- El concepto de *fracción equivalente* se introduce en 5º y es fundamental para poder trabajar en los siguientes niveles la comparación y la ordenación de fracciones con términos distintos, y poder sumar y restar fracciones de distinto denominador. Es importante insistir en la representación gráfica de fracciones equivalentes como método de comprobación de la equivalencia para que posteriormente al alumno le podamos plantear actividades encaminadas a descubrir regularidades numéricas entre pares de fracciones equivalentes. Trabajaremos la obtención de fracciones equivalentes por amplificación o por simplificación aplicando la propiedad fundamental de las fracciones.
- La aplicación fundamental de las operaciones con fracciones se produce en el campo de la medida y sobre todo con fracciones fáciles por lo que en estos niveles se trabajaremos mecanismos que permitan un cálculo rápido y sencillo.
  - Las operaciones con fracciones se inicia en 5º con la suma y resta de fracciones con igual denominador y situaciones gráficas y simples facilitan al alumno la deducción del automatismo. La manipulación de figuras geométricas recortadas en cartulina (cuadrados, círculos...) y con distintas divisiones de la unidad (en 3, 4, 5...partes iguales) pueden ayudar a la realización de sumas y restas de forma experimental.
  - La suma y resta de fracciones con distinto denominador se desarrollará a partir de la búsqueda de fracciones equivalentes que permitan al alumno convertir la operación en una suma o resta de fracciones de igual denominador.
  - La multiplicación y la división de fracciones resultan difíciles de comprender para el alumnado de estas edades por lo que nos centraremos en que dominen su práctica y lo manejen con soltura.

## LA MEDIDA: ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DE MAGNITUDES

- ❑ En un primer momento, en el primer ciclo de E. Primaria, para el estudio de los conceptos relacionados con la medida se deberá trabajar de forma experimental mediante la realización de mediciones de longitudes, capacidades y masas. En primer lugar se iniciará, por ejemplo la medida de longitud, con *unidades corporales* (dedos, palmo, pie, pasos) y posteriormente con *unidades arbitrarias* (lápiz, folio, libro...), poniendo al alumnado en situación de que descubran la necesidad de utilizar unas medidas convencionales aceptadas y utilizadas por todos. En este ciclo las unidades de medida de tiempo las introduciremos precedidas del establecimiento de relaciones temporales como antes, después, ahora, ayer, etc., imprescindibles para poder acostumbrar al alumnado al manejo del calendario y del reloj. Además se estudiará el euro y los céntimos de forma muy manipulativa.
- ❑ Es fundamental enfrentar a nuestros alumnos/as a situaciones que impliquen la realización de mediciones directas con la consiguiente necesidad de utilizar *instrumentos* y unidades de medida oportunos que permitan expresar el resultado y realizar comparaciones de medidas.
- ❑ El estudio de todos estos conceptos debe tener como finalidad su aplicación a la resolución de problemas concretos, ambientados en su vida cotidiana, para así iniciarlos en el desarrollo de la capacidad de estimar resultados relacionados con ella.
- ❑ Después de la experimentación del ciclo anterior, en el segundo ciclo de E. Primaria se desarrolla la necesidad de medir y de expresar la medición con *unidades convencionales*, fomentando la utilización de los instrumentos de medida (regla graduada, reloj, etc.) con más seguridad y precisión, para poder expresar los resultados de un modo más ajustado. Se introducen, además, unidades de medida convencionales no utilizadas hasta ahora, tales como los múltiplos y submúltiplos del metro y otras unidades de peso.
- ❑ Se seguirá destacando la importancia de las estimaciones puesto que ayudan a nuestros escolares a adquirir una idea del tamaño de las unidades y de los objetos de uso corriente. La medida de superficies se introduce mediante el uso de cuadrícula y de tramas de diferentes tamaños. Las monedas de euro se trabajan para contar, agrupar, establecer equivalencias y materializar conceptos numéricos.

- ❑ En el tercer ciclo seguiremos profundizando en el Sistema Métrico Decimal incrementando la capacidad de medir con la realización de transformaciones de unas unidades a otras de la misma magnitud, utilizando también los números decimales, que favorecen el uso de las unidades de medida más adecuadas en cada situación.
- ❑ En este ciclo, además de completar el estudio de todas las unidades de medida de longitud, capacidad, y masa, se introducen unidades convencionales de medida de superficies y se inicia el estudio de la medida de volumen. También se sigue profundizando en el trabajo con monedas de euro y se realizan operaciones para medir el tiempo.

## GEOMETRÍA

- ❑ Se debe enlazar lo que es la geometría con la situación en el espacio siempre que se trabajen estos aspectos.
- ❑ En un primer momento, en el primer ciclo de E. Primaria, para el estudio de los conceptos geométricos, se deberá empezar siempre tomando la realidad como punto de partida, reconociendo cuerpos y formas geométricas en los objetos familiares del entorno. Previamente a este trabajo, se establecerán las relaciones espaciales básicas tales como *arriba/abajo, derecha/izquierda, dentro/fuera, interior/exterior, etc.*
- ❑ A través de estos objetos, se reconocen e identifican las principales formas (cuadrados, círculos, triángulos) y cuerpo geométricos (cubos, esferas, etc.), y se realizan composiciones y descomposiciones de figuras planas. Así no sólo se desarrollarán las capacidades de comprensión, representación y orientación espacial, sino también las de organizar y describir desplazamientos propios o de objetos, buscando puntos de referencia que ayuden a ello.
- ❑ Tal trabajo de observación se complementará en el segundo ciclo con el de experimentación mediante el trabajo manipulativo y de construcción para que, en primer lugar, identifiquen modelos geométricos en la realidad física; y posteriormente, se pase al estudio y análisis de los cuerpos y formas, comparándolos y clasificándolos según diversos criterios. Así se pone de nuevo de manifiesto la estrecha relación existente entre espacio y plano.
- ❑ En este ciclo, ya se adquiere un mayor dominio de los instrumentos de dibujo para realizar croquis de itinerarios, planos, etc., y para construir y explorar formas geométricas, contribuyendo así a desarrollar la comprensión y representación espacial, así como el gusto por la precisión y buena presentación de los trabajos geométricos.
- ❑ Si en el primer ciclo hablábamos de observación y en el segundo de experimentación a través del trabajo manipulativo y de construcción, en el tercer ciclo seguiremos trabajando tales aspectos para, en un mayor grado de abstracción y complejidad, seguir identificando modelos geométricos en la realidad física y pasar después al estudio y análisis de los cuerpos y formas más detalladamente, comparándolos y clasificándolos según diversos criterios, para poner de manifiesto de nuevo la estrecha relación entre el espacio y el plano.
- ❑ Es en este tercer ciclo cuando ya se introducen elementos nuevos que permiten profundizar en el estudio y el análisis (lados, ángulos, vértices, aristas...) y se introducen además sistemas de referencia (coordenadas cartesianas) para describir e interpretar itinerarios y recorridos, desplazamientos y giros.
- ❑ Esto permitirá reconocer e identificar cuerpos y formas geométricas sencillas desde perspectivas diferentes, establecer relaciones entre ellos y sus elementos (superficies, lados, diagonales, radio y diámetro, etc.) y representar formas y construir diversos cuerpos.
- ❑ Como en el resto de aspectos de las matemáticas, el trabajo manipulativo y la observación directa serán los ejes que determinen nuestra actuación para, no sólo facilitar la comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos, sino también para motivar al alumnado en esta área.

## TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN. ESTADÍSTICA, AZAR Y PROBABILIDAD

Actualmente la Estadística se ha incorporado en forma generalizada al currículo de las Matemáticas en todos los niveles educativos de todos los países desarrollados y en la mayor parte de los en vías de desarrollo. Este hecho ha influido en el avance curricular de la Estadística en la escuela.

El trabajo con Estadística y Probabilidad en la escuela es relevante porque permite que el estudiante desarrolle su capacidad de recolectar, organizar, interpretar y comparar datos para obtener y fundamentar conclusiones (desarrollo de un pensamiento estadístico), posibilitando el desarrollo de análisis críticos sobre diferentes aspectos sociales, económicos, políticos, a la par que posibilita el desarrollo de habilidades cognitivas y afectivas.

En nuestro Centro, tras la realización de las Pruebas de Diagnóstico correspondientes al curso escolar 2008/2009, se ha planteado la importancia de acercar en mayor grado la Estadística a la escuela a través de su implementación en el currículo. Esto obedece a una necesidad en la educación de nuestros futuros ciudadanos, ya que en los últimos años se ha comprendido la necesidad de formar estudiantes con capacidades para interactuar en un mundo de información; en un mundo competitivo, que requiere capacidades para leer y producir información, sea esta gráfica o simbólica y en donde los fenómenos aleatorios aparecen con frecuencia.

La Estadística en la escuela supone la formación de una nueva manera de razonar, una mayor relación con la recolección de datos empíricos, una mayor búsqueda de evidencias que sustituyen a la especulación simple sin fundamentos.

Pero aún en la esfera personal, la Estadística en la escuela significa el encuentro de maestros y aprendices para formar actitudes nuevas frente a la realidad, siendo esto enriquecedor desde todo punto de vista. Podemos convertir la Escuela, con la Estadística en ella, en un espacio de reflexión y en una base para la investigación. La discusión en grupo para elaborar encuestas, agrupar los datos, analizar los resultados, va a permitir desarrollar en los alumnos su capacidad de juicio crítico, la expresión de sus ideas y opiniones personales contando con datos reales para defender sus puntos de vista. El desarrollo de esa capacidad de enjuiciar con criterios propios también ha de realizarse respecto de la información estadística, del uso demagógico que se puede hacer de unos datos.

Los contenidos de azar y probabilidad pretenden que mediante el juego se analicen, progresivamente con mayor detalle, los comportamientos de los fenómenos aleatorios y se cree un vocabulario que permita comunicar sencillas experiencias de azar y la comprensión de que el azar está regido por algunas leyes.

La asignación de probabilidad se hará exclusivamente en casos sencillos adscritos a sucesos elementales. Los elementos generadores de azar son de uso común: parchís, oca, bingo casero... Cuando los niños juegan, evalúan –consciente o inconscientemente– la posibilidad de que se produzcan determinados resultados o situaciones, por ello, los contenidos de este bloque permitirán que las destrezas numéricas (fracciones, decimales...) se consoliden en un contexto atrayente de resolución de juegos y problemas.

A continuación se adjuntan aportaciones de distintos pedagogos sobre la importancia del tema:

- **Holmes (1980)**. La Estadística es una parte de la educación general deseable para los futuros ciudadanos adultos, quienes precisan adquirir la capacidad de lectura e interpretación de tablas y gráficos estadísticos que con frecuencia aparecen en los medios informativos. Para orientarse en el mundo actual, ligado por las telecomunicaciones e interdependiente social, económica y políticamente, es preciso interpretar una amplia gama de información sobre los temas más variados.

Es un útil para la vida posterior, ya que en muchas profesiones se precisan unos conocimientos básicos del tema. La Estadística es indispensable en el estudio los fenómenos complejos, en los que hay que comenzar por definir el objeto de estudio, y las variables relevantes, tomar datos de las mismas, interpretarlos y analizarlos.

- **Ottaviani (1998)**. Su estudio ayuda al desarrollo personal, fomentando un razonamiento crítico, basado en la valoración de la evidencia objetiva; hemos de ser capaces de usar los datos cuantitativos para controlar nuestros juicios e interpretar los de los demás; es importante adquirir un sentido de los métodos y razonamientos que permiten transformar estos datos para resolver problemas de decisión y efectuar predicciones.

Ayuda a comprender otros temas del currículo, tanto de la educación obligatoria como posterior, donde con frecuencia aparecen gráficos, resúmenes o conceptos estadísticos.

- **Begg (1997)**. Señala que la Estadística es un buen vehículo para alcanzar las capacidades de comunicación, tratamiento de la información, resolución de problemas, uso de computadoras y trabajo cooperativo y en grupo, a las que se da gran importancia en los nuevos currículos. Además, la probabilidad y la Estadística se pueden aplicar fácilmente, puesto que no requieren técnicas matemáticas complicadas. Sus aplicaciones, proporcionan una buena oportunidad para mostrar a los estudiantes la utilidad de la matemática para resolver problemas reales, siempre que su enseñanza se lleve a cabo mediante una metodología heurística y activa, enfatizando la experimentación y la resolución de problemas.

## 1. COMPETENCIAS Y CAPACIDADES A DESARROLLAR.

A continuación reseñaremos en la tabla que se adjunta, lo que pretendemos trabajar y desarrollar a través de la utilización de la Estadística en el currículo, diferenciando los distintos ciclos de enseñanza:

| Ciclos             | Competencias a desarrollar  | Actitudes y capacidades  |
|--------------------|---|--|
| 1er Ciclo Primaria | Registra y comunica información sobre su realidad inmediata utilizando cuadros, esquemas y códigos. Aprecia el lenguaje gráfico como forma de representación y comunicación de acontecimientos en su vida familiar y escolar. | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza diferentes estrategias de recojo y cuantificación de datos en situaciones de su vida diaria (uso de palotes, aspas).</li> <li>• Registra y organiza datos de hechos concretos (horarios, turnos de trabajo, cuadros de asistencia, resultados de juegos sencillos de azar,...) y los representa en tablas de doble entrada y diagramas de barras.</li> <li>• Realiza representaciones gráficas (diagramas de barras, pictogramas, tablas de doble entrada) de información dada.</li> <li>• Lee e interpreta diagramas de barras, pictogramas y tablas de doble entrada de experiencias realizadas por ellos mismos.</li> </ul>  |
| 2º Ciclo Primaria  | Elabora e interpreta gráficos con datos referentes a fenómenos y situaciones de su entorno; valorando la importancia del lenguaje gráfico y juzgando críticamente la información obtenida.                                    | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Clasifica objetos y seres de acuerdo a dos o más propiedades comunes, nominando cada grupo.</li> <li>• Forma subclases a partir de una clase dada, reconociendo el todo y las partes. Utiliza cuantificadores (todos, algunos, ninguno, por lo menos uno). Representa gráficamente utilizando el esquema "árbol" y cuadros de doble entrada.</li> <li>• Interpreta y elabora esquemas clasificatorios para organizar sus actividades familiares, escolares y comunales.</li> <li>• Recolecta, cuantifica datos y elabora estrategias de codificación. Interpreta y construye tablas numéricas y no numéricas.</li> <li>• Elabora gráficos estadísticos con datos referentes a situaciones de su entorno (utilizando gráficos de barras, poligonales o pictogramas). Aprecia la veracidad como valor vinculado a la elaboración e interpretación de datos estadísticos.</li> <li>• Registra la ocurrencia de un suceso cuando realiza juegos de azar sencillos con monedas, dados, casinos, etc. Expresa la probabilidad de ocurrencia de un suceso simple, empleando los términos "siempre", "nunca", "a veces".</li> <li>• Juzga críticamente los juegos de azar.</li> </ul> |

|                          |   |  |
|--------------------------|---|--|
| Tercer Ciclo de Primaria | <p>Elabora e interpreta tablas y gráficos que corresponden a fenómenos naturales, económicos y sociales de su medio local y nacional, y emite opinión sobre ellos. Resuelve, evalúa y formula problemas de la vida cotidiana relacionados con el registro, organización e interpretación de datos estadísticos.</p> | <ul style="list-style-type: none"> <li>• Recoge y registra datos sobre situaciones familiares, comunales y nacionales. Elabora gráficos estadísticos con datos referentes a situaciones conocidas, utilizando gráficos de barras, poligonales y diagramas circulares.</li> <li>• Lee e interpreta diagramas, esquemas, tablas y gráficos relacionados con información significativa para ella/él. Compara información expresada en tablas. Elabora preguntas y conclusiones a partir de los datos.</li> <li>• Halla el promedio de un conjunto de datos e interpreta resultados.</li> <li>• Emplea la calculadora u otros medios informáticos para procesar la información.</li> <li>• Resuelve problemas relacionados con situaciones de su vida diaria vinculados al registro y organización de datos y a la interpretación Estadística de los resultados obtenidos.</li> <li>• Valora el lenguaje gráfico como un instrumento para representar e interpretar información referente a la realidad.</li> <li>• Aprecia la veracidad como valor vinculado al manejo de datos y de los procedimientos estadísticos.</li> <li>• Expresa lo probable de la ocurrencia de un suceso basándose en los datos disponibles.</li> <li>• Valora la importancia de la utilización de la Estadística a través de su aplicación a situaciones de la vida real.</li> </ul> |
|--------------------------|---|--|

## 2. ÁREAS DE TRABAJO.

El trabajo con las tablas de datos, gráficos, esquemas, etc. no corresponde solamente al área de Matemáticas, sino que su uso puede y debe ser abordado en el seno de todas las áreas del currículo. Para ello se adjunta una tabla con orientaciones sobre cómo trabajar estos aspectos en las distintas áreas.

| Áreas                                 | Orientaciones de trabajo  |
|---------------------------------------|---|
| Lengua española e Idiomas extranjeros | En esta área se abre un amplio abanico de posibilidades. Dentro de la media hora de lectura diaria, se pueden abordar formatos de lectura que contengan datos estadísticos, como por ejemplo, los periódicos escolares que se encuentran en la biblioteca. Asimismo, en las áreas de lengua extranjera, se pueden abordar lecturas que contengan este tipo de presentación y tratamiento de datos, así como elaborarlos a partir de la información sobre distintos aspectos de la sociedad en esos países que se obtiene en las distintas sesiones. |
| Matemáticas                           | Es el área encargada desde siempre de enseñar este tipo de contenidos al alumnado. No se debe relegar el uso de este tipo de presentación de información a la última unidad del curso. Se puede utilizar en todas las unidades a través de la resolución de problemas, presentando los datos en este tipo de formatos.  |
| CCSS y CCNN                           | En estos campos de conocimiento, el trabajar con datos se hace indispensable en muchas ocasiones, por lo que se deben aprovechar las situaciones de recogida, tratamiento y presentación de datos para recalcar en el alumnado la importancia de la Estadística y su utilidad. Se pueden trabajar para datos atmosféricos, sociales, geográficos...   |
| Educación Física                      | A través de las tablas de datos y distintas representaciones de los mismos se pueden reflejar los resultados en competiciones, pruebas, etc.  |
| Educación Artística                   | Diversos datos referentes al mundo de la Cultura pueden ser utilizados para realizar tablas, gráficos, esquemas, etc. (ventas de discos o libros, encuestas de gusto por determinada músicas, etc.).  |
| Religión                              | Al tratar una amplia diversidad de aspectos socioculturales, se abre la posibilidad de realizar representaciones de datos que resuman las tendencias, creencias, actitudes, etc. de la población.   |

### 3.1.- Explorando la información.

• Se selecciona un diario. Se identifican y recortan junto con los alumnos/as noticias o anuncios que utilicen datos para describir nuestro mundo actual.

- a) En los Deportes.
- b) En las Finanzas, Economía y Negocios.
- c) En el ámbito Internacional y Nacional.
- e) En la Cultura y la Ciencia.
- f) Educación y la Política.

### 3.2.- Explorando la Estadística.

#### a. *Recopilación de datos.*

A continuación se muestra un listado de problemas cotidianos en la escuela. ¿Qué información deberá recogerse para resolverlos? ¿En que problemas se usarán las muestras? Habrá que sugerir ideas de cómo recopilar los datos.

- a) ¿Cuántos alumnos y alumnas hay en cada clase del colegio?
  - b) De los alumnos y alumnas que hay en el Colegio, ¿cuántos usan el transporte escolar?
  - c) ¿Cuánto tiempo se dedica en casa a ver la televisión cada semana en cada nivel del tercer ciclo y ESO?
- ⇒ Generar debates sobre lo hallado. Dar conclusiones sobre la importancia de la recopilación de datos en la escuela.

#### b. *Organización de Datos.*

A continuación se sugiere una lista de posibles exploraciones que se pueden realizar en cada aula:

- Registro de fechas del calendario escolar.
- Informes sobre el tiempo: temperatura, lluvias, humedad, etc.
- Informes sobre tráfico: accidentes, cantidad de tráfico, número de vehículos...
- Ausencias escolares.
- Costos escolares.
- Estadísticas vitales en los alumnos/as: número de hermanos/as, estado civil de los padres, desempleo, etc.
- Actividades recreativas: radio, cine, libros, revistas, deportes, etc.
- Periódicos: anuncios, fotografías, comics.
- Condiciones del mercado: ventas y precios de los productos de la canasta familiar.
- Calificaciones escolares.
- Dinero en circulación: moneda y papel.
- Facturas domésticas: gas, electricidad, agua, teléfono.
- Inventario de ropa: color, número, tipo
- Estaturas, pesos, tamaños de calzado.
- Distribución mensual de cumpleaños.

⇒ Generar debates sobre lo hallado. Dar conclusiones sobre la importancia de la organización de datos en la escuela.

## c. **Presentación de Datos.**

En este punto sería de mucha utilidad el presentarle al alumnado diversos tipos de gráficos, tablas o esquemas ya confeccionados, con el objetivo de que sea el propio alumnado el que se encargue de traducirlo todo a información relevante.

Además, se debe tender a la comparación y a que el tema sea de interés para motivar aún más a la realización de este tipo de actividad.

## d. **Análisis de Datos.**

A continuación se sugiere una lista de cuestiones para que se puedan realizar debates dentro de cada aula:

¿Por qué no son válidas las conclusiones basadas en los datos de los siguientes problemas? Explica, en cada caso, sus razones.

a) En el año 2000 murió más gente en accidentes de aviación que en 1966. Por tanto era más peligroso viajar en avión en el año 2000 que en 1966.

b) En Roquetas hay menos accidentes que en Madrid. Luego, conducir un automóvil en Trujillo es más seguro que conducirlo en Lima.

c) Ninguna alumna aprobó el curso de Matemáticas. Por tanto, las mujeres no son buenas para las matemáticas.

¿La información dada es clara y correctamente usada? Las afirmaciones que se hacen en los recortes, ¿son verdaderas, falsas o cuestionables?

⇒ Generar debates sobre lo hallado. Dar conclusiones sobre el análisis de Datos en el mundo actual.

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### 1. INTRODUCCIÓN Y JUSTIFICACIÓN.

El área de matemáticas debe concebirse no sólo como un conjunto de ideas y formas de actuar que conllevan la utilización de cantidades y formas geométricas, sino, y sobre todo, como un área capaz de generar preguntas, obtener modelos e identificar relaciones y estructuras, de modo que, al analizar los fenómenos y situaciones que se presentan en la realidad, se pueda obtener informaciones y conclusiones que inicialmente no estaban explícitas.

En la Orden de 17 de marzo de 2015 expone que la finalidad del área en la Educación Primaria es el desarrollo de la **Competencia matemática** focalizando el interés sobre las capacidades de los sujetos para analizar y comprender las situaciones, identificar conceptos y procedimientos matemáticos aplicables, razonar sobre las mismas, generar soluciones y expresar los resultados de manera adecuada.

La competencia Matemática o alfabetización matemática del alumnado, sería el concepto con el que se hace referencia a la capacidad del individuo para resolver situaciones prácticas cotidianas, utilizando para este fin los conceptos y procedimientos matemáticos.

Descartamos por tanto el mero aprendizaje de conocimientos y procedimientos matemáticos en sí mismos, poniendo el énfasis sobre la aplicación de éstos a situaciones de la vida real. Interesa valorar cómo el alumnado aplica con eficacia sus habilidades de razonamiento numérico, cálculo, razonamiento espacial u organización de la información.

El trabajo en el área en la etapa educación primaria estará basado en la experiencia; los contenidos de aprendizaje partirán de lo cercano y se deberán abordar en contextos de **identificación y resolución de problemas** y de contraste de puntos de vista. Las matemáticas se aprenden utilizándolas en contextos funcionales relacionados con situaciones de la vida diaria, para ir adquiriendo progresivamente conocimientos más complejos a partir de las experiencias y los conocimientos previos.

En el Real Decreto 126/2014, de 28 de febrero, por el que se establece el currículo básico de la Educación Primaria, en su Anexo I, en el apartado sobre el área de matemáticas

# JUNTA DE ANDALUCÍA

señala que **Los procesos de resolución de problemas** constituyen uno de los ejes principales de la actividad matemática y deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje a lo largo de la etapa, puesto que constituyen la piedra angular de la educación matemática. En la resolución de un problema se requieren y se utilizan muchas de las capacidades básicas: leer, reflexionar, planificar el proceso de resolución, establecer estrategias y procedimientos, revisarlos, modificar el plan si es necesario, comprobar la solución si se ha encontrado y comunicar los resultados.

El Decreto 97/2015 por el que se establece la ordenación y el currículo de la Educación Primaria en Andalucía considera que, la resolución de problemas debe concebirse como un aspecto fundamental para el desarrollo de las capacidades y competencias básicas en el área de matemáticas y como elemento esencial para la construcción del conocimiento matemático. Es por ello fundamental su incorporación sistemática y metodológica a los contenidos de dicha materia.

Los medios tecnológicos son herramientas esenciales para enseñar, aprender y hacer matemáticas, por lo que su presencia debe ser habitual en los procesos de enseñanza y aprendizaje de esta materia. En este sentido, se deben adoptar medidas para el uso de las TIC, y debe aprovecharse para la mejora de los procesos de enseñanza y las Matemáticas.

Estos aspectos: la resolución de problemas y el uso adecuado de los medios tecnológicos, deben entenderse, como ejes transversales que han de estar siempre presentes en la construcción del conocimiento matemático durante esta etapa.

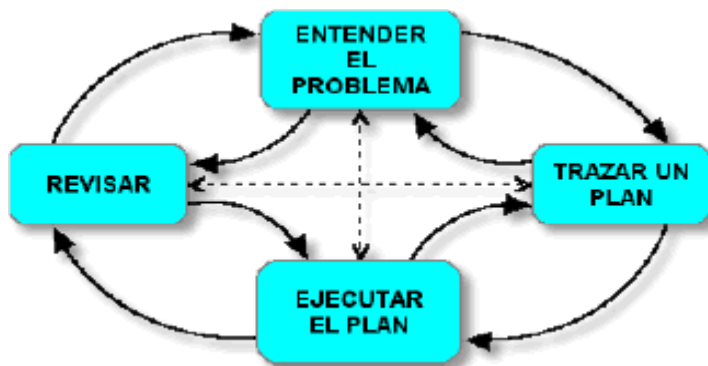
## 2. SOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Una estrategia para plantear actividades de clase consiste en el "Ciclo para la solución de problemas" propuesto por George Polya (1957). Por solución de problemas entendemos "encontrar y utilizar unos medios y unas estrategias de solución en una situación en la que se debe alcanzar una meta.

Según Polya, en la solución de un problema intervienen cuatro operaciones mentales:

- 1) Entender el problema
- 2) Trazar un plan (para resolverlo)
- 3) Ejecutar el plan (resolver el problema)
- 4) Revisarlo (asegurarse que la solución es la apropiada)

Estas operaciones las aplican los estudiantes de manera flexible; queriendo decir que estos pasos no se trabajan necesariamente en una secuencia lineal.



Operaciones mentales planteadas por Polya para solucionar problemas.

Como se observa en la figura anterior, cuando el estudiante entiende el problema, procede a trazar un plan para solucionarlo; sin embargo, puede devolverse y leerlo nuevamente si considera que su comprensión del problema no es la adecuada. Lo anterior indica que esta estrategia de solución de problemas es flexible y dinámica.

Una vez el estudiante traza un plan de solución, lo socializa con el resto de la clase. Después de recibir retroalimentación tanto del docente como de sus compañeros, procede a ejecutarlo. Finalmente, el estudiante revisa la solución implementada y reflexiona sobre ella para mejorarla o enriquecerla.

### 3. DEFINICIÓN DE PROBLEMA.

Un "problema" es una cuestión a la que no es posible contestar por aplicación directa de ningún resultado conocido con anterioridad, para resolverla es preciso poner en juego conocimientos diversos, matemáticos o no, y buscar relaciones entre ellos.

Por ello, hemos decidido que nuestros alumnos deben de poseer las siguientes habilidades:

- Saber **resolver problemas**, es decir, cuestionar, encontrar, investigar y explorar soluciones a los problemas. Que demuestren capacidad para persistir en busca de una solución, que comprendan que puede haber varias maneras de encontrar una respuesta, y que sepan aplicar las matemáticas con éxito a las situaciones de la vida cotidiana.
- Saber **comunicarse matemáticamente**, es decir, utilizar el lenguaje matemático, los números, las tablas o símbolos para explicar cosas y explicar el razonamiento utilizado para resolver un problema de cierta manera, no solo dar una respuesta. También significa escuchar los razonamientos de otros.
- La **capacidad para razonar matemáticamente**, poder pensar lógicamente, ser capaz de discernir las similitudes y diferencias en objetos o problemas, poder elegir opciones y razonar sobre las relaciones entre las cosas.

### 4. OBJETIVOS DE LA PROPUESTA.

Partiendo de los conceptos y las necesidades de nuestro alumnado se proponen los siguientes objetivos:

- Mejorar en el alumnado de Educación Primaria la capacidad para resolver problemas matemáticos.
- Introducir y mejorar de forma dirigida, gradual y sistemática las estrategias necesarias para afrontar más eficazmente la resolución de problemas matemáticos: lectura comprensiva, atención, discriminación de datos, etc.
- Mejorar la capacidad de razonamiento matemático en los alumnos facilitando una mayor conexión con la realidad.
- Entrenar de forma sistemática las pautas para la resolución de un problema matemático: aprender a entender el enunciado, identificar los datos del enunciado, identificar la pregunta, determinar los datos necesarios para resolver un problema, elegir las operaciones adecuadas, realizar los cálculos y comprobar el resultado.
- Utilizar distintos tipos de problemas (de cálculo mental, de lógica, encadenados, etc.) que permitan reforzar la utilización de las operaciones básicas.

### 5. RECOMENDACIONES PREVIAS.

El alumnado desarrollará mayor seguridad en su capacidad matemática si comprende los siguientes puntos importantes:

- **Los problemas pueden ser resueltos en varias maneras.**

Aunque en la mayoría de los problemas matemáticos hay sólo una respuesta correcta, puede haber varias maneras de encontrarla. El aprender matemáticas es más que encontrar la respuesta correcta; también es un proceso para resolver problemas y aplicar lo que se ha aprendido anteriormente.

- **A veces las respuestas incorrectas también son útiles.**

La precisión siempre es importante en las matemáticas. Sin embargo, a veces podremos usar una respuesta incorrecta para ayudar a los alumnos y alumnas a resolver cómo cometió un error. Analizar las respuestas incorrectas puede ayudar a los niños a comprender los conceptos fundamentales del problema y ayudarlo a aplicar sus destrezas de razonamiento para encontrar la respuesta correcta.

Pida al niño o niña que le explique cómo resolvió un problema matemático. Su explicación le puede ayudar a descubrir si necesita ayuda con destrezas de cálculo (como sumar, restas, multiplicar o dividir), o con los conceptos necesarios para resolver el problema.

- **¡Arriesgarse!**

Ayudemos a los niños y niñas a tomar riesgos. Ayudémosles a valorar el intento de resolver un problema, aunque sea difícil. Démosles tiempo para explorar distintos métodos para resolver un problema difícil. Mientras trabaja, ayúdelo a hablar sobre lo que está pensando. Esto le ayudará a reforzar sus destrezas matemáticas y a poder razonar y resolver problemas independientemente.

- **Es importante poder hacer matemáticas “en la cabeza”.**

Las matemáticas no se hacen sólo con papel y lápiz. Hacer problemas matemáticos “en la cabeza” (matemáticas mentales) es una destreza valiosa que nos es útil al hacer cálculos rápidos de los precios en las tiendas, restaurantes y gasolineras. Hagamos saber a los niños y niñas que al usar las matemáticas mentales, sus destrezas se fortalecerán.

- **A veces está bien usar una calculadora para resolver problemas matemáticos.**

Está bien usar calculadoras para resolver problemas matemáticos (de vez en cuando). Se utilizan y saberlas usar correctamente es muy importante. La idea no es permitir que el niño/a se excuse con la actitud: “no necesito saber matemáticas, tengo una calculadora”. Deben entender que para usar calculadoras correcta y eficientemente, necesitarán fuertes fundamentos en operaciones matemáticas, de otra manera: ¿cómo sabrá si la respuesta que le da la calculadora es razonable?

Partiendo de esta base, y para ser eficaz resolviendo problemas, es conveniente que los/as docentes tengamos en cuenta las siguientes recomendaciones:

- **La actitud es importante.**

Cuando nos enfrentamos a un problema matemático es muy importante la actitud que tienes ante él. ¿Estás ansioso/a por resolverlo o no tienes ganas de intentarlo? ¿Tus condiciones físicas (cansancio, sueño, etc.) son las adecuadas? ¿Tienes curiosidad, disposición de aprender, gusto por el reto?

- **Tener confianza en nuestras capacidades.**

Con frecuencia, no es necesario saber mucho para resolver bien un problema. Basta con pensar correctamente. Enseñemos pues a actuar sin miedo, con tranquilidad, convencido de que está a su alcance.

- **Ser paciente y constante.**

No permitamos que abandonen a la menor dificultad. Si se quedan atascados/as, que no se den por vencidos/as; ofrezcamos y ayudémosles con un nuevo enfoque del problema.

- **Concentración en lo que hacen.**

Resolver problemas es una actividad mental compleja. Requiere poner en tensión todos nuestros resortes mentales.

- **Buscar el éxito a largo plazo.**

Aprender a resolver problemas es un proceso lento. Los frutos tardarán un cierto tiempo en llegar pero cuando notes los progresos sentirás una gran satisfacción.

## 6. PAUTAS A SEGUIR EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

Para resolver problemas no existen fórmulas mágicas; no hay un conjunto de procedimientos o métodos que aplicándolos lleven necesariamente a la resolución del problema (aún en el caso de que tenga solución).

Por otro lado, es evidente que hay personas que tienen más capacidad para resolver problemas que otras de su misma edad y formación parecida. Que suelen ser las que aplican (generalmente de una manera inconsciente) toda una serie de métodos y mecanismos que suelen resultar especialmente indicados para abordar los problemas. Son los procesos que se llaman “heurísticos”: *operaciones mentales que se manifiestan típicamente útiles para resolver problemas*. El conocimiento y la práctica de los mismos es justamente el objeto de la

# JUNTA DE ANDALUCÍA

resolución de problemas, y hace que sea una facultad que se puede entrenar, un apartado en el que se puede mejorar con la práctica. Pero para ello, hay que conocer los procesos y aplicarlos de una forma planificada, con método.

El modelo más clásico, pero aún vigente, de las fases por las que atraviesa la resolución de problemas matemáticos es el descrito por Polya. Para él la resolución de problemas es un proceso que consta de cuatro fases:

- **Comprensión del problema.** (Estimación del resultado).
- **Planificación.** (Subrayado, anotaciones, esquema si procede).
- **Ejecución del plan.** (Operaciones y resultado).
- **Supervisión.** (Explicación del proceso y del resultado. Planteamiento de problemas similares a partir de nuevos datos).

Este modelo ha inspirado la gran mayoría de los modelos de resolución de problemas que se han elaborado posteriormente. En la Tabla I puede observarse que, pese a las diferencias terminológicas y de precisión del análisis, los modelos de resolución de problemas que han seguido al de Polya guardan estrechos vínculos.

Nuestro planteamiento de intervención para la resolución de problemas se basa en estas cuatro fases, las cuales hemos adaptado para su uso en los básicos niveles de Primaria.

Así que antes de enfrentarnos a un problema planteamos en voz alta, de forma reiterativa, los mismos pasos, los cuales se detallan a continuación y que pueden tener distintas variables, dependiendo del nivel en el que nos encontremos y del número de operaciones implicadas que puede contener. Así pues, nuestros pasos son:

- 1º.- Entender el problema.
- 2º.- Realizar una representación gráfica del problema.
- 3º.- Trazar un plan de actuación.
- 4º.- Realizar la operación que hemos deducido.
- 5º.- Comprobar la respuesta.

**TABLA I. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MATEMÁTICOS**

| FASES  | PASOS A SEGUIR                    |
|--|-----------------------------------|
| Entender el problema. (Lectura comprensiva)  | ¿Qué datos nos ofrece su lectura? |
| Realizar una representación gráfica del problema (Análisis de los datos)             | ¿Qué nos pregunta el problema?    |
| Trazar un plan de actuación.   | ¿Qué tenemos que hacer?           |
| Realizar la operación deducida. (Elección de las técnicas operatorias más adecuadas) | ¿Qué operaciones realizamos?      |
| Comprobar la respuesta. (Dar las soluciones correspondientes y comprobarlas)         | ¿Qué solución nos da el problema? |

## 7. PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

### 1<sup>er</sup> PASO: "ENTENDER EL PROBLEMA":

Seguimos los consejos, del apartado "Redacción del enunciado del problema" a la hora de redactar o elegir un problema a resolver por el alumnado.

En este primer paso hacemos referencia a la identificación y definición del problema. La identificación supone el reconocimiento de la existencia de un problema y de la necesidad de resolverlo. La mayoría de los problemas matemáticos que tienen que resolver los alumnos no exigen esfuerzo de este tipo, puesto que el problema ya se les ha presentado como tal.

La definición del problema consiste en la decodificación de los símbolos escritos y en la conversión del enunciado matemático en una representación mental.

Para lograr la correcta comprensión del problema, deben ser capaces de identificar los datos relevantes de los que no lo son, y podemos usar las siguientes estrategias:

1.- Realizamos la lectura del problema, esta debe de realizarse de forma progresiva:

- Lectura en voz alta por parte de uno o varios alumnos, primero del planteamiento y luego de la pregunta.

- La lectura irá acompañada de preguntas del maestro en busca de la comprensión del mismo, estas preguntas nunca deben contener en sí la respuesta. Ejemplo. "de que va", "que nos cuenta", "de qué cosas habla" "de quién habla", "qué les ha pasado"...

- En tanto no exista una comprensión del texto, se repetirá sucesivamente la lectura, por otros alumnos, de un grupo determinado de ellos o del grupo entero, al objeto de que la dispersión de pensamiento se vayan concentrando en su comprensión.

- Después de leerlo con pausa y reflexionando, es importante intentar responder a las siguientes preguntas:

- ¿Entiendes todo lo que se dice?
- ¿Puedes replantear el problema en tus propias palabras?
- ¿Distingues cuáles son los datos?
- ¿Sabes a qué quieres llegar?
- ¿Tenemos toda la información que necesitamos?
- ¿Hay información que no necesitamos?
- ¿Es este problema similar a algún otro que hayas resuelto antes?

2.- Subrayaremos con lápiz rojo los datos del problema y en azul la pregunta, al objeto de separar los datos de las preguntas.

3.- El alumno explicará, con sus propias palabras, el enunciado a un compañero: señalando cuál es la pregunta del problema, indicando los datos que hacen falta para resolver el problema y separando los datos relevantes de los que no lo son.

4.- Cuando el problema contenga más de una operación, es necesario que lo separe en cada una de sus partes, para resolver cada una de ellas en relación con las restantes partes y con el enunciado total de problema.

5.- Otras tácticas que podemos realizar son:

- Escribir de modo esquemático el contenido de cada frase del enunciado.
- Reproducir el texto utilizando frases cortas y sencillas.

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- Decir en voz alta el enunciado, recalcando las palabras clave.
- Asegurarnos que conoce lo que queremos encontrar, los datos y las relaciones entre los datos.
- Asegurarnos que comprende de donde partimos y qué queremos, así como las operaciones posibles para llegar del estado inicial al e final.
- Si la representación de un problema no conduce a la solución, trata de volver a formular el problema.

En resumen, buscamos no solo la capacidad de análisis de la información que aparece en el enunciado, sino también la "autoevaluación" que hace de su conocimiento de la tarea, del nivel de dificultad y de las posibilidades de éxito.

## **2º PASO: "REALIZAR UNA REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL PROBLEMA":**

Este paso que en los modelos de resolución de problemas se encuentra englobado dentro de otras fases, nosotros lo hemos sacado y otorgado más relevancia, debido a que en los niveles educativos de Infantil y primeros Ciclos de Primaria, la representación gráfica, en el trabajo diario se nos ha presentado, como un elemento clave, tanto para la comprensión del problema, como para la introduciendo en la resolución de problemas y en aquellos casos que la redacción del mismo les resulte especialmente difícil.

La representación mediante diagramas, gráficos o dibujos, no es la única estrategia de este tipo que podemos usar, también es aconsejable que a los niños se les planteen situaciones problemáticas teatralizadas, con cuentos de forma oral y manipulando objetos para que ellos los puedan representar de distintas formas.

Un recurso didáctico que da muy buenos resultados es la utilización de programas informáticos que a través del juego les planteen situaciones problemáticas. Este recurso tiene la ventaja, aparte de que el recurso en sí ya es motivador, que presenta de forma gráfica y en movimiento los problemas, y es este último aspecto, "el movimiento", el mejor recurso que podemos usar, ya que ven directamente cómo se desarrolla el planteamiento del problema.

## **3er PASO: "TRAZAR UN PLAN DE ACTUACIÓN":**

Esta fase consiste en la planificación de la solución. Se trata ahora de diseñar el esquema de actuación a seguir, lo que supone identificar las metas y las posibles submetas cuando tratamos de problemas en los que debemos realizar operaciones intermedias, examinar las diversas estrategias generales que podemos aplicar y elegir las acciones que se llevarán a cabo.

En este punto vamos a trazar un plan de actuación. Para ello podemos utilizar diferentes estrategias.

- Utilizar palabras clave que mediante la asociación directa con la operación (juntar/unir con sumar, quitar/separar con restar) se les irán familiarizando poco a poco y les permitirá reconocer la operación a realizar en situaciones similares. Ejemplo: "*¿Qué tenemos que hacer junta o quitar? (unir/separar)*"
- Si se duda entre posibles operaciones, efectuamos una estimación y mediante el ensayo y error llevamos a cabo todas las posibilidades y vemos que solución se ajusta al resultado más lógico y esperado.
- Recordar un problema conocido de estructura análoga al que tengamos y tratar de resolverlo.
- Resolver un problema similar más simple o equivalente, simplemente cambiando el tema del que trate el problema.
- Si la numeración de los datos es muy alta, resolverlo con números más sencillos y utilizar el modelo empleado para resolver el problema original
- Identificar las posibles submetas que pueda englobar un problema de varias operaciones. Esto supone la división del problema en partes, cada una de las cuales es imprescindible para llegar a la solución final:
  - Si es el maestro/a el que identifica las distintas submetas, tendrá que delimitar cada una de las partes del problema y colocar en cada parte los datos correspondientes, solicitando del alumno que ponga en cada apartado la solución correspondiente, haciendo comprender al alumno que la solución hallada es el dato que necesitará para resolver la siguiente submeta.
  - Si es el alumno/a el que ha de identificar cada una de las submetas, tendrá que tener en cuenta qué es lo que ha logrado con cada una de las operaciones que realiza para ir obteniendo los datos que requiere para alcanzar la pregunta final del problema.

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- Si el texto tuviera más datos de los necesarios para la resolución del problema, anotar sólo los que hagan falta.
- Por su parte el profesor/a deberá plantear al alumno preguntas al objeto de ayudarle en su camino hacia encontrar la solución, como por ejemplo:
  - ¿Cuál es el problema?
  - ¿Qué estás haciendo?
  - ¿Por qué estás haciendo esto?
  - ¿Qué estamos tratando de hacer aquí?
  - ¿Cómo te ayuda lo que estás haciendo para alcanzar la solución?
  - ¿Qué información nos dan?

## 4º PASO: "REALIZAR LA OPERACIÓN QUE HEMOS DEDUCIDO":

Una vez configurado el plan, el paso siguiente es hacer que el alumno lleve a cabo las estrategias que eligió previamente. Para ello, conviene que el alumno se tome el tiempo necesario para resolver el problema. En caso de dificultad debe solicitar ayuda para que el maestro le haga sugerencias que le permitan avanzar en la resolución del problema.

Igualmente aquí el papel de maestro será de guía mediante preguntas del tipo: ¿estamos siguiendo los pasos que decidimos?, ¿cuál es la operación matemática que debemos elegir?, ¿necesitamos un nuevo plan?,...

En esta fase uno de los mayores problemas con las que se encuentra el alumno es la traducción simbólica, en términos numéricos, de las ideas lógicas que ya ha realizado. Son capaces de resolverlo mentalmente, pero no con los algoritmos matemáticos necesarios. En este caso habrá que reforzar el significado de los distintos significados de las operaciones aritméticas y los verbos de acción y/o palabras clave que nos llevan a ellas.

Muchas veces en esta etapa de la resolución de problemas se pueden producir atascos, en los cuales no se debe tener miedo a volver a empezar desde el principio, o dejar para otro momento, suele suceder que un comienzo fresco o una nueva estrategia nos lleve al éxito.

## 5º PASO: "COMPROBAR LA RESPUESTA":

Esta fase es la de verificación, de mirar hacia atrás, recorrer los pasos que se han seguido para la resolución del problema con objeto de detectar posibles errores o deficiencias. Sobre todo si se ha cometido un error debemos comprobar las decisiones tomadas (análisis de la información, ejecución de los cálculos, etc.) y de los resultados del plan ejecutado (exactitud de la respuesta, correspondencia con el enunciado que la originó, etc).

Es muy común por parte del alumnado, que una vez realizadas las operaciones:

- Den por terminado el problema sin que exista una respuesta escrita a la pregunta que planteaba el problema.
- Dar una respuesta escrita numérica pero sin acompañarla de la aclaración que del significado al dato.
- No realicen una reflexión de los resultados obtenidos que refuercen el proceso realizado.
- No se inmutan ante respuestas absurdas, ya que no realizan una correspondencia entre la solución alcanzada y el enunciado del problema que le permita comprobar el dato obtenido. (Ejemplo: Que el resultado del problema de que la edad de Manolito sea de 120 años)

El maestro de forma dirigida deberá introducir al alumnado, en un proceso en el que se planteen las siguientes preguntas:

- ¿El resultado obtenido tiene lógica?
- ¿El dato responde a la pregunta planteada?
- ¿Utiliza todos los datos importantes?
- ¿Cuadra con las estimaciones y predicciones razonables realizadas?

# JUNTA DE ANDALUCÍA

- ¿Es posible encontrar una solución más sencilla?
- ¿Se puede resolver el problema de un modo diferente?
- ¿Es posible utilizar la estrategia empleada para resolver otros problemas?

El principal problema del entrenamiento específico en heurísticos está en que los alumnos tienen problemas para aplicar los heurísticos aprendidos a nuevos problemas. Sin embargo con la práctica los alumnos irán interiorizando estas estrategias hasta llegar a plantearlas de manera espontánea.

Otra manera de mejorar los procesos de autocontrol del alumno es enseñarle a realizar estimaciones de los problemas que resuelve para compararlos con los resultados que obtiene y, de esta forma, modificar o no el proceso de resolución seguido. Así mismo, cuando las estimaciones no cuadre, les plantearemos preguntas del tipo: ¿qué fue lo que funcionó?, ¿qué podríamos hacer de manera distinta la próxima vez?,...

## FICHA DE SEGUIMIENTO.

|               |              |
|---------------|--------------|
| NOMBRE: _____ | Grupo: _____ |
| Curso: _____  | Fecha: _____ |

## COMPRENSIÓN Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS.

|   | NO | EP | SI |
|---|----|----|----|
| 1.- Identifica los datos y la pregunta del problema.                          |    |    |    |
| 2.- Realiza un razonamiento lógico a nivel oral.                              |    |    |    |
| 3.- Elige adecuadamente las operaciones del problema. (Sólo o con ayuda)      |    |    |    |
| 4.- Resuelve correctamente el problema. (Sólo o con ayuda)                    |    |    |    |
| 5.- Aporta la solución con claridad.  |    |    |    |
| 6.- Distribuye en el papel de forma correcta los: datos, operación y solución |    |    |    |
| 7.- Copia con claridad el problema.   |    |    |    |
| 8.- Inventa problemas sencillos a partir de unos datos y una operación dados. |    |    |    |
| 9.- Realiza problemas de una operación.                                       |    |    |    |
| 10.- Realiza problemas de dos operaciones.                                    |    |    |    |



PLANTILLA. HOJA DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN CASA.

## RESOLVEMOS PROBLEMAS

Enunciado del problema

Dibujo

Datos

Piensa cómo resolverlo y escribe las operaciones indicadas y su resultado, escribiendo qué es.

Haz aquí los cálculos, si no los puedes hacer mentalmente.

Escribe la solución o soluciones de forma correcta y completa.

Comprobación.

Inventa otro problema parecido, escríbelo aquí y resuélvelo en tu cuaderno.

## CÁLCULO MENTAL

### A. INTRODUCCIÓN.

En el Centro el Claustro adopta el programa de cálculo mental desarrollado por el Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática de la Universidad de Valladolid. A continuación se presenta su estudio, con pequeñas modificaciones para ser adaptado a la realidad del alumnado del Centro. El documento se acompaña de tres anexos uno por cada ciclo, con actividades para todos los niveles de educación primaria.

Conviene precisar que entendemos por **Cálculo mental (C. M.)** una forma de calcular sin ayuda externa, siendo sólo la mente la que trabaja. Distinguimos dos modalidades:

- **Cálculo mecánico o de estímulo-respuesta.** Conlleva el empleo de una técnica automática; existiendo el riesgo de que cuando no se utiliza tiende a olvidarse rápidamente. Por ejemplo: la memorización de las tablas.
- **Cálculo reflexivo o pensado.** Sobre todo se caracteriza porque cada vez el cálculo es nuevo, de forma que el que lo utiliza usa determinadas estrategias, que pueden ser originales, tratando de relacionar, al mismo tiempo que efectúa los cálculos, los números y las operaciones. Todo esto implica una reflexión que conlleva toma de decisiones y elección de la estrategia más adecuada. Para este tipo de cálculo se requieren manipulaciones y habilidades, como: conteos, recolocaciones, dominio de tablas, compensaciones, descomposiciones, etc., que sirven para poder alterar los datos iniciales y de esta forma trabajar más cómodamente con otros más fáciles de calcular.

Dentro del cálculo mental, existe lo que denominamos **Cálculo aproximado (C.A.)**. Es un cálculo que resulta muy útil, puesto que normalmente en la vida diaria, no se dispone de lápiz ni papel, ni de tiempo y muchas veces es suficiente con saber una respuesta aproximada. Se caracteriza por contener varias fases, una primera, cuyo objetivo es facilitar el cálculo a costa de perder precisión y en la que se reformulan los datos originales con unas técnicas determinadas, lo cual dará lugar a la elección de los números que van a intervenir en el cálculo con la cantidad de dígitos necesarios; una segunda fase en que se confirma si se posee la capacidad mental para poder realizar ese cálculo sin necesidad de utilizar otros medios auxiliares y finalmente, una tercera fase en la que se realiza el cálculo propiamente dicho.

El optar por uno de los dos tipos de cálculo presentado, el exacto y el aproximado, va a depender en gran manera de los datos de partida, de la exactitud de la respuesta que se demande y de la habilidad del calculista. Estas dos variedades de cálculo se complementan entre sí y se refuerzan, constituyendo un grupo de conocimientos muy importantes para el escolar, algo que justificaremos en el siguiente apartado.

### B. JUSTIFICACIÓN Y APORTACIONES DE LAS INVESTIGACIONES.

La comunidad educativa, a lo largo de distintos congresos, simposios, jornadas, etc., se inclina, cada vez con mayor rotundidad, a recomendar la necesidad del trabajo en el aula del cálculo mental. Veamos varios ejemplos:

\* La LOE, uno de los objetivos generales que plantea, relativos a la enseñanza de las Matemáticas es: *"Elaborar y utilizar estrategias personales de estimación, cálculo mental y orientación espacial para la resolución de problemas sencillos, modificándolas si fuera necesario"*. Dentro de los contenidos de carácter procedimental que forman parte del bloque de Números y operaciones, podemos leer: *"Utilización de diferentes estrategias para contar de manera exacta y aproximada"*.

\* El informe Cockcroft (1982, pág. 92), señala: (...) *"Creemos que la decadencia del trabajo oral y mental en las clases de Matemáticas es consecuencia de la falta de reconocimiento de la importancia que el cálculo mental tiene en esta asignatura"*.

\* NCTM National Council of Teachers of Mathematics (2003, pág.37), en el documento Principios y Estándares para la Educación matemática, recomienda: "A medida que los niños de los niveles Pre-K-2 (5 a 8 años) van comprendiendo el significado de los números naturales y de las operaciones de adición y sustracción la enseñanza debería centrarse sobre estrategias de cálculo que desarrollen la flexibilidad y la fluidez"

## Algunas aportaciones de las investigaciones sobre la enseñanza-aprendizaje del cálculo mental en el aula.

Recogemos algunos resultados y aportaciones que nos han ayudado a seleccionar y fundamentar los contenidos y metodología relacionados con este tipo de cálculo, como:

- Alfred Hope, J. (1984) en su tesis doctoral, observa que los alumnos más competentes en cálculo mental multiplicativo coinciden con los que retienen un mayor número de hechos (tablas de multiplicar hasta el 12, equivalencias, cuadrados,...).
- Plunquet (Dickson, 1991), aconseja estimular al niño en la aplicación de procedimientos informales de cálculo puesto que contribuye a desarrollar en él la apreciación del significado y estructura de las operaciones aritméticas.
- B. Gómez Alfonso (1994), en su tesis doctoral, recoge resultados de numerosas estudios relacionados con la puesta en práctica en el aula, como:
  - Los programas experimentales de enseñanza del C.M. siempre producen un mayor avance en la habilidad para el cálculo que cuando se usan sólo los textos.
  - Estos programas específicos, no afectan negativamente al avance de los programas de Matemáticas.
  - La mayoría de los estudiantes usan en gran medida el método de columnas, los más hábiles en C.M. varían de método explorando y aprendiendo con la práctica.
  - Las habilidades en cálculo mental no están relacionadas claramente con la inteligencia y el sexo.
  - Existe una relación positiva entre la habilidad en cálculo mental y la habilidad general en Aritmética, compensación numérica, operaciones y propiedades.
  - Recomiendan que el C.M. no se haga aisladamente sino integrado con el resto de los hechos aritméticos.
  - El C.M. puede contribuir a la comprensión y sentido del número, puesto que su práctica implica el manejo de sumandos, factores, valores de posición, propiedades de las operaciones, etc. Incluyendo esta práctica, la posibilidad de tener el escolar un sentimiento de dominio de los grandes números, si se les hace reflexionar para que no los vean como cifras aisladas.
  - Su metodología puede dar una visión participativa de las Matemáticas.
  - Puede influir en el desarrollo de determinadas capacidades, como: la versatilidad e independencia de procedimientos, la reflexión para decidir y elegir, la autoeficacia, la confianza en el cálculo aritmético, el interés y la concentración.
  - Puede ser una ayuda para el cálculo aproximado y una forma de comprobación de resultados.
  - Es importante para el diagnóstico, tanto para que el profesor conozca las concepciones mal construidas que sobre los procedimientos de cálculo tienen los estudiantes, como para que ellos se vean obligados a enfrentarse con ellas, sentando así las bases para su posible reconceptualización.
- Según Meindert (1997), actualmente se esta aceptando ampliamente en la educación matemática la siguiente secuencia de aprendizaje: "al principio es bueno que trabajen con estrategias informales, las elaboren posteriormente y finalicen con los procedimientos estándar más formales".
- Otro argumento que incide en la necesidad de este tipo de cálculo, lo presenta Hidalgo S. y otros (1999), en el que observan, como resultado de un estudio, que los alumnos con bajas aptitudes para el cálculo elemental o con pocas destrezas por falta de ejercicios en dichas operaciones tienen un menor aprovechamiento en Matemáticas, puesto que pierden gran parte del tiempo en efectuar cálculos sencillos.
- Fuson y Brian (1990)(Martínez Montero 2000): "Los métodos de contar que emplean los niños usando los dedos no son una ayuda innecesaria o que dificulta la adquisición posterior de destrezas más elevadas. Al contrario, procuran exactitud en los cálculos y proporcionan gran seguridad a los niños. Con los dedos de las manos el alumno tiene a su alcance casi todos los hechos básicos de las operaciones elementales."
- En esta línea de investigaciones, durante una serie de años, hemos llevado a cabo diversos proyectos de investigación con profesores en los C.P.R. de Palencia y Valladolid,

lo cual nos ha permitido profundizar y extraer diversas consideraciones a tener presente a lo largo del proceso enseñanza-aprendizaje del C.M., como:

- Los errores más habituales que comenten los niños cuando resuelven las cuatro operaciones se deben a que no recuerdan las tablas; lo cual nos indica la necesidad de insistir en la memorización de las mismas como uno de los pilares para el C.M.
- Es conveniente introducir un mayor número de actividades, problemas, que conlleven aplicaciones de los conocimientos.
- Los niños están motivados en todos los casos. No hace falta premios; la respuesta del alumnado siempre es excelente y no se cansan.
- Es importante la continuidad, puesto que cuando no la hay se observan retrasos.
- Recomiendan aplicarlo a la resolución de problemas.
- La totalidad de los profesores están satisfechos con la experiencia.
- Debe hacerse desde los primeros cursos de Primaria.
- El tiempo "perdido" se gana a la hora de resolver operaciones.
- El tiempo no debe sobrepasar de 10 a 15 minutos; algunos consideran que es mejor hacerlo en los minutos finales antes de acabar la clase, puesto que parece que les despista menos.
- Es conveniente tener presente a los alumnos que van más retrasados.
- La habilidad en este tipo de cálculo se consigue con la práctica, siendo importante aprovechar cualquier situación en el aula.

Sin embargo, no son pocos los autores que denuncian el abandono del CM en las aulas de Educación Primaria y Secundaria, el escasísimo tratamiento que se hace del mismo en los libros de texto, y la más que deficiente instrucción que, en general, tiene lugar en la Formación del Profesorado. La primera aseercción es compartida, por Willian M. Carroll (1996), que afirma que en las aulas se sigue insistiendo en el cálculo algorítmico estándar en detrimento del CM. La segunda aseercción la hemos comprobado analizando libros de texto de distintas editoriales y observando que la que se presenta en los pocos textos en que aparece, es totalmente aleatoria, no percibiéndose ningún criterio de selección ni de graduación de dificultades. Por último, a través de entrevistas mantenidas con profesores que no trabajan el C.M. en sus aulas, nos justifican su actitud con respuestas como: porque falta tiempo para acabar el programa, porque no viene en los libros de texto, porque tienen mucho trabajo y esto les supone mucho tiempo de preparación, etc.

Por todo lo anterior, es importante que el profesor posea una herramienta de trabajo que no tenga que construir, por ejemplo, una guía de actividades con una metodología estudiada que le permita, día a día de la semana, trabajar una serie de actividades previamente seleccionadas y analizadas, con el fin de favorecer la enseñanza-aprendizaje del C.M. Con este objetivo, un grupo de profesores de la Universidad de Valladolid, que trabajan en un proyecto de investigación pedagógica, subvencionado por la Junta de Castilla y León, han preparado unas guías de actividades para 1º, 2º y 3º Ciclo de E. Primaria (ANEXOS I, II y III). Estas guías se pueden adquirir, sin ningún costo, solicitándolas a través de los correos [mortiz@am.uva.es](mailto:mortiz@am.uva.es), [ortega@am.uva.es](mailto:ortega@am.uva.es)

## C. EL CÁLCULO MENTAL EN LA EDUCACIÓN INFANTIL.

El número y la numeración están presentes en el ámbito familiar y social, por eso, en la escuela, es necesario diseñar actividades que den sentido al número y la numeración.

Aunque número y numeración son diferentes, los dos están ligados íntimamente en esta etapa. No nos podemos limitar al conteo exclusivamente, tendremos que buscar situaciones significativas que respondan a la pregunta: ¿para qué tenemos necesidad del número y su designación?

En la etapa de educación infantil trabajaremos principalmente tres funciones del número:

- El número como memoria de cantidad: aspecto cardinal.
- El número como memoria de posición: aspecto ordinal.

En el segundo ciclo de educación infantil no se trabaja una matemática disciplinar, sino que hablaremos de actividades matemáticas. Al mismo tiempo iremos introduciendo al alumnado en el desarrollo del lenguaje matemático.

- Enumeración de colecciones:
  - Distinguiremos dos elementos diferentes: semejanzas y diferencias (atributos o cualidades de un objeto).
  - Realizaremos clasificaciones.
  - Ordenaremos objetos (primero, último...).
  - Construiremos seriaciones.
- Construcción de colecciones equipotentes (tantos como).
- Comparación de colecciones utilizando comparativos: más que, menos que, tantos como, igual.
- El número para anticipar y calcular: composición y descomposición de números, situaciones problemáticas que requieren añadir, quitar (sumar y restar)....
- El número para llevar a cabo transacciones: comprar, vender, cambiar...
- El número para repartir.

## D. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL C.M. EN EL 1<sup>ER</sup> CICLO.

Para este ciclo, nuestro principal objetivo es que aprendan y memoricen correctamente las tablas de sumar y restar, puesto que pensamos es la base del C.M.

El cuaderno que presentamos consta de tres partes, en las dos primeras hacemos la programación para cada día de la semana de los dos cursos correspondientes al primer ciclo, un total de treinta semanas cada uno, en donde para cada semana hemos tenido en cuenta los siguientes apartados: numeración, operaciones y estrategias, problemas orales y juegos; la tercera parte comprende una serie de 40 juegos para que elija el profesor el que juzgue más conveniente. Veamos de qué tratan los distintos apartados:

**a) Numeración.** En este apartado, el objetivo es el dominio de los números, en el primer curso se estudia hasta el 100 y en el segundo hasta el 1000, por supuesto presentándolo de forma gradual. Las actividades que pedimos conllevan este objetivo, repitiéndose a lo largo de los dos cursos, siendo las más habituales: conteos ascendente y descendente, series, el  $n^{\circ}$  anterior o siguiente a, el  $n^{\circ}$  menor o el mayor entre dos o varios números, descomponer un  $n^{\circ}$  en dos o tres sumandos, buscar un número que esté entre otros dos, ordenar varios números, leer y escribir números, observar qué ocurre cuando se cambian decenas por centenas, etc. Muchas de las actividades las empezamos dando unas pautas con varios ejemplos y ponemos puntos suspensivos para que el profesor pueda añadir más ejercicios similares. En este apartado también trabajamos los primeros pasos de la aproximación con actividades como: buscar un número cercano (anterior o posterior) a un número determinado, nombrar entre una serie de números el que está más cerca de la decena, redondea a la decena más próxima, etc.; conviene establecer discusiones respecto a las distintas contestaciones que den los niños.

Desarrollo de la sesión: El maestro puede decir en voz alta la actividad, o escribirla en la pizarra si lo cree conveniente, esta segunda forma, recordemos, puede facilitar las contestaciones. Los alumnos pueden contestar en alto o escribirlo en un papel.

**b) Las operaciones y estrategias.** Conlleva, sobre todo para este ciclo el trabajo de las tablas y de aquellas operaciones de sumas y restas que no presenten demasiada dificultad. Entendemos que el empleo de las estrategias implica la asimilación de algunas propiedades que en este ciclo no dominan; por tanto las estrategias de que hacemos uso son mínimas.

Para el primer curso, empezamos con el aprendizaje de las tablas de sumar y restar, para lo cual es necesario que antes entiendan el significado de dichas operaciones, por tanto, pensamos que es conveniente antes de memorizarlas, en las primeras semanas seguir, si es necesario, las fases de Bruner: manipulativa, gráfica y simbólica. Las tablas se trabajan, al principio, siguiendo siempre la siguiente secuencia. Ejemplo, tabla del 7: sumar el 7 ordenadamente:  $7+1$ ,  $7+2$ ,  $7+3$ ,...etc., sumar el 7 cambiando el orden anterior:  $1+7$ ,  $2+7$ ,  $3+7$ ,...etc., sumar el 7 sin ordenar los números:  $7+2$ ,  $1+7$ ,  $7+3$ ,...etc., memorizar la tabla del 7.

Otras actividades que forman parte de este apartado son restar un número, ejercicios en el que no se les pide el resultado de la operación sino uno de sus términos, como:  $10=8+?$ ,  $6 = 8 - ?$

Ejercicios, para que relacionen varios aspectos como:

- Resolver varias operaciones que tienen características similares (idéntico resultado, resultados consecutivos, etc.).
- Inventar sumas y restas que den el mismo resultado.
- Resolver operaciones de la forma:  $3+5+8-3$  (recomendada esta actividad por los profesores de la experiencia).
- Tenemos presente siempre que las operaciones sean consecuentes con las tablas, el número que trabajan y el grado de dificultad, siguiendo secuencias como:
  - o Sumas y restas que contengan un sumando de una cifra y el otro de dos (que no sean de llevadas).
  - o Sumas y restas con números acabados en cero ( $30+40$ ,  $80-30$ ).
  - o Restas que acaban en las mismas unidades ( $35-5$ ,  $29-9$ ).
  - o Operaciones como:  $29+10$ ,  $73-10$ ,  $25-20$ , etc.
  - o En las diez últimas semanas del primer curso se trabajan a la vez las tablas de sumar y restar, con el objetivo de que adquieran seguridad en la realización de los dos algoritmos. Por ejemplo, la tabla del 7 conlleva los siguientes ejercicios:
    - Resuelve las siguientes sumas y restas:  $(7+1, 8-7, 8-1)$ ,  $(7+2, 9-7, 9-2)$ ,  $(7+3, 10-7, 10-3)$ ,  $(7+4, 11-4, 11-4)$ ,  $(7+5, 12-7, 12-5)$ ,  $(7+6, 13-7, 13-6)$ ,  $(7+7, 14-7)$ ,  $(7+8, 15-7, 15-8)$ ,  $(7+9, 16-7, 16-9)$ .
    - Memoriza las restas anteriores:  $16-9$ ,  $15-8$ ,  $14-7$ ,  $13-6$ ,  $12-5$ ,...

En el segundo curso, las diez primeras semanas se presentan con un esquema similar al de las diez últimas semanas del curso anterior y con operaciones que no sobrepasen el 100, para posteriormente seguir con números mayores y con actividades similares a las descritas llegar a 1000. En la semana 15 les presentamos la estrategia de la línea numérica, es muy sencilla y les permite resolver toda clase de sumas, sin llevar o llevadas. El juego 26 les propone otra estrategia parecida pero para la resta, su puesta en práctica en el aula depende de cada profesor.

La aproximación también se trabaja a lo largo de los dos cursos con actividades como: construir sumas o restas que no lleguen o pasen a un número determinado, etc.

Desarrollo de la sesión: Como en numeración, el proceso se puede hacer similar, recordando que no prima la velocidad, pero sí la discusión en la clase sobre las distintas maneras con que se llega a la solución. Como en el apartado anterior el maestro puede añadir o quitar lo que considere oportuno, así como regular su dificultad según se encuentre preparado su alumnado.

**c) Los problemas.** El objetivo que pretendemos es que ejerciten los mecanismos y estrategias aprendidos, por tanto los enunciados son sencillos y la dificultad de las operaciones a resolver y las cantidades a manejar deben sintonizar con lo trabajado en la semana. Los problemas en este ciclo son de carácter aditivo, se presentan con distintos tipos de enunciados teniendo en cuenta también el nivel de la clase (combinación, cambio y comparación. Los tipos de enunciados para el primer curso son de combinación y cambio, para el segundo curso introducimos los de comparación.

Desarrollo de la sesión: El maestro puede leerlos en voz alta dos veces, dejar un tiempo para que lo entiendan y lo resuelvan mentalmente, pudiendo ser la contestación oral o por escrito; siendo siempre interesante que se comente en la clase cómo se ha llegado a la solución. También pueden representarse, si es necesario.

**d) Los juegos y material didáctico.** Atendiendo al carácter lúdico mencionado, los juegos deben amoldarse, como los problemas, a los contenidos que se están trabajando en la semana. Las sesiones, dependiendo del tipo de juego, pueden desarrollarse con pequeños o grandes grupos. Cada juego viene presentado teniendo en cuenta los siguientes puntos: nivel, objetivos, reglas del juego y variantes que pueden hacerse. El profesor puede aumentar o disminuir la dificultad de los mismos, simplemente cambiando la magnitud de los números o la operación a trabajar.

En cuanto al material didáctico de C.M., existe material individual que tiene la ventaja de que el niño puede autocorregir sus fallos, así como material pensado para trabajar en grupos, que también puede tener la misma característica. La ventaja de los primeros es interesante puesto que ayudan a facilitar la labor del profesor, al mismo tiempo de que el niño puede seguir avanzando con autonomía. Presentamos algunos ejemplos: Llaves de aprendizaje (Arco), Repite y controla (Arco), Lógico piccolo. Matemáticas. "Método de aprendizaje autocorrectivo". La calculadora, Programas informáticos, por ejemplo el Clic. Existe otro material para participar en grupo, como: Parchís. Oca. Barajas. Dados.

**Respecto a la secuencia de las actividades.** La secuencia que seguimos a lo largo de la semana es la siguiente: el lunes ejercicios de numeración, martes ejercicios relacionados con las operaciones y estrategias, miércoles y jueves problemas orales y juegos y el viernes repaso de lo que quede más flojo de la semana. Normalmente al final de cada semana ponemos una nota para el profesor, en la que comentamos algunos puntos que pueden resultar orientativos respecto al trabajo que se está llevando a cabo con los ejercicios de la semana. La razón de la secuencia de estos apartados es la siguiente: en principio conviene trabajar el número puesto que son ejercicios que cumplen la función de preparar la operación y son los más sencillos y básicos, seguidamente las operaciones y estrategias que es el apartado más exigente en contenido y en actividad mental, con esta base, el miércoles y jueves se pueden aplicar estos conocimientos a los problemas y a los juegos, éstos últimos bajarán la tensión y lo harán más atractivo. Por supuesto, el profesor si lo encuentra oportuno, puede cambiar el orden que presentamos.

Al principio, es probable que no se pueda llevar a cabo la sesión entera, puesto que requiere entrenamiento y concentración y esta se consigue poco a poco; es conveniente que cada sesión, desde el primer día, se trabaje con un ambiente de tranquilidad y de motivación. Por último queremos señalar, que este cuadernillo constituye una guía de actividades para el profesor, de forma que su labor sea adaptarlo a las condiciones de su alumnado.

## E. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL C.M. EN EL 2º CICLO.

En este ciclo, entendemos que los alumnos ya tienen un mayor conocimiento del número natural siendo el principal objetivo el dominio de distintas actividades básicas, que seguidamente pasaremos a describir.

- a) Actividades básicas.** Entendemos por actividades básicas un conjunto de conocimientos sencillos que van a permitir sentar las bases para que pueda el niño sepa **inducir** los caminos para la resolución de las operaciones que se le presenten. El conocimiento de estas actividades le puede aportar al alumno, entre otras cosas, un enriquecimiento en alternativas a las que pueda optar para resolver una operación mentalmente, de forma que él sólo puede crear su estrategia que estará adaptada a su situación personal. Por otra parte, cuando llegue el momento oportuno, el trabajo con estas actividades puede facilitar, entender y hacer suyas, si es posible, ciertas estrategias que se les va a proporcionar que es conveniente que conozcan pues les pueden resultar más eficaces. Por ejemplo, si queremos presentar una estrategia para sumar el 11:  $67 + 11 = 67 + (10 + 1) = (67 + 10) + 1 = 77 + 1 = 88$ , esta estrategia conlleva los siguientes pasos o actividades básicas, como: descomposición de un sumando, uso de la propiedad asociativa, y sumar dos veces, la primera sumar el 10 y la segunda sumar la unidad.

A continuación vamos a presentar ejemplos de este tipo de actividades para las dos estructuras aditivas y multiplicativas que vamos a trabajar en este curso.

a. Campo aditivo:

Actividades relacionadas con el conocimiento del número:

- Conteos ascendente y descendente
- Nombra el nº anterior o siguiente a un número
- Busca el nº menor o el mayor entre dos o varios números
- Descomponer un nº en dos o tres sumandos
- Buscar un número que esté entre otros dos
- Ordenar varios números, leer y escribir números
- Observar qué ocurre cuando se cambian decenas por centenas
- Descomponer los números en decenas y unidades:  $13 = 10 + 3$ .
- Dar varias cifras y que construyan el mayor y el menor
- Relacionar unidades con decenas y centenas

Actividades relacionadas con las operaciones y propiedades:

- Tablas de sumar y restar (\*)
- Propiedad conmutativa. Resolver:  $7 + 12$ ,  $12 + 7$ ,  $23 + 7$ ,  $7 + 23$
- Empezar sumando por los sumandos mayores:  $2 + 17 = 17 + 2$
- Propiedad asociativa. Resolver:  $3 + (4 + 5)$ ,  $(3 + 4) + 5$
- Calcular los dobles de: 2, 3, 4, 5
- Empezar sumando dos números que den 10:  $9 + 2 + 8$ ,  $5 + 6 + 4$ , .Empezar sumando dos números que den 20:  $9 + 2 + 18$ ,  $5 + 16 + 14$ ,... que den 30, 40,...
- Completa decenas:  $7 + 5 = (7 + 3) + 2$
- Empezar sumando los números iguales:  $8 + 2 + 2$ ,  $4 + 3 + 3$ ,...
- Inventar dos sumas o restas que den el mismo resultado
- Sumas y restas acabadas en 0,  $30 + 20$ ,  $40 - 30$
- Sumas y restas acabadas en 5,  $35 + 20$ ,  $35 - 20$
- Empezar restando primero los números que den un resultado acabado en cero:  $47 - 7$ ,  $68 - 8$ ,...
- Empezar por un número (12) y sumarle 10: 12, 22, 32, 42,...

(\*) En cuanto a las tablas de sumar y restar, ya trabajadas en el primer ciclo, hacemos un repaso de las mismas mediante actividades como:

- Resuelve mentalmente las siguientes operaciones:  $(18+1 = 19, 19-18 = 1, 19-1 = 18)$ ,  $(18+2 = 20, 20-18 = 2, 20-2 = 18)$ ,  $(18+3 = 21, 21-18 = 3, 21-3 = 18)$ ,  $(18+4 = 22, 22-18 = 4, 22-4 = 18)$ ,  $(18+5 = 23, 23-18 = 5, 23-5 = 18)$ ,  $(18+6 = 24, 24-18 = 6, 24-6 = 18)$ ,  $(18+7 = 25, 25-18 = 7, 25-7 = 18)$ ,  $(18+8 = 26, 26-18 = 8, 26-8 = 18)$ ,  $(18+9 = 27, 27-18 = 9, 27-9 = 18)$

b. Campo multiplicativo:

En este caso, lo relacionado con el número está ya trabajada en el primer apartado, por tanto sería, sobre todo, aquellas actividades relacionadas con las propias

operaciones y sus propiedades. Queremos señalar que en este ciclo, debe operarse con números pequeños y que uno de los dos factores tenga sólo una cifra, de forma que las multiplicaciones y divisiones parciales les resulten asequibles para el nivel que pueden presentar los niños en este ciclo. Veamos algunos ejemplos de este tipo de actividades:

- Tablas de multiplicar y dividir (\*)
- Descomponer en factores el número: 9, 6, 12,...
- Calcular los dobles de un número: 2, 3, 4, 5,...
- Calcular la mitad de un número: 12, 6, 8, 22,...
- Calcular los triples de un número: 2, 3, 4, 5,...
- Propiedad conmutativa. Resolver:  $3 \times 12$ ,  $12 \times 3$ ,  $2 \times 20$ ,  $20 \times 2$ ,...
- ¿Cuál es el factor que falta?:  $3 \times ? = 24$ ,  $2 \times ? = 18$ ,  $? \times 4 = 12$

(\*) Las tablas de multiplicar y dividir, se trabajan siguiendo la misma secuencia que se realizó en el libro del primer ciclo, primero es necesario que entiendan el significado de dichas operaciones antes de memorizarlas. Una vez conseguido este objetivo, se siguen los siguientes pasos, por ejemplo para la tabla del 7: multiplicar el 7 ordenadamente:  $7 \times 1$ ,  $7 \times 2$ ,  $7 \times 3$ ,...etc., multiplicar el 7 cambiando el orden anterior:  $1 \times 7$ ,  $2 \times 7$ ,  $3 \times 7$ ,...etc., multiplicar el 7 sin ordenar los números:  $7 \times 2$ ,  $1 \times 7$ ,  $7 \times 3$ ,...etc., memorizar la tabla del 7).

Una vez trabajada esta parte, se seguirán haciendo ejercicios de memorización de forma similar a como lo presentamos en el campo aditivo:

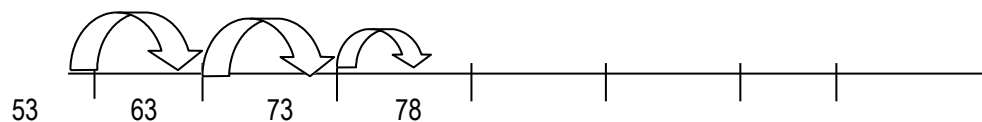
- Resuelve y memoriza las siguientes operaciones: ( $7 \times 1 = 7$ ,  $7 : 1 = 7$ ), ( $7 \times 2 = 14$ ,  $14 : 7 = 2$ ,  $14 : 2 = 7$ ), ( $7 \times 3 = 21$ ,  $21 : 7 = 3$ ,  $21 : 3 = 7$ ), ( $7 \times 4 = 28$ ,  $28 : 7 = 4$ ,  $28 : 4 = 7$ ), ( $7 \times 5 = 35$ ,  $35 : 7 = 5$ ,  $35 : 5 = 7$ ), ( $7 \times 6 = 42$ ,  $42 : 7 = 6$ ,  $42 : 6 = 7$ ), ( $7 \times 7 = 49$ ,  $49 : 7 = 7$ ), ( $7 \times 8 = 56$ ,  $56 : 7 = 8$ ,  $56 : 8 = 7$ ), ( $7 \times 9 = 63$ ,  $63 : 7 = 9$ ,  $63 : 9 = 7$ )

Desarrollo de la sesión: El maestro puede escribir en la pizarra la actividad o decirla en voz alta y el alumno puede contestar en voz alta la respuesta cuando lo indique el profesor, o escribir sólo el resultado en un papel, para comprobar la respuesta posteriormente. En cuanto a la memorización de las tablas se puede hacer en común, según como determine el profesor, pero teniendo en cuenta que todos los alumnos deben dominar todas las tablas.

**b) Estrategias.** Aunque no existen estrategias preestablecidas para todos los casos, hemos seleccionado y presentado según su grado de dificultad, avalados por distintos grupos de profesores de estos niveles, aquellas que nos han parecido más idóneas para los cursos que tratamos y más sencillas en su procedimiento. No obstante, siempre hay que tener en cuenta las que utilizan los niños, que por este motivo, si son correctas y útiles, son las primeras que el profesor debe tener en cuenta.

### a. Estrategias aditivas.

1. Como con lápiz y papel.  $57 + 26 \Rightarrow 7 + 6 = 13$ , 3 y me llevo 1,  $5 + 2 = 7$ , más 1 que me llevo 8, luego  $80 + 3 = 83$
2. Sumar el 11:  $69 + 11 = 69 + (10 + 1) = (69 + 10) + 1 = 79 + 1 = 80$
3. Línea numérica, sumas. Se trata de resolver sumas de forma gradual. Veamos un ejemplo:  $57 + 26$  se haría  $57$ ,  $67$ ,  $77 + 6 = 83$



4. Descomposición de un dato, sumas:  $57 + 26 = 57 + 20 + 6 = (57 + 20) + 6 = 77 + 6 = 83$
5. Recolocación suma:  $53 + 26 + 17 = (53 + 17) + 26 = 70 + 26 = 86$
6. Descomposición para buscar los dobles:  $53 + 50 = 50 + 3 + 50 = (50 + 50) + 3 = 100 + 3 = 103$
7. Sumas de números terminados en ceros.  $600 + 700 + 4500 = 6 + 7 + 45 \text{ cientos} = 5800$
8. Sumar el 9: Implica sumar diez y restar uno.  $13 + 9 = 13 + 10 - 1 = (13 + 10) - 1 = 23 - 1 = 22$
9. Restar el 9:  $38 - 9 = 38 - (10 + 1) = (38 - 10) - 1 = 28 - 1 = 27$
10. Como con lápiz y papel, restar:  $34 - 18 \Rightarrow 14 - 8 = 6$ , y me llevo 1,  $1 + 1 = 2$ , de 2 a 3, 1. Luego dará 16
11. Restas de números terminados en ceros:  $7000 - 4000 = 7 - 4 \text{ miles} = 3000$

## b. Estrategias multiplicativas

1. Multiplicar por 2. Sumar dos veces.  $2 \times 12 = 12 + 12 = 24$
2. Multiplicar por 3. Una buena estrategia es recurrir a la suma de dobles, de aquí, multiplicar por tres un número es añadirle el doble  $12 \times 3 = 12 + 2 \times 12 = 12 + 24 = 36$
3. Multiplicar por 4. Recurriendo otra vez a la suma de dobles, multiplicar por cuatro es doblar el doble  $12 \times 4 = 2(12 + 12) = 2 \times 24 = 48$

Desarrollo de la sesión: La presentación de cada estrategia se realizará como lo juzgue conveniente el profesor, bien desarrollando cada paso o bien intuitivamente. Una vez entendida, se le presentarán distintos ejemplos similares para que la aplique. Como en numeración, el proceso se puede hacer similar, recordando que no prima la velocidad, pero sí la discusión en la clase sobre las distintas maneras con las que los alumnos llegan a la solución.

- c) **Los problemas orales**. El objetivo que pretendemos con este tipo de actividad es que ejerciten los mecanismos y estrategias aprendidos, siendo otra manera de completar la aplicabilidad de este tipo de cálculo. Los enunciados son sencillos y la dificultad de las operaciones a resolver y las cantidades a manejar deben sintonizar con lo trabajado en la semana. Los problemas en tercer curso son la mayoría de estructura aditiva (combinación, cambio y comparación), los de cuartos curso, son aditivos más complicados y multiplicativos con números acordes a las estrategias que exponemos. El tipo de enunciado de estos últimos pertenecen al modelo de razón (Por ejemplo: Cinco amigos tenían 3 coches cada uno. ¿Cuántos coches tenían entre todos los amigos?)

Desarrollo de la sesión: El maestro puede leerlos en voz alta dos veces, dejar un tiempo para que los entiendan y los resuelvan mentalmente, pudiendo ser la contestación oral o por escrito; es importante, como siempre, que se comente en la clase cómo se ha llegado a la solución. Cuando se manejan números de más de dos cifras, pedir la solución aproximada de dicho cálculo.

- d) **Los juegos y material didáctico**. Atendiendo al carácter lúdico mencionado, los juegos deben amoldarse, como los problemas, a los contenidos que se están trabajando en la semana. Las sesiones, dependiendo del tipo de juego, pueden desarrollarse con pequeños o grandes grupos. Cada juego viene presentado teniendo en cuenta los siguientes puntos: nivel, objetivos, reglas del juego y variantes que pueden hacerse. El profesor puede aumentar o disminuir la dificultad de los mismos, simplemente cambiando la magnitud de los números o la operación a trabajar.

En cuanto al material didáctico de C.M., existe material individual que tiene la ventaja de que el niño puede autocorregir sus fallos, así como material pensado para trabajar en grupos, que también puede tener la misma característica. La ventaja de los primeros es interesante puesto que ayudan a facilitar la labor del profesor, al mismo tiempo de que el niño puede seguir avanzando con autonomía. Presentamos algunos ejemplos, como: Llaves de aprendizaje (Arco), Repite y controla (Arco), Lógico piccolo. Matemáticas. "Método de

aprendizaje autocorrectivo". Material informático, como programas informáticos, por ejemplo el Clic. Existe otro material para participar en grupo, como: parchís, oca, barajas, dados. Por último, la calculadora puede ser de gran ayuda, tanto para autocorrección como para investigación de resultados.

En el primer curso trabajamos el cálculo aditivo con la aplicación de una serie de estrategias que nos han parecido más idóneas para este nivel. En el segundo curso del ciclo, con una metodología similar, profundizamos un poco más en el cálculo aditivo y empezaremos con las primeras bases del cálculo multiplicativo, sin olvidar el trabajo con la aproximación.

El cuaderno que presentamos consta de tres apartados, en el primero y segundo hacemos la programación para cada día de la semana de cada curso del ciclo, un total de treinta semanas por curso, que conlleva distintos apartados que a continuación detallamos: actividades previas, estrategias, problemas orales y juegos. La tercera parte del cuaderno comprende una serie variada de juegos, con el objetivo de que elija el profesor los que juzgue más convenientes.

## F. TRATAMIENTO DEL CÁLCULO APROXIMADO EN EL SEGUNDO CICLO

Verdaderamente este tipo de cálculo es la aplicación práctica en la vida diaria del cálculo mental que estamos trabajando, puesto que habitualmente nos encontramos en circunstancias en donde debemos llevar a cabo ciertos cálculos y sólo podemos hacer uso de la mente para su resolución. En este ciclo, también seguiremos trabajando el cálculo aproximado mediante ejercicios preparatorios y resolveremos cálculos aditivos. Es importante no desaprovechar cualquier cálculo aditivo de más de dos cifras que surja, para realizar este cálculo, ya sea en un problema de la clase de Matemáticas, o en otro área y conviene establecer discusiones respecto a las distintas contestaciones que den los niños. Es recomendable, si se puede con el nivel del curso, que sean los alumnos sean conscientes del error que se comete en estas aproximaciones y lo comparen con el valor exacto, ya sea mediante la resolución de la operación mediante cálculo mental o con la calculadora. Las operaciones que se trabajarán durante este ciclo son las aditivas. Veamos algunos ejemplos de actividades:

- Buscar un número cercano (anterior o posterior) a un número determinado
- Nombrar entre una serie de números el que está más cerca de la decena, centena, etc.
- Redondear a la decena más próxima: 18, 22,...
- Aproximar a la centena más cercana: 389 será 400, 512 será 500
- Sumar  $525 + 470$  : Aproximadamente  $500 + 500 = 1000$
- Restar  $358 - 182$  : Aproximadamente  $400 - 200 = 200$
- Resolver problemas primeramente con soluciones aproximadas.

## RESPECTO A LA SECUENCIA DE LAS ACTIVIDADES

La secuencia que seguimos a lo largo de la semana es la siguiente: los lunes ejercicios relacionados con el conocimiento del número, los martes ejercicios relacionados con el aprendizaje de tablas o presentación de estrategias, miércoles, dedicado a estrategias de carácter libre y problemas orales, los jueves, juegos y problemas orales y el viernes repaso de lo que quede más flojo de la semana. Normalmente al final de cada semana ponemos una nota para el profesor, en la que comentamos algunos puntos que pueden resultar orientativos respecto al trabajo que se está llevando a cabo con los ejercicios de la semana. La razón de la secuencia de estos apartados es la siguiente: en principio conviene trabajar el número puesto que son ejercicios que cumplen la función de preparar la operación y son los más sencillos y básicos, seguidamente las operaciones y estrategias que es el apartado más exigente en contenido y en actividad mental. Con esta base, el miércoles, el niño puede copiar o crear una determinada estrategia, a la vez que puede aplicar estos conocimientos a los problemas y a los juegos del jueves, éstos últimos bajarán la tensión y lo harán más atractivo. Por supuesto, el profesor si lo encuentra oportuno, puede cambiar el orden que presentamos.

Muchas de las actividades las empezamos dando unas pautas con varios ejemplos y ponemos puntos suspensivos para que el profesor puede añadir más ejercicios similares.

Al principio, es probable que no se pueda llevar a cabo la sesión entera, puesto que requiere entrenamiento y concentración y ésta se consigue poco a poco; es conveniente que cada sesión, desde el primer día, se trabaje con un ambiente de tranquilidad y de motivación.

Por último, queremos señalar, que esperemos se cumpla el objetivo para el que está pensado este cuadernillo: servir de ayuda al profesor, mediante esta guía de actividades, para facilitarle la puesta en práctica en su aula del cálculo mental. Evidentemente el profesor deberá adaptarla a las circunstancias concretas de su clase.

## G. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL C.M. EN EL 3<sup>ER</sup> CICLO.

Si preguntamos a un grupo de personas sobre el proceso que han seguido para resolver un determinado cálculo aritmético y que nos concreten los pasos de los que se han valido para llegar al resultado, nos podemos encontrar con un gran abanico de respuestas. Estas cuestiones se han ido planteando a lo largo de estos últimos años a diversos colectivos: maestros, alumnos de la E.U.E y alumnos de doctorado. Veamos algunos ejemplos de respuestas más habituales correspondientes a la resolución de la siguiente suma:

$$\begin{aligned}58 + 97 &= 5 \text{ y } 9 = 14, 8 \text{ y } 7 = 15, \text{ me llevo } 1, 155 \\ &= 8 \text{ y } 7 = 15, 5 \text{ y } 9 = 14, \text{ me llevo } 1, 155 \\ &= (58 + 90) + 7 = 148 + 7 = 155 \\ &= 8 + (50 + 97) = 8 + 147 = 155 \\ &= (50 + 90) + 8 + 7 = 140 + 15 = 155 \\ &= (58 - 3) + (97 + 3) = 55 + 100 = 155 \\ &= (58 + 2) + (97 - 2) = 60 + 95 = 155 \\ &= 97, 107, 117, 127, 137, 147 + 8 = 155 \\ &= (5 + 9) \times 10 + (8 + 7)\end{aligned}$$

Analizando cada uno de estos procedimientos, vemos que unos resuelven la operación como si estuvieran haciendo el algoritmo escrito (como con lápiz y papel), otros, para facilitarse los cálculos, descomponen uno o dos de los sumandos y posteriormente los asocian, otros perciben y calculan lo que queda para la decena más próxima y suman - restan el número que les interesa, otros van sumando de diez en diez, etc. Al mismo tiempo que se sirven de otros conocimientos, como: recordatorio de las tablas, manejo de propiedades, valor relativo de los números, etc.

Entendemos, por tanto, que cada procedimiento va a depender, en gran medida, del dominio de una serie de contenidos básicos, que son los que van a influir en la elección de la estrategia de resolución, de forma que cada individuo tenderá, consciente o inconscientemente, a hacer uso de aquellas componentes básicas que mejor domine o le resulten más fáciles o manejables. De acuerdo con estas premisas, creemos que el trabajo del C.M. en el aula debe desarrollarse partiendo del dominio de determinados contenidos y su posterior puesta en práctica, como:

- Lo que denominamos conocimientos básicos puesto que sin ellos sería difícil operar, como son los relacionados con el campo numérico con el que trabajamos y con el entorno que conlleva la resolución de las operaciones que se van a efectuar.
- Presentación de diversas estrategias, cuya misión es facilitar y simplificar los cálculos.
- Por último, la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos, a través de ejercicios, problemas, juegos y material didáctico.

## CONOCIMIENTOS BÁSICOS PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO MENTAL.

En este apartado, distinguiremos los conocimientos básicos relacionados con el número y las operaciones, al mismo tiempo que propondremos algunas orientaciones metodológicas que consideramos pueden ayudar en la puesta en práctica en el aula.

**Conocimientos básicos relacionados con el número.** Conocimientos que abarcan la profundización en el número natural y las relaciones entre distintos campos numéricos o equivalencias.

- a) **Numeración.** Buena parte de la base del C.M. descansa en este conocimiento, ya que no se puede concebir ninguna modificación del número para optar por cualquier estrategia, sin conocerle en profundidad; de hecho, vemos cómo en los ejemplos de resolución propuestos, se modifican las cantidades numéricas iniciales a base de: descomposiciones, compensaciones, sustituciones, etc. La mejor manera de ejercitar su profundización sería mediante actividades, dependiendo su dificultad del nivel del alumnado, como:

Ejemplos de actividades. Conteos ascendente y descendente (de 2 en 2, de 3 en 3, de 5 en 5, de 10 en 10,... Empezar por un número (12) y sumarle o restarle 10 (11,12,...). Nombrar el nº anterior o siguiente a un número (500000). Buscar el nº menor o el mayor entre dos o varios números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales). Buscar un número que esté entre otros dos (naturales, enteros, fraccionarios y decimales). Ordenar varios números (naturales, enteros, fraccionarios y decimales). Leer y escribir números. Nombrar la decena (centena) anterior a un número. Observar qué ocurre cuando se cambian decenas por centenas. Descomponer un nº en dos o tres sumandos o en restas (productos y divisiones). Dar varios dígitos y que construyan el número mayor y el menor. Relacionar unidades con decenas y centenas. Cambiar las decenas por centenas y ordenarlos. ¿Cuál es la unidad de mil anterior a: 4500231, 7612, 3289700? Descomponer un nº en dos números de dos cifras pares o impares, etc. ¿Cuántas decenas, centenas, etc. hay en los siguientes números?

Aspectos metodológicos. A los niños les gusta hacer cualquier tipo de series sencillas. Las series decrecientes, en concreto, restar el 3, les resulta difícil. Hacer descomposiciones de un número les resulta un ejercicio agradable y les agrada complicarlas, incluso a los más pequeños. Desarrollo de la sesión: El maestro puede decir en voz alta la actividad, o escribirla en la pizarra si lo cree conveniente, esta segunda forma, puede facilitar las contestaciones. Los alumnos pueden contestar en alto o escribirlo en un papel.

- b) **Equivalencias.** El mundo de las equivalencias puede facilitar extraordinariamente la consecución de resultados, ya que permite sustituir, cuando es necesario, unos números por otros de distintos campos numéricos.

Ejemplos de actividades. Comprensión y posterior memorización de:

- Números enteros por fracciones:  $5 = 10/2$ ,  $25 = 100/4$ ,  $50 = 100/2$ ,  $75 = 3/4 \times 100$ ,  $15 = 10 + 10/2$ .  $25 = 10 \times 2 + 10/2$ ,...
- Números decimales por fracciones:  $0,1 = 1/10$ ,  $0,5 = 1/2$ ,  $0,25 = 1/4$ ,  $0,2 = 2/10$ ,  $0,125 = 1/8$ ,  $0,75 = 3/4$ ,  $1,25 = 5/4$ ,  $1,5 = 3/2$ ,  $2,5 = 10/4$ .
- Porcentajes por fracciones o decimales:  $10\% = 1/10 = 0,1$ ,  $25\% = 1/4 = 0,25$ ,  $50\% = 1/2 = 0,5$ ,  $75\% = 3/4 = 0,75$ ,  $80\% = 0,8 = 4/5$

Aspectos metodológicos. Una vez entendidas y memorizadas estas equivalencias, se aplicarán a la resolución de operaciones como: multiplicar por 0,5 (1/2), 0,25 (1/4), 0,2 (2/10), 0,125 (1/8), 2,5 (10/4), 75% 200, 75% x = (3/4) x,...

**Conocimientos básicos relacionados con las operaciones.** En este apartado incluimos el resto de conocimientos básicos que hacen posible la resolución de las mencionadas estrategias y que tienen que ver directamente con los cálculos, como son: la memorización de las tablas aditivas y multiplicativas, algunos productos notables y una serie de propiedades de las que se hace uso en la resolución de las operaciones.

- a) **Las tablas.** Entendemos por tablas a las 11 x 11 combinaciones aritméticas básicas que se pueden hacer con los 10 dígitos, Para el aprendizaje de las mismas, es conveniente que sea el niño el que descubra y escriba los resultados en una tabla de doble entrada y que posteriormente los memorice. Para la obtención de la tabla de sumar-restar, se puede hacer uso de conteos progresivos (1, 2, 3...), descomposiciones, composiciones de números y propiedades de la suma, como la conmutatividad (que permite la solución de la mitad de la tabla), la identidad, la asociatividad, etc. En la tabla de doble entrada, la resta entre la casilla (ij) y la fila i se encuentra en la columna j ( $6 + 8 = 14$ ,  $14 - 6 = 8$ )

Para la obtención de la tabla de multiplicar-dividir, se puede hacer uso de: suma de sumandos iguales, descomposición, composiciones de números, dobles y mitades y propiedades como, la: identidad, la conmutatividad (que facilita la mitad de las operaciones) y distributividad, que permiten facilitar la solución de estos cálculos básicos. En la tabla de doble entrada, la división entre la casilla (ij) y la fila i se encuentra en la columna j ( $7 \times 8 = 56$ ,  $56 : 7 = 8$ ).

Aspectos metodológicos. La memorización de las tablas de sumar y restar debe hacerse conjuntamente, por ejemplo:  $8 + 7 = 15$ ,  $15 - 8 = 7$ ,  $15 - 7 = 8$ . puesto que son operaciones complementarias y conlleva seguridad para el niño, sobre todo a la hora de resolver restas con llevadas. Hay que tener presente que los resultados más fáciles de recordar coinciden cuando los dos sumandos son pares o cuando éstos son iguales. Un ejemplo para practicar las tablas fuera del aula, puede ser, hacer que sumen los niños todos los días pequeñas cantidades, por ejemplo, las matriculas de los coches, primero de izquierda a derecha y después de derecha a izquierda, comprobando que les da la misma cantidad.

En cuanto a la memorización de las tablas de multiplicar y dividir, debe hacerse también conjuntamente. Por ejemplo:  $8 \times 7 = 56$ ,  $56 : 8 = 7$ ,  $56 : 7 = 8$ . En la multiplicación son más fáciles de memorizar las tablas del 5 y del 10. Un ejemplo para practicar, puede ser, también con las matriculas de los coches, por ejemplo, multiplicando los dos primeros números y los dos últimos y sumando o restando entre sí los resultados.

Los números más difíciles de retener en las cuatro tablas consideradas parece que son los que tienen que ver con el 6, 7, y 8. Hay autores que recomiendan la memorización de las tablas hasta el 12 (Alfred Hope, J. 1984), lo que nos parece interesante, puesto que son hechos fáciles de recordar y facilitan numerosos cálculos.

- b) **Propiedades.** Si hacemos un cálculo podemos darnos cuenta de las numerosas veces que hacemos uso de alguna o algunas de ellas, consciente o inconscientemente. Las más usuales para las dos operaciones son:
- la identidad :  $a + 0 = a$ ;  $a \times 1 = a$
  - la conmutativa :  $a + b = b + a$ ;  $a \times b = b \times a$
  - la asociativa :  $(a + b) + c = a + (b + c)$ ;  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
  - la invariancia :  $a + b = (a + n) + (b - n)$ ;  $a \times b = a \times n \times b \times 1/n$
  - la distributiva:  $a \times (b \pm c) = a \times b \pm a \times c$

Ejemplos de actividades: Propiedad conmutativa (Resolver:  $23 + 8$ ,  $8 + 23$ ). Propiedad asociativa (Resolver:  $3 + (14 + 10)$ ,  $(3 + 14) + 10$ ). Resolver las siguientes sumas y compara las soluciones:  $3 + 0$ ,  $12 + 0$ ,  $10 + 0$ ,  $20 + 0$ ,... Resolver las siguientes operaciones y comparar los resultados:  $7 + 12$ ,  $12 + 7$ ,  $23 + 7$ ,  $7 + 23$ . Calcular el término que falta:  $2 + 17 = 17 + ?$ . Resolver estas dos operaciones y describir las semejanzas y diferencias:  $3 + (4 + 5)$ ,  $(3 + 4) + 5$ . Resuelve las dos partes y observa lo que ocurre con cada una: a)  $7 + 9$ , b)  $(7 + 2) + (9 - 2)$ . Propiedad conmutativa. Resolver:  $3 \times 12$ ,  $12 \times 3$ ,  $2 \times 20$ ,  $20 \times 2$ ,... Observa lo que te da los siguientes resultados de estas operaciones y explica por qué: a)  $(4 \times 5) \times 2$  y b)  $4 \times (5 \times 2)$ . Resolver los siguientes productos y comparar las soluciones:  $3 \times 1$ ,  $12 \times 1$ ,  $1 \times 20$ ,  $20 \times 1$ ,... Resolver los siguientes productos y compara las soluciones:  $3 \times 12$ ,  $12 \times 3$ ,  $2 \times 20$ ,  $20 \times 2$ . Resolver los siguientes productos y comparar las soluciones: a)  $8(5 + 4)$  y b)  $40 + 32$

Aspectos metodológicos. Es importante partir de su comprensión, para lo cual sería recomendable que el profesor las presentara en la pizarra y los alumnos traten de entenderlas,

# JUNTA DE ANDALUCÍA

para posteriormente memorizarlas y saber aplicarlas a otros números. Los profesores nos comentan que cuando se aplica la propiedad asociativa, a los niños les cuesta retener los tres números; suelen ser lentos para las propiedades conmutativa y asociativa y se observan dificultades en la aplicación de la propiedad distributiva, tanto por parte de los alumnos de E. Primaria como por los de la E.S.O.

- c) **Productos notables.** A la hora de hacer determinados cálculos, puede ser muy útil recordar una serie de productos y divisiones, que simplifiquen la resolución. Por tanto sería interesante realizar actividades de memorización de: dobles, mitades, tercios, cuartos y cuadrados de los primeros números (siempre dependiendo del nivel del curso).

Ejemplos de actividades. Calcular los dobles de un número: 2, 3, 4, 5,... Calcular la mitad de un número: 12, 6, 8, 22,... Calcular los triples de un número: 2, 3, 4, 5,... Calcular el doble del doble de un número. ¿A qué equivale multiplicar dos veces por dos? ¿A qué equivale dividir dos veces por dos?

## ESTRATEGIAS MÁS HABITUALES.

Existen numerosas estrategias que facilitan la resolución mental de las distintas operaciones; abarcando, según el nivel, los distintos campos numéricos. De esta manera, el alumno procede a "aprender" o hacer suyas aquellas que más se adaptan a su esquema mental, sin necesidad de tener que descubrirlas personalmente, algo que para la mayoría del alumnado tardaría mucho tiempo en descubrir. Nosotros hemos seleccionado, una panoplia de estrategias teniendo en cuenta el estudio de su grado de dificultad y el asesoramiento de distintos grupos de profesores de estos niveles; después el profesor es el que debe seleccionar aquellas que entiendan sean más interesantes para su grupo. No obstante, siempre hay que tener en cuenta las que utilizan los niños, que por este motivo, si son correctas, son las primeras que el profesor debe potenciar.

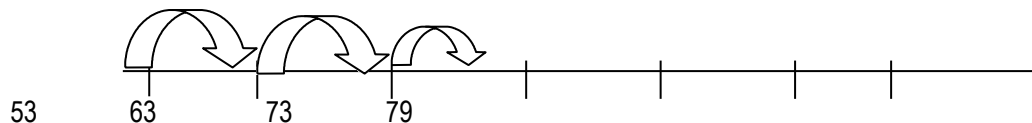
**Estrategias aditivas:** Las hemos agrupado en distintos apartados teniendo en cuenta el tratamiento de los datos. La dificultad es proporcional al número de actividades básicas que componen cada estrategia, teniendo en cuenta que, las más fáciles, corresponden a las de "cómo con lápiz y papel" para sumas y restas con llevadas y la de línea numérica para suma con llevadas. En un segundo término de dificultad se encuentran las estrategias de descomposición de un dato, siendo las más difíciles las de compensación. No obstante cada niño puede tener su particular grado de dificultad consecuente con sus conocimientos y habilidades.

### 1. Artificios:

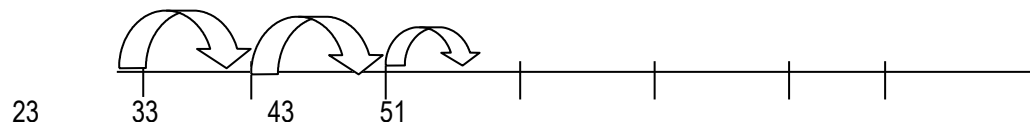
- Como con lápiz y papel:  $57 + 26 \Rightarrow 7 + 6 = 13$ , 3 y me llevo 1 y retengo el 3,  $5 + 2 = 7$  y 1 que me llevo 8. Total 83
- Como con lápiz y papel:  $51 - 23 \Rightarrow$  de 3 a 11, 8 me llevo 1 y retengo el 8,  $2 + 1 = 3$ , de 3 a 5 = 2, luego 28

### 2. Línea numérica o saltos de diez. Se trata de resolver sumas o restas de forma gradual

- Suma sin llevadas:  $53 + 26$  se haría 53, 63,  $73 + 6 = 79$



- Suma, con llevadas:  $57 + 26$ , 57, 67,  $77 + 6$ , 83
- Resta, sin llevadas:  $48 - 23$ : 23, 33, 43, (20) a 48, 25
- Resta, con llevadas:  $51 - 23$ , 23, 33, 43,  $51 - 43 = 28$



3. Descomposiciones: (uso de cantidades menores que las dadas)
  - De un dato:  $57 + 26 = 57 + 20 + 6 = (57 + 20) + 6 = 83$
  - De un dato a complementar:  $57 + 26 = 57 + 23 + 3 = 80 + 3 = 83$
  - De un dato por defecto:  $57 + 26 = 57 + (30 - 4) = (57 + 30) - 4 = 87 - 4 = 83$
  - De los dos datos:  $57 + 26 = 50 + 7 + 20 + 6 = (50 + 20) + (7 + 6) = 70 + 13 = 83$ ;  $58,4 + 7,5 = (58 + 7) + (0,4 + 0,5) = 65 + 0,9 = 65,9$
  - De un dato:  $51 - 23 = 50 + 1 - 23 = (50 - 23) + 1 = 27 + 1 = 28$
  - De un dato segregando:  $51 - 23 = 51 - 20 - 3 = (51 - 20) - 3 = 31 - 3 = 28$
  - De un dato segregando, resta haciendo la misma terminación:  $51 - 23 = 51 - 21 - 2 = (51 - 21) - 2 = 30 - 2 = 28$
  
4. Recolocación. Se trata de recolocar mentalmente los números para agruparlos según las familias de la unidad seguida de ceros:  $47 + 86 + 53 + 14 = (47 + 53) + (86 + 14)$ ;  $35 + 27 + 25 = (35 + 25) + 27 = 60 + 27 = 87$ .
  
5. Compensaciones: Mediante el incremento de uno o de los dos datos compensando adecuadamente el resultado
  - Compensación:  $57 + 26 = (57 + 3) + (26 - 3) = 60 + 23 = 83$
  - Compensación:  $51 - 23 = (51 - 1) - (23 - 1) = 50 - 22 = 28$

## Estrategias multiplicativas:

1. Artificios:
  - Como con lápiz y papel:  $37 \times 23 \Rightarrow 3 \times 7 = 21$ , me llevo 2,  $3 \times 3 = 9$  le sumo 2 y me da 11. Primera línea 111.  $2 \times 7 = 14$ , me llevo 1,  $2 \times 3 = 6$  le sumo 1 y me da 7. Segunda línea 74  $\Rightarrow 111 + 74$  (corriendo un lugar) = 851
  - Multiplicación de números terminados sólo por unos:  $32 \times 11 = 3(3 + 2) \times 2 = 352$ ;  $89 \times 11 = (8 + 1)(8 + 9) \times 9 = 979$
  - Multiplicación por números 101, 1001:  $38 \times 101 = 3838$ ,  $384 \times 1001 = 384384$
  
2. Descomposiciones. (uso de cantidades menores que las dadas)
  - a. Aditivas
    - Distribuir:  $48 \times 5 = (40 + 8) \times 5 = 200 + 40 = 240$ ;  $8 \times 99 = 8 \times (100 - 1) = 800 - 8 = 792$ .
    - Cuadrados:  $25 \times 26 = 25 \times (25 + 1) = 650$ ;  $15 \times 16$  entonces  $16^2 = 256$  y  $256 - 16 = 240$  [(16-1) x 16]
    - Cuarto:  $48 \times 1,25 = 48 \times (1 + 1/4) = (48 + 12) = 60$
    - Mitades:  $48 \times 1,5 = 48 (1 + 1/2) = (48 + 24) = 72$
    - Multiplicaciones por 5, 15, 25, 35,... por un número impar:  $5 \times 19 = 5 (18 + 1) = 5 \times 18 + 5 = 10 \times 9 + 5 = 95$ ,  $15 \times 21 = 15 (20 + 1) = 30 \times 10 + 15 = 315$ ;
    - Multiplicación por 15 ( $10 + 10/2$ ), 25 ( $10 \times 2 + 10/2$ ), 75 ( $100/2 + 50/2$ ):  $48 \times 25 = 48 (10 \times 2 + 10/2) = 480 \times 2 + 480/2 = 960 + 240 = 1200$

- b. Multiplicativas
- Multiplicación por 12, 15, 22, 33,  $37 \times 12 = 37 \times 3 \times 4 = 111 \times 4 = 444$
  - División descomponiendo el divisor en factores:  $75: 15 = 75: 3 \times 5 = 5$
  - División descomponiendo el dividendo en factores:  $90: 3 = (30 \times 3): 3 = 30$ ;  $1500: 25 = 15 \times (100 / 25) = 15 \times 4 = 60$
3. Compensaciones. Mediante el incremento de uno o de los dos datos compensando adecuadamente el resultado.
- Doble y mitad:  $28 \times 35 = 14 \times 70 = 980$ ;  $35 \times 24 = 70 \times 12 = 840$
4. Sustituciones
- Multiplicar por 5 ( $10/2$ ), 25 ( $100/4$ ),  $75(3/4 \cdot 100)$ , 125 ( $1000/8$ ), etc. (teniendo presente ser divisor de un dato):  $48 \times 5 = 48 \times 10/2 = 24 \times 10 = 240$ ;  $16 \times 25 = 16 \times 100/4 = 400$
  - Multiplicar por 0,5 ( $1/2$ ), 0,25 ( $1/4$ ), 0,2 ( $2/10$ ), 0,125 ( $1/8$ ), 0,75 ( $3/4$ ), 1,25 ( $5/4$ ), 1,5 ( $3/2$ ), 2,5 ( $10/4$ ) (teniendo presente ser divisor del otro dato):  $48 \times 0,25 = 48 \times 1/4 = 12$ ;  $48 \times 0,125 = 48 \times 1/8 = 6$ ;  $48 \times 0,75 = 48 \times 3/4 = 12 \times 3 = 36$
  - División por: 5( $10/2$ ), 25( $100/4$ ),  $75(3/4 \cdot 100)$ , 125( $1000/8$ ), etc. (cuando el divisor es múltiplo o parte alicuota de 10, 100, 1000):  $90 : 5 = 90 \times 2/10 = 180/10 = 18$ ;  $80:25 = 80 \times 4/100 = 3,2$
  - División por 0,5 ( $1/2$ ), 0,25 ( $1/4$ ), 0,2 ( $2/10$ ), 0,125 ( $1/8$ ), 0,75 ( $3/4$ ), 1,25 ( $5/4$ ), 1,5 ( $3/2$ ) (teniendo presente ser divisor del otro dato):  $48: 0,25 = 48: 1/4 = 48 \times 4 = 192$
  - Porcentaje:  $10\%(1/10=0,1)$ ,  $25\%(1/4=0,25)$ ,  $50\%(1/2=0,5)$ ,  $75\%(3/4=0,75)$ ,  $80\%= 0,8 = 4/5$ ;  $75\% 200 = (3/4) \times 200 = 3 \times 50 = 150$
  - Exponencial: Utilizando propiedades de las potencias.  $32 \times 32 = 2^5 \times 2^5 = 2^{10} = 1024$

Aspectos metodológicos. Los alumnos deben conocer los elementos en que se sustenta toda estrategia que se les presenta por primera vez, por tanto, es conveniente que siga los siguientes pasos:

- a) Hacer ejercicios básicos que tienen que ver con la resolución de la estrategia, por ejemplo, contar de 10 en 10 si es la de la línea numérica.
- b) Presentar el profesor la estrategia en la pizarra, mediante un ejercicio resuelto.
- c) Que el alumno entienda el desarrollo de la misma y las propiedades de las que se hace uso.
- d) Propuesta de resolución, con este procedimiento, de otras operaciones.

## APLICACIONES

Las actividades que proponemos para la práctica de los contenidos señalados son: ejercicios, problemas orales, juegos y material didáctico.

**Ejercicios.** Además de las actividades correspondientes a cada uno de los puntos indicados, presentamos una serie de ejercicios relacionados directamente con las operaciones, que los alumnos pueden resolver, bien de forma libre, o siguiendo alguna estrategia de las propuestas. Dichos ejercicios, tienen la particularidad de que los hemos propuesto teniendo en cuenta el nivel de dificultad de los mismos, por tanto están secuenciados según este criterio. Cada ejercicio, es un ejemplo representativo de una determinada dificultad, no obstante, puesto que es una propuesta, cada profesor es libre de decidir el orden y tamaño que le parezca más conveniente para el nivel de su grupo.

Campo aditivo. Construir las tablas de sumar y restar por 11 y 12 y posteriormente memorizar. Completar decenas:  $7 + 5 = (7 + 3) + 2$ . Sumar dos números que den 10:  $9 + 2 + 8$ ,  $5 + 6 + 4$ . Sumar dos números que den 20:  $9 + 2 + 18$ ,  $5 + 16 + 14$ ,... que den 30, 40,... Inventar dos sumas o restas que den el mismo resultado. Descomponer en distintas restas cada uno

## JUNTA DE ANDALUCÍA

de estos números: 10, 25, 49. Sumas y restas que contengan un sumando de una cifra y el otro de dos:  $47 + 2$ ,  $37 - 5$ ,  $47 + 8$ ,  $37 - 9$ . Sumas y restas con números acabados en cero:  $30 + 40$ ,  $80 - 30$ . Sumas y restas acabadas en 5 ( $35 + 20$ ,  $35 - 20$ ). Restas que acaben en las mismas unidades:  $47 - 7$ ,  $68 - 8$ . Operaciones como:  $29 + 10$ ,  $73 - 10$ ,  $45 + 11$ ,  $87 - 11$ ,  $46 - 25$ . Cualquier suma y restas con llevadas que sea asequible.

Campo multiplicativo. Construir las tablas de multiplicar y dividir por 11 y 12 y posteriormente memorizar. Hallar los múltiplos de una serie de números. Inventar dos multiplicaciones y divisiones que den un mismo resultado. Hallar los divisores de una serie de números. Hallar los cuadrados de una serie de números. Calcular productos y divisiones que contengan un factor de una cifra y el otro de dos:  $6 \times 11$ ,  $12 \times 6$ ,  $96:3$ ,  $13 \times 4$ ,  $60 \times 9$ ,  $120:2$ ,  $160:40$ . Calcular productos y divisiones cuyos factores contengan algún factor acabado en 0:  $16 \times 10$ ,  $79:10$ ,  $100:25$ ,  $110:10$ ,  $30 \times 40$ ,  $36:20$ . Cualquier suma y restas con llevadas que sea asequible.

Aspectos metodológicos. Es conveniente recordar, que: en una suma con dos sumandos, si el sumando mayor aparece antes, la suma les resulta más sencilla; el cálculo con sumas resulta más sencillo que con las restas y el cálculo con multiplicaciones resulta también más sencillo que con las divisiones. Por último, la dificultad de las operaciones aumenta a medida que se incrementa el tamaño de los números.

**Problemas orales.** Hemos comentado anteriormente la importancia que otorgan los investigadores a la práctica del C.M. a través de la resolución de problemas; el objetivo que pretendemos en este caso es doble, por una parte, que ejerciten los mecanismos y estrategias aprendidos y por otra, que perciban la utilidad en la vida diaria de este tipo de cálculo. Los enunciados son sencillos, teniendo en cuenta siempre que la dificultad de las operaciones a resolver y las cantidades a manejar deben sintonizar con lo que se está trabajando. Sin embargo, debemos huir de la rutina en cuanto a modelos de enunciado, por ello, presentamos diversos tipos con distintas dificultades para que el profesor elija aquel que considere más oportuno. Estos problemas pueden servir, cambiando los datos, para el trabajo de C.M. en otros campos numéricos.

Desarrollo de la sesión: El maestro puede leerlos en voz alta dos veces, dejar un tiempo para que lo entiendan y lo resuelvan mentalmente, pudiendo ser la contestación oral o por escrito; siendo siempre interesante que se comente en la clase cómo se ha llegado a la solución. También pueden representarse, si es necesario, algo que admiten muy bien en los cursos más inferiores.

Aditivos. Veamos algunos tipos de enunciados:

- a) Problemas de combinación. Es una situación estática, en donde se pregunta sobre el conjunto unión o sobre uno de los dos subconjuntos:
  - a. María tiene 43 fichas y Miguel 45 ¿cuántos tienen los dos juntos?:  $43 + 45 = ?$  (total)
  - b. Entre María y Miguel tienen 88 fichas, 43 son de Miguel ¿cuántas son de María?:  $? + 43 = 88$  (parte)
- b) Problemas de cambio. Describen incrementos o disminuciones en un estado inicial para producir un estado final:
  - a. Concha tenía 48 cromos y encontró 31 más ¿cuántos tiene ahora?:  $48 + 31 = ?$  (aumento).
  - b. Concha tenía 48 cromos y perdió 31 ¿cuántos tiene ahora?:  $48 - 31 = ?$  (disminución).
  - c. Concha tenía 48 cromos, encontró algunos y ahora tiene 51 ¿cuántos encontró?:  $48 + ? = 51$  (aumento).
  - d. Concha tenía 48 cromos, perdió algunos y ahora tiene 15 ¿cuántos perdió?:  $48 - ? = 15$  (disminución).
  - e. Concha tenía algunos cromos, encontró 31 más y ahora tiene 41 ¿cuántos tenía antes?:  $? + 31 = 41$  (aumento).
  - f. Concha tenía algunos cromos, perdió 32 y ahora tiene 20 ¿cuántos tenía antes?:  $? - 32 = 20$  (disminución).
- c) Problemas de comparación. Implica comparación estática entre dos conjuntos. Se pregunta sobre el conjunto diferencia o sobre uno de los conjuntos cuya diferencia se conoce:

- Juan tiene 13 coches y Pedro tienen 28 ¿cuántos tiene Pedro más que Juan?:  $13 + ? = 28$  (usando más pregunta sobre el conjunto diferencia)
- Juan tiene 17 coches y Pedro tiene 12 ¿cuántos tiene Pedro menos que Juan?:  $17 - ? = 12$  (usando menos pregunta sobre el conjunto diferencia)
- Juan tiene 13 coches y Pedro tiene 15 más que Juan ¿cuántos tiene Pedro?:  $13 + 15 = ?$  (usando más pregunta sobre lo comparado)
- Juan tiene 18 coches y Pedro tiene 7 menos que Juan ¿cuántos tiene Pedro?:  $18 - 7 = ?$  (usando menos pregunta sobre lo comparado)

Multiplicativos. Veamos los distintos tipos de enunciados:

Multiplicación:

- Problema razón: Cinco amigos tenían 13 coches cada uno. ¿Cuántos coches tenían en total?. (Se resuelve como una adición reiterada).
- Problema de factor multiplicante: Pedro tenía 13 canicas y Juan 5 veces más. ¿Cuántas canicas tenía Juan?
- Problema producto cartesiano: Un pañuelo se fabrica en 13 tamaños distintos y en cinco colores distintos. ¿Cuántos pañuelos distintos puedes comprar?

División: En la mayoría de los textos para la enseñanza primaria son los de reparto (repartir) y agrupar (sustracción repetida):

- Problema de repartir: María tenía 45 caramelos. Quería colocarlos en 5 hileras iguales. ¿Cuántos había de poner en cada una?
- Problema de agrupamiento: María tenía 45 coches. Quería colocarlos en hileras de 5. ¿Cuántas hileras podría hacer?
- Problema de multiplicación complementaria. ¿Qué número multiplicado por 13 da 52? (como factor desconocido).

Aspectos metodológicos. Las investigaciones realizadas, en cuanto a los tipos de problemas de multiplicación, señalan que es más fácil para los niños el modelo razón (es como una adición reiterada), que el modelo producto cartesiano, puesto que éste presenta la dificultad de coordinar los dos números. En cuanto a la división, los resultados obtenidos de las investigaciones hacen pensar que existe muy poca diferencia entre los distintos enunciados, en cuanto a la dificultad. Para Dickson L. y otros (1991), los niños entienden mejor el concepto de dividir que multiplicar.

**Juegos.** Su misión es doble, por una parte sirven para trabajar las operaciones aplicando las estrategias que consideren los alumnos más oportunas; por otra parte, el juego puede motivar la relación y discusión entre sus componentes, al mismo tiempo que resta dureza a un trabajo que implica bastante esfuerzo de concentración, memorización, etc. Atendiendo al carácter lúdico mencionado, los juegos deben amoldarse, como los problemas, a los contenidos que se están trabajando en la semana. Las sesiones, dependiendo del tipo de juego, pueden desarrollarse con pequeños o grandes grupos. Cada juego viene presentado teniendo en cuenta los siguientes puntos: nivel, objetivos, reglas del juego y variantes que pueden hacerse. El profesor puede aumentar o disminuir la dificultad de los mismos, simplemente cambiando la magnitud de los números o la operación a trabajar.

## H. CONTENIDOS Y ACTIVIDADES PARA EL CÁLCULO APROXIMADO EN EL 3<sup>ER</sup> CICLO.

El término aproximación está mejor delimitado en las enciclopedias matemáticas que en los diccionarios, según Bouvier (Segovia I. y otros 1989) dice que "Aproximar es la acción de sustituir un ente matemático – número, elemento de un espacio métrico, etc.- por otro suficientemente próximo; al segundo se le llama una aproximación del primero. El sentido de la palabra aproximación, que depende en cada caso del sentido dado a la expresión próximo a, puede, en ciertos casos, parecer alejada de la idea intuitiva que de ella podría tenerse". Con este planteamiento, vemos que la aproximación forma parte de la estimación, puesto que sólo se ocupa de determinar un valor numérico con un cierto grado de proximidad a otro valor no utilizable directamente por alguna causa y no se ocupa del resto de puntos que conlleva la estimación, como: elegir la precisión y la rapidez que se desea, elección del proceso, cálculo algorítmico, valoración del resultado (cálculo de errores) y retroacción, si se considera necesaria. Debemos tener presente que trabajar con el C.A. implica el tener que decidir el nivel

# JUNTA DE ANDALUCÍA

de significación que se le otorga, debiendo completarse este tipo de cálculo, para que sea más eficaz, con la comparación del resultados. Creemos que el C.M.A. es conveniente presentarlo a través de toda la Primaria, por supuesto graduando su dificultad; siendo muy útil para cuando se trabaja con números de más de dos cifras.

## CONOCIMIENTOS BÁSICOS.

El cálculo aproximado (C.M.A.) se basa en el cálculo mental, puesto que utiliza elementos conceptuales como: valor relativo, habilidad para trabajar con potencias de diez, propiedades de las operaciones, estrategias, etc. Todo esto implica el tener que dominar las bases del cálculo mental que hemos descrito anteriormente: conocimientos relacionados con el número, conocimientos relacionados con las operaciones y dominio de algunas estrategias.

## PRINCIPALES ESTRATEGIAS.

Existen diversas estrategias y procesos, como: reformulación, procesos de traslación y procesos de compensación.

a) Reformulación: Consiste en modificar los datos para manejar más fácilmente una determinada operación, sin alterarla. Existen tres tipos:

- a. Redondeo: Si la primera cifra que se desecha es menor que cinco, se mantienen iguales las cifras anteriores (1324 -> 1320 por defecto, redondeo a las decenas), para el caso de que la primera cifra que se desecha es igual o mayor que cinco, la última cifra que se mantiene aumenta en una unidad (1376 -> 1400 por exceso, redondeado a las centenas). Veamos algunos ejemplos con las cuatro operaciones:
  - i. Sumar redondeando:  $3456 + 2145 + 1649$ : Lo primero es elegir el orden de redondeo de los sumandos, en este caso a unidades de millar (R-EXT extracto de redondeo, R-MND mismo número de dígitos):  $3456 + 2145 + 1649 \Rightarrow 3000 + 2000 + 2000$  (R-MND) ó  $3 + 2 + 2$  (R-EXT) = 7  $\Rightarrow 7000$  si queremos rebajar el error, trabajamos con centenas:  $3456 + 2145 + 1649 \Rightarrow 3500 + 2100 + 1600$  (R-MND) ó  $35 + 21 + 16$  (R-EXT) = 72  $\Rightarrow 7200$
  - ii. Restar redondeando:  $48356 - 29754$ : Debe ser congruente el redondeo de los datos con el redondeo que queremos del resultado, en este caso si queremos también a unidades de millar:  $48356 - 29754 \Rightarrow 48000 - 30000$  (R-MND) ó  $48 - 30$  (R-EXT) = 18  $\Rightarrow 18000$
  - iii. Multiplicar redondeando a unidades de millar:  $5678 \times 7 \Rightarrow 6000 \times 7$  (R-MND) ó  $6 \times 7$  (R-EXT) = 42  $\Rightarrow 42000$
  - iv. Dividir redondeando a centenas:  $6556 : 2 = 6600 : 2$  (R-MND) ó  $66 : 2$  (R-EXT) = 33  $\Rightarrow 33000$

b. Truncamiento: Se trata de reemplazar las cifras de orden superior por ceros (2458 truncado en las unidades es 2450, truncado en las centenas es 2400). Veamos algunos ejemplos con las cuatro operaciones:

- i. Sumar truncando:  $3456 + 2145 + 1649$ . Elegimos el orden de truncamiento de los sumandos a unidades de millar (T-EXT extracto de truncamiento, T-MND mismo número de dígitos):  $3456 + 2145 + 1649 \Rightarrow 3000 + 2000 + 1000$  (T-MND) ó  $3 + 2 + 1$  (T-EXT) = 6  $\Rightarrow 6000$  si queremos rebajar el error, trabajamos con centenas:  $3456 + 2145 + 1649 \Rightarrow 3400 + 2100 + 1600$  (T-MND) ó  $35 + 21 + 16$  (T-EXT) = 72  $\Rightarrow 7200$
- ii. Restar truncando:  $48356 - 29754$  a unidades de millar. Debe ser congruente el truncamiento de los datos con el truncamiento que queremos del resultado:  $48356 - 29754 \Rightarrow 48000 - 29000$  (T-MND) ó  $48 - 29$  (T-EXT) = 19  $\Rightarrow 19000$
- iii. Multiplicar truncando a unidades de millar:  $5678 \times 7 \Rightarrow 5000 \times 7$  (R-MND) ó  $5 \times 7$  (R-EXT) = 35  $\Rightarrow 35000$
- iv. Dividir truncando a centenas:  $6452 : 2 = 6400 : 2$  (T-MND) ó  $64 : 2$  (T-EXT) = 32  $\Rightarrow 3200$

c. Sustitución: Se trata de cambiar un número por otro aproximado, por ejemplo:  $380 / 9 \Rightarrow 360 / 4 = 40$  Si queremos sumar dos fracciones:  $48/102 + 31/3 \Rightarrow 48/100 + 30/3 = 0,48 + 10 = 10,48$

b) Procesos de traslación: Consiste en expresar la operación en términos más manejables, lo que se traduce en cambiar una operación por otra equivalente o en modificar el

orden en las operaciones, por ejemplo: a)  $234 + 198 + 223 + 185 \Rightarrow 4 \times 200 \Rightarrow 800$ ; b)  $(5673:25) \times 98 \Rightarrow (100 : 25) \times 5700 \Rightarrow 4 \times 6000 = 24000$

- c) Procesos de compensación: Se trata de reducir el error que se produce en un sentido al aproximar un dato o datos, equilibrándolo en sentido contrario con la aproximación del otro dato o datos.  $49 \times 32 \rightarrow 50 \times 30 = 1500$ . En el caso de la suma conviene redondear unos sumandos por defecto y otros por exceso; para la resta las aproximaciones nunca deben ser en sentido opuesto. Para el producto, es conveniente aproximar sólo uno de los dos factores, si también debe hacerse con el otro esta aproximación, debe ser en sentido contrario. En el caso de la división, los dos en el mismo sentido. Neutraliza los errores cometidos en la reformulación y traslación.

## ALGUNAS ACTIVIDADES.

En este apartado proponemos distintos tipos de actividades, tanto ejercicios como problemas, unas relacionadas con el número y otra con las operaciones.

### Relacionadas con el número

- Buscar un número menor (mayor) que: 5,10, 14,...
- ¿Cuál de los dos números de estas parejas se acerca más al 6?: 4 ó 9, 3 ó 7,...
- Dibujar la recta numérica en la pizarra marcando los números: 0, 5, 10, 15, 20 y 25 y preguntar de cuál de estos números está más cerca: el 2, 11, 14, 24,...
- Reconocer la decena (la centena) más cercana a un número natural ( $36 \Rightarrow 40$ ).
- Aproximar, redondeando y posteriormente y truncando diversos números a las decenas, centenas,...
- Aproximaciones por redondeo y truncamiento a la centena o al millar más próximo.
- Rodea con un círculo la respuesta más razonable: a) Una pelota nueva de fútbol cuesta: 2 euros, 20 euros, 200 euros, b) El número de alumnos de tu clase es alrededor de: 5, 25, 100, 250.
- Completa con una cantidad razonable: Nuestro colegio tiene más de \_\_\_\_\_ alumnos. El promedio de personas por familia es \_\_\_\_\_, más de \_\_\_\_\_ personas viven en España.

### Relacionadas con las operaciones

- ¿Cuántos dígitos tiene el resultado de la siguiente operación?:  $324 \times 56$ . Compara tu resultado con el de tus compañeros y con el valor exacto.
- Curiosidad, resuelve el siguiente producto, primero aproximando y posteriormente trata de hacerlo con la calculadora ¿qué ocurre?  $4567 \times 9876$ .
- Individualmente o por grupos reducidos hallar el cociente aproximado y comprobar con la calculadora la aproximación realizada:  $234:5$ ,  $234:52$ ,  $2345:23$ ,... preguntar cómo lo han hecho los alumnos que responden mejor.
- Sin hacer cálculos, averiguar el valor aproximado (en pesetas) de 12, 40, 50, etc. euros.
- Sumar redondeando (truncando) y comparar cual de las dos soluciones está más cerca del resultado real:  $3456+2145+1649$ .
- Restar redondeando (truncando) y comparar con el resultado real:  $48356-29754$ .
- Multiplicar redondeando (truncando) y compara los resultados con el resultado real:  $5678 \times 7$ .
- Dividir redondeando (truncando) y comparar los resultados con el resultado real:  $52564:2$

### Problemas

- Javier está leyendo un libro que tiene 200 hojas, llevas leídas 45. Aproximadamente qué parte del libro ha leído y cuanta parte le queda por leer?
- Hacer una estimación inicial y rápida de las siguientes sumas considerando sólo las cifras que más influyen en el resultado  $495 + 572$ ,  $256 + 672$ ,  $4473 + 785$ ,  $846 + 8 + 98$ . Compara tus resultados con los de tus compañeros. Para corroborar las conclusiones pueden usar la calculadora o hacer las cuenta con lápiz y papel.

- Se presentan una serie de operaciones, cada una con una serie de resultados y se les pide que rodeen aquel resultado que se acerque más al valor exacto.
- ¿Cuántos euros tendrías que tener, aproximadamente, para poder pagar todos los artículos que cuestan: 2500, 345, 27890 y 768 euros?.
- ¿Cuántos kilómetros aproximadamente haces en la bici a lo largo de la semana, si todos los días haces 39 KM?
- Un ordenador vale 859 euros, si la empresa debe comprar 28 ordenadores ¿De cuánto dinero debe disponer aproximadamente?

Es importante no desaprovechar cualquier cálculo de más de dos cifras que surja, ya sea en un problema de la clase de Matemáticas, o en otro área; insistiendo en establecer discusiones respecto a las distintas contestaciones que den los niños. Es recomendable, que los alumnos sean conscientes del error que se comete en estas aproximaciones y lo comparen con el valor exacto, ya sea mediante la resolución de la operación mediante cálculo mental o con la calculadora.

## I. DISTRIBUCIÓN DE LOS CONTENIDOS Y ACTIVIDADES EN EL TERCER CICLO

El objetivo que se persigue en este nivel, es el dominio y consolidación del cálculo mental aditivo y las bases del multiplicativo. En el primer curso del ciclo trabajamos el cálculo aditivo y el multiplicativo, en el que haremos uso de determinadas equivalencias relacionadas con las fracciones. En el segundo curso, con una metodología similar, profundizamos un poco más en el cálculo multiplicativo, en el que introduciremos decimales y porcentajes, sin olvidar en los dos cursos el trabajo con la aproximación, en el primero con carácter aditivo y en el segundo también multiplicativo. A continuación presentamos los contenidos y actividades relativos a este ciclo:

- Numeración. Se sigue insistiendo en el conocimiento del número; en este caso con números mayores de 100.000.
- Tablas y propiedades de las operaciones. Memorización de todas las tablas. Manejo de las propiedades aditivas y multiplicativas.
- Equivalencias y productos notables. Ya sea con fracciones, decimales y porcentajes.
- Ejercicios básicos. Preparados para facilitar los caminos de resolución de las estrategias.
- Estrategias. Se presentarán a lo largo de los dos cursos una serie de estrategias de carácter aditivo y multiplicativo; dedicando también otros días a la resolución de operaciones mediante estrategias libres, en donde el alumno puede seguir el procedimiento que prefiera.
- Aproximación. Con ejercicios relativos al redondeo o truncamiento del número y a las operaciones aditivas y multiplicativas.
- Problemas y juegos. Tendrán carácter aditivo o multiplicativo, dependiendo del tipo de operación que se trabaje.

El anexo que presentamos consta de tres apartados, en el primero y segundo hacemos la programación para cada día de la semana de cada curso del ciclo, un total de treinta semanas para quinto y treinta para sexto. La tercera parte del anexo comprende una serie variada de juegos, que pueden trabajarse en los dos cursos. La secuencia que seguimos normalmente a lo largo de la semana es la siguiente: los lunes ejercicios relacionados con el conocimiento del número, puesto que su dominio es básico para el resto de actuaciones. Los martes ejercicios relacionados con el aprendizaje de hechos o de preparación de estrategias, los miércoles se les presentarán diferentes estrategias, con el fin de que conozcan distintos procedimientos, a la vez que puede aplicar estos conocimientos a los problemas, los jueves, más estrategias o se les propone estrategias libres, junto a resolución de problemas y el viernes es el día de repaso. Normalmente al final de cada semana ponemos una nota para el profesor, en la que comentamos algunos puntos que pueden resultar orientativos respecto al trabajo que se está llevando a cabo con los ejercicios de la semana.

Al principio, es probable que no se pueda llevar a cabo la sesión entera, puesto que requiere entrenamiento y concentración y ésta se consigue poco a poco; es conveniente que cada sesión, desde el primer día, se trabaje con un ambiente de tranquilidad y de motivación. Si se diera el caso en donde el estudio del C.M. se hace por primera vez en un segundo o tercer nivel, sería recomendable que el profesor tendiera a seguir la secuencia que acabamos de presentar, suprimiendo aquellos conocimientos que el alumno tenga dominados.

A través de las experiencias didácticas y de las investigaciones en este campo, presentamos algunas orientaciones generales a tener en cuenta a la hora de presentar este proceso de enseñanza-aprendizaje.

- Es necesario que el alumno descubra las reglas y procedimientos que le muestra el profesor, antes de practicarlos.
- El profesor debe respetar la originalidad de las estrategias personales, que propuestas al resto de la clase, pueden ser más fácilmente asimiladas por encontrarse el resto de niños en similares condiciones psicológicas y pedagógicas.
- El intercambio de ideas y estrategias en la corrección de los ejercicios que se propongan incide para que los alumnos justifiquen ante los demás el porqué de sus cálculos, lo que se traducirá en el intercambio de estrategias y en la detección de las causas de los errores.
- Se puede presentar los ejercicios de una forma "deportiva", ya sea en equipos o individualmente, puesto que de esta forma estimula a los alumnos a superarse. Se debe de huir de una metodología machacona y aburrida, no se trata de hacer miles de operaciones, sino diversificar los ejercicios, inventar juegos apropiados, recurrir a la competitividad entre grupos, etc.
- Este tipo de cálculo se debe presentar bajo dos aspectos: visual y mental, puesto que ambos aportan facetas formativas diferentes y ambos contribuyen a la familiarización con nuestro sistema de numeración y con las operaciones. Parece más difícil realizar un cálculo cuando se dictan los datos y no existe ningún apoyo visual que cuando se presenta por escrito en la pizarra; no hay que abusar de la primera modalidad sobre todo en los primeros cursos.
- No hay que primar el éxito en el resultado y rapidez de la contestación. Hay que considerar a los más lentos o que cometen más errores, desánimo y por tanto pérdida de interés.
- Como se requiere gran concentración y tensión, cansa rápidamente a los alumnos, de forma que si se trabaja mucho tiempo, la atención disminuye y los resultados empeoran. Por tanto las sesiones de cálculo mental deben ser breves, variadas y alrededor de diez minutos al día, todos los días de la semana.
- Es mejor enseñar el CM en un periodo extendido de tiempo y con una variedad de contextos y aplicaciones en lugar de enseñarlo aisladamente. Si después de un periodo planificado de adiestramiento, siguen los alumnos sin prever el resultado de una operación, si siguen usando la calculadora o el lápiz y papel para hacer cálculos sencillos, es un síntoma claro de no haberse alcanzado unos objetivos mínimos de capacitación. Hay que tener en cuenta, que dentro del grupo de clase, existirán distintas velocidades de aprendizaje, ya que no todo el mundo está igual capacitado y es el profesor el que debe ser flexible y respetar esta diversidad, haciendo uso entonces de material de autoayuda.

Finalmente decir que la experiencia muestra que, normalmente, la persona hábil en cálculo mental es la persona que practica.