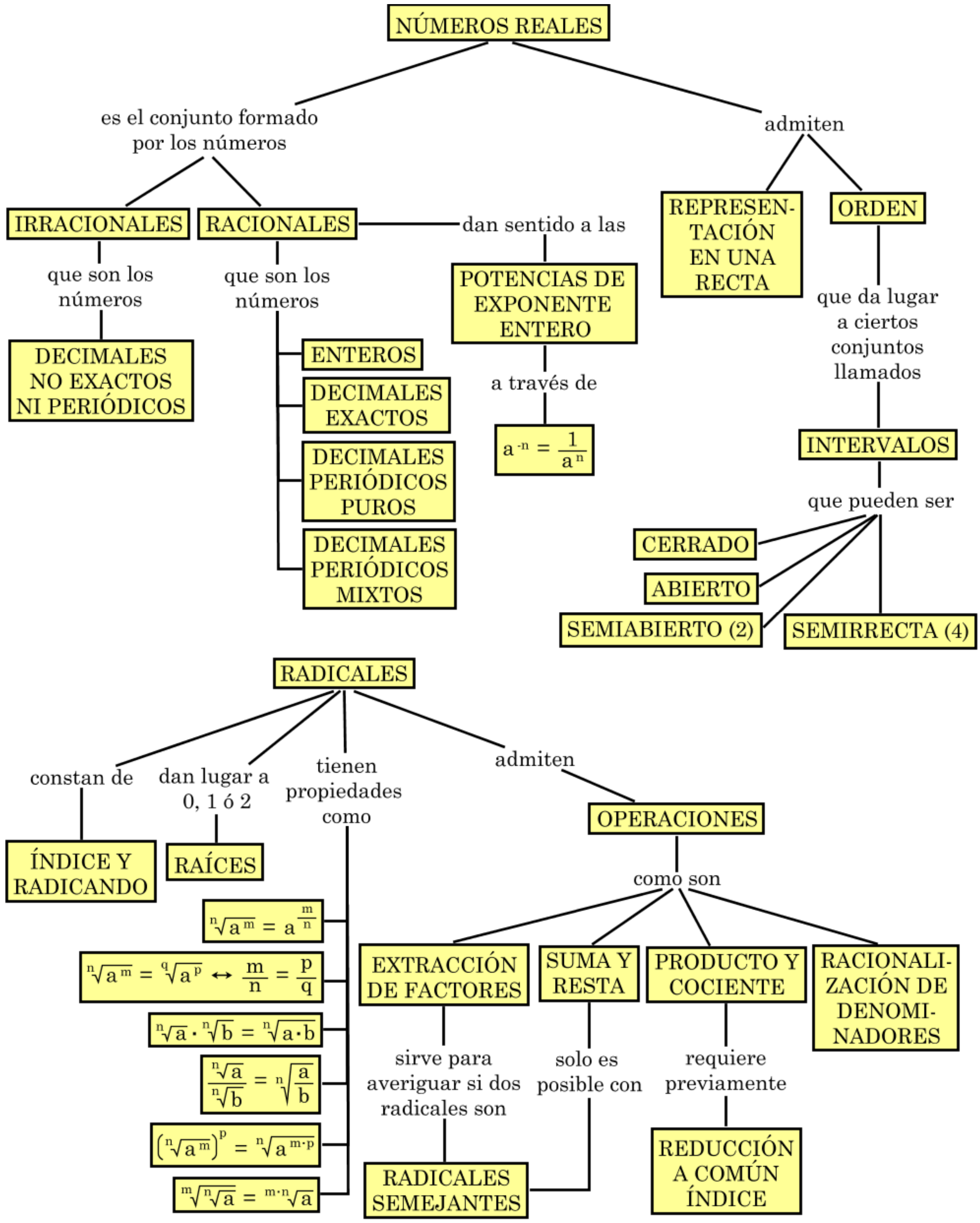
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

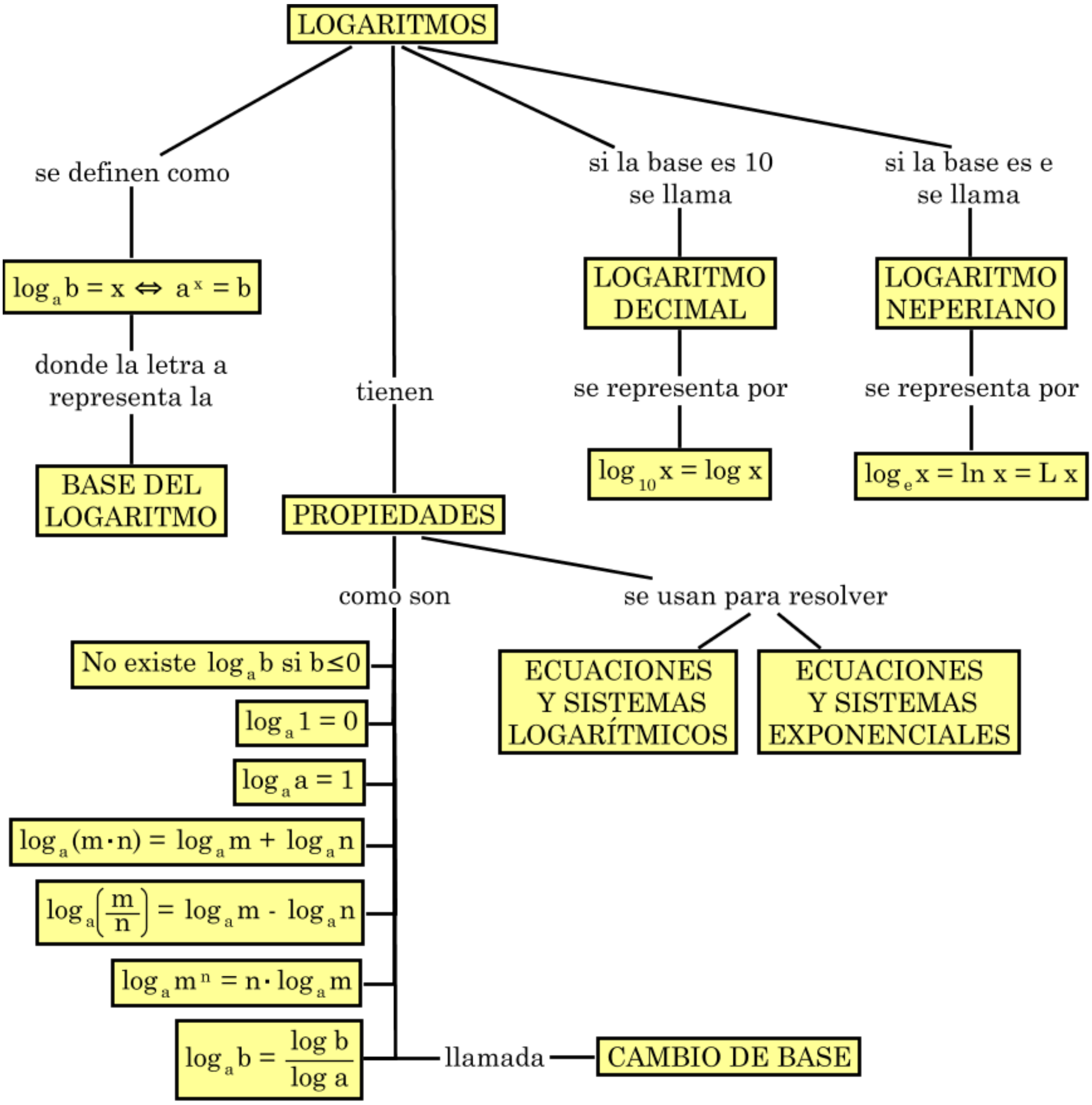
MATEMÁTICAS B DE 4ºESO.

UNIDAD 1. NÚMEROS REALES.

IES LA BAHIA

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD




LOGARITMOS
se definen como
$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$
donde la letra a representa la
BASE DEL LOGARITMO
tienen
PROPIEDADES
como son
No existe $\log_a b$ si $b \leq 0$
$\log_a 1 = 0$
$\log_a a = 1$
$\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n$
$\log_a \left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$
$\log_a m^n = n \cdot \log_a m$
$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$
llamada
CAMBIO DE BASE
se usan para resolver
ECUACIONES Y SISTEMAS LOGARÍTMICOS
ECUACIONES Y SISTEMAS EXPONENCIALES
si la base es 10 se llama
LOGARITMO DECIMAL
se representa por
$\log_{10} x = \log x$
si la base es e se llama
LOGARITMO NEPERIANO
se representa por
$\log_e x = \ln x = L x$

1. Números irracionales. Números reales.

Un **número irracional** es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. No puede expresarse en forma de fracción. El conjunto de los números irracionales se representa por $\mathbb{I}$.

Ejemplos: $\pi = 3{,}14159265\ldots$ $\quad\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ $\quad\sqrt[3]{7} = 1{,}9129311827\ldots$

Nota: números como $\sqrt{16}$ ó $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$ **no son irracionales** ya que $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \dfrac{2}{3}$

Al conjunto de los números racionales unión con los números irracionales se le llama conjunto de **los números reales** y se representa por $\mathbb{R}$.

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Relación de inclusión entre los conjuntos de números naturales, enteros y racionales y reales

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Naturales $\mathbb{N}$

Enteros negativos

Enteros $\mathbb{Z}$

Decimales exactos

Decimales periódicos

Racionales $\mathbb{Q}$

Irracionales $\mathbb{I}$

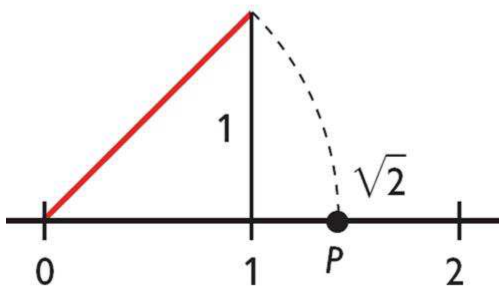
Reales $\mathbb{R}$

Ejemplo: indicar cuáles de los siguientes números pertenecen a $\mathbb{N}$, cuáles a $\mathbb{Z}$, cuáles a $\mathbb{Q}$ y cuáles a $\mathbb{I}$: $\quad 3 \quad -7 \quad 4{,}82 \quad -5{,}333\ldots \quad 1{,}6444\ldots \quad \sqrt{2}$

$\mathbb{N}$: 3 $\qquad \mathbb{Z}$: 3 $\;-7$ $\qquad \mathbb{Q}$: 3 $\;-7\;$ 4,82 $\;-5{,}333\ldots\;$ 1,6444... $\qquad \mathbb{I}$: $\sqrt{2}$

Representación de números irracionales en la recta numérica

Para situar de forma exacta en la recta numérica el número $\sqrt{2}$, se aplican los siguientes pasos:



P1. Escribimos $\sqrt{2} = \sqrt{1^2 + 1^2}$

P2. Se dibuja un segmento horizontal. Se señala el extremo izquierdo con el número 0 y el extremo derecho con el número 1. Éste será el segmento unidad.

P3. Desde el 1 se traza un segmento de longitud 1 perpendicular al segmento unidad.

P4. Por el Teorema de Pitágoras, la distancia del 0 al extremo superior del segmento trazado mide justamente $\sqrt{2}$. Por lo tanto, tomando como abertura esta distancia con un compás, desde el 0, se traza un arco que corte a la recta numérica en un punto P. Exactamente en este punto se sitúa el número $\sqrt{2}$.

2. Intervalos y semirrectas.

Orden en $\mathbb{R}$: las relaciones de orden entre **a**, **b** $\in \mathbb{R}$, se expresan de las siguientes formas:

(1) $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ se lee "**a** es menor que **b**" (2) $a \le b$ se lee "**a** es menor o igual que **b**"

(3) $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ se lee "**a** es mayor que **b**" (4) $a \ge b$ se lee "**a** es mayor o igual que **b**"

Intervalo cerrado de extremos a y b: es el conjunto de números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**. Se representa por [a, b]. $[a, b] = \{ x \in \mathbb{R} / a \le x \le b \}$

Ejemplo: $[-3, 2] = \{ x \in \mathbb{R} / -3 \le x \le 2 \}$

Intervalo abierto de extremos a y b: es el conjunto de números reales mayores que **a** y menores que **b**. Se representa por (a, b). $(a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a < x < b \}$

Ejemplo: $(1, 5) = \{ x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5 \}$

Intervalo semiabierto de extremos a y b: puede ser el conjunto de números reales mayores o iguales que **a** y menores que **b** que se representa por [a, b); o puede ser el conjunto de números reales mayores que **a** y menores o iguales que **b**, que se representa por (a, b].

$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a \le x < b \}$ $(a, b] = \{ x \in \mathbb{R} / a < x \le b \}$

Ejemplos: $[-2, 5) = \{ x \in \mathbb{R} / -2 \le x < 5 \}$ $(-5, -1] = \{ x \in \mathbb{R} / -5 < x \le -1 \}$

Una **semirrecta de números reales** es alguno de los siguientes tipos de conjuntos:

– El conjunto de números reales mayores o iguales que **a**, que se expresa $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x \ge a \}$

Ejemplo: $[-1, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x \ge -1 \}$

– El conjunto de números reales mayores que **a**, que se expresa $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x > a \}$

Ejemplo: $(2, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x > 2 \}$

– El conjunto de números reales menores o iguales que **b**, que se expresa $(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} / x \le b \}$

Ejemplo: $(-\infty, -1] = \{ x \in \mathbb{R} / x \le -1 \}$

– El conjunto de números reales menores que **b**, que se expresa $(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} / x < b \}$

Ejemplo: $(-\infty, 4) = \{ x \in \mathbb{R} / x < 4 \}$

Operaciones con intervalos y semirrectas

a) Unión de intervalos: la unión de dos intervalos A y B se representa por $A \cup B$ y es el conjunto formado por todos los números de los intervalos A ó B.

b) Intersección de intervalos: la intersección de dos intervalos A y B se representa por $A \cap B$ y es el conjunto formado sólo por los números comunes a los intervalos A y B.

Ejemplo 1: $A = [-3, 4]$ $B = [1, 7]$ $A \cap B = [1, 4]$ $A \cup B = [-3, 7]$

Ejemplo 2: $A = [-3, 4]$ $B = [5, 7]$ $A \cap B = \varnothing$ $A \cup B = [-3, 4] \cup [5, 7]$

Ejemplo 3: $A = [-3, 4]$ $B = [4, 7]$ $A \cap B = \{ 4 \}$ $A \cup B = [-3, 7]$

Ejemplo 4: $A = [-3, 7]$ $B = [1, 4]$ $A \cap B = [1, 4]$ $A \cup B = [-3, 7]$

Ejemplo 5: $A = [-3, +\infty)$ $B = [1, +\infty)$ $A \cap B = [1, +\infty)$ $A \cup B = [-3, +\infty)$

3. Radical. Raíz enésima de un número.

Dados $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{n} \neq 1$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}$, un **radical de índice n** y **radicando a** es una expresión del tipo $\sqrt[n]{a}$

Raíz enésima de a es un número $\mathbf{r} \in \mathbb{R}$ tal que $r^n = a$, es decir $\sqrt[n]{a} = r \iff r^n = a$

De la definición se deduce que un número puede tener 0, 1 ó 2 raíces enésimas, dependiendo de **su signo** y de la **paridad del índice n**.

	Si n es par	**Si n es impar**
Si a es positivo	El número **a** tiene **dos raíces** enésimas opuestas	El número **a** tiene **una raíz** enésima
Si a es negativo	El número **a no tiene raíces** enésimas	El número **a** tiene **una raíz** enésima

Ejemplo 1: 16 tiene dos raíces cuartas, los números 2 y -2 porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$
$x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{16} = \pm 2$

Ejemplo 2: -16 no tiene raíces cuartas porque ningún número elevado a 4 es igual a -16
$x^4 = -16 \Rightarrow \nexists \sqrt[4]{-16}$

Ejemplo 3: 32 tiene una raíz quinta, el número 2 porque $2^5 = 32$
$x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$

Ejemplo 4: -32 tiene una raíz quinta, el número -2 porque $(-2)^5 = -32$
$x^5 = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$

Nota: **una raíz enésima es un número real**: no tiene por qué ser un número entero.
Por ejemplo, $\sqrt[5]{12}$ no se puede hallar con la definición. Con ayuda de una calculadora, se obtiene $\sqrt[5]{12} = 1{,}6437\ldots$ en este caso, un número irracional.

4. Propiedades de los radicales.

P1. Un radical de índice **n** y radicando a^m es igual a una potencia de base **a** y exponente $\frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo 1: $\sqrt[5]{1024}=\sqrt[5]{2^{10}}=2^{\frac{10}{5}}=2^2=4$ Ejemplo 2: $25^{\frac{3}{2}}=\sqrt{25^3}=\sqrt{(5^2)^3}=\sqrt{5^6}=5^3=125$

Ejemplo 3: $\left(\frac{25}{9}\right)^{\frac{-3}{2}}=\left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{3}{2}}=\sqrt{\left(\frac{9}{25}\right)^3}=\sqrt{\left(\frac{3^2}{5^2}\right)^3}=\sqrt{\frac{3^6}{5^6}}=\frac{3^3}{5^3}=\frac{27}{125}$

Obsérvese que si m = 1, entonces $a^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{a}$ Ejemplos: $4^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{4}$ $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$

P2. Dos **radicales** son **equivalentes** si lo son sus fracciones asociadas.

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[q]{a^p} \iff \frac{m}{n}=\frac{p}{q}$$

En consecuencia, **simplificar un radical** equivale a simplificar su fracción asociada.

Ejemplos: $\sqrt[8]{5^4}=\sqrt{5}$ porque $\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$ $\sqrt[12]{3^4}=\sqrt[3]{3}$ porque $\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$ $\sqrt[6]{7^2}=\sqrt[3]{7}$ porque $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$

P3. $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}=\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[12]{x^5}\cdot\sqrt[12]{x}=\sqrt[12]{x^6}=\sqrt{x}$

P4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Ejemplos: $\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2}}=\sqrt[5]{\frac{6}{2}}=\sqrt[5]{3}$ $\frac{\sqrt[15]{x^7}}{\sqrt[15]{x^2}}=\sqrt[15]{x^5}=\sqrt[3]{x}$

P5. $(\sqrt[n]{a^m})^p=\sqrt[n]{a^{m\cdot p}}$ Ejemplos: $(\sqrt[3]{2^4})^6=\sqrt[3]{2^{24}}=2^8=256$ $(\sqrt[3]{x^2})^6=\sqrt[3]{x^{12}}=x^4$

P6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}=\sqrt[m\cdot n]{a}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{\sqrt{8}}=\sqrt[6]{8}=\sqrt[6]{2^3}=\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^6}}=\sqrt[21]{x^6}=\sqrt[7]{x^2}$

5. Extracción de factores fuera del radical.

Para extraer factores fuera del radical, se procede como sigue:

Paso 1. Se descompone el radicando en factores primos y se escribe el radical como producto de tantos radicales como factores primos haya.

Paso 2. Cada uno de los radicales $\sqrt[n]{a^m}$ anteriores en los que sea $m \geq n$, se descompone así:

$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{a^{c\cdot n+r}}=\sqrt[n]{a^{c\cdot n}\cdot a^r}=a^c\cdot\sqrt[n]{a^r}$, siendo **c** el cociente y **r** el resto de la división m : n

Obsérvese que si r = 0, entonces $\sqrt[n]{a^m}=a^c$

Paso 3. Finalmente, se multiplican todos los factores extraídos por un lado y todos los radicales sobrantes por otro, y se escribe el producto indicado de los resultados.

Ejemplos: extraer factores fuera de los siguientes radicales:

a) $\sqrt[5]{x^{32}y^{23}z^{40}}=\sqrt[5]{x^{30}x^2y^{20}y^3z^{40}}=x^6y^4z^8\sqrt[5]{x^2y^3}$ b) $\sqrt[4]{\frac{x^{25}y^{15}}{z^6}}=\sqrt[4]{\frac{x^{24}x\,y^{12}y^3}{z^4z^2}}=\frac{x^6y^3}{z}\sqrt[4]{\frac{xy^3}{z^2}}$

c) $\sqrt[3]{128}=\sqrt[3]{2^7}=\sqrt[3]{2^6\cdot 2}=2^2\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}$ d) $\sqrt[3]{3125}=\sqrt[3]{5^5}=\sqrt[3]{5^3\cdot 5^2}=5\sqrt[3]{5^2}=5\sqrt[3]{25}$

e) $\sqrt{40}=\sqrt{2^3\cdot 5}=\sqrt{2^3}\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{2}\sqrt{5}=2\sqrt{10}$ f) $\sqrt{96}=\sqrt{2^5\cdot 3}=\sqrt{2^5}\cdot\sqrt{3}=2^2\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}=4\sqrt{6}$

6. Radicales semejantes. Suma y resta de radicales.

Dos radicales son **semejantes** si, una vez extraídos factores fuera del radical, tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo 1 : $4\sqrt{5}$ y $-3\sqrt{5}$ son semejantes porque ambos tienen indíce 2 y radicando 5.

Ejemplo 2: $4\sqrt[3]{5}$ y $-3\sqrt{5}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo índice.

Ejemplo 3: $4\sqrt[3]{5}$ y $4\sqrt[3]{6}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo radicando.

Ejemplo 4: $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$ son semejantes porque $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ y $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

Para **sumar o restar radicales**, es necesario que los **radicales sean semejantes**. Si los radicales no son semejantes, hay que dejar la operación indicada.

Se aplica la siguiente propiedad: $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$

Ejemplo 1: $5\sqrt{8}+\sqrt{18}-3\sqrt{32}=5\cdot 2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-3\cdot 4\sqrt{2}=10\sqrt{2}+3\sqrt{2}-12\sqrt{2}=\sqrt{2}$

Ejemplo 2: $\sqrt{245}-\sqrt{320}+\sqrt{8}+\sqrt{125}-\sqrt{18}=7\sqrt{5}-8\sqrt{5}+2\sqrt{2}+5\sqrt{5}-3\sqrt{2}=-2\sqrt{5}-\sqrt{2}$

Ejemplo 3: $2\sqrt[3]{16}-5\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{250}=2\cdot 2\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+3\cdot 5\sqrt[3]{2}=4\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{2}+15\sqrt[3]{2}=14\sqrt[3]{2}$

Ejemplo 4: $8\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{24}-5\sqrt[3]{375}=8\sqrt[3]{3}+5\cdot 2\sqrt[3]{3}-5\cdot 5\sqrt[3]{3}=8\sqrt[3]{3}+10\sqrt[3]{3}-25\sqrt[3]{3}=-7\sqrt[3]{3}$

7. Reducción de radicales a común índice. Producto y cociente de radicales.

Reducir radicales a común índice equivale a encontrar otros tantos radicales equivalentes a los primeros y que tengan todos ellos el mismo índice.

Este índice común es el mínimo común múltiplo de los índices de todos los radicales. Luego, en cada uno de los radicales, se divide el índice común entre su índice y el resultado se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplo: para reducir los radicales $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[4]{5}$ a radicales con el mismo índice, se calcula IC = m.c.m.(3, 2, 4) = 12

Para el índice 3, se hace 12 : 3 = 4 _____ $4\cdot 2=8$ $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{2^2}=\sqrt[12]{2^8}$

Para el índice 2, se hace 12 : 2 = 6 _____ $6\cdot 3=18$ $\Rightarrow$ $\sqrt{3^3}=\sqrt[12]{3^{18}}$

Para el índice 4, se hace 12 : 4 = 3 _____ $3\cdot 1=3$ $\Rightarrow$ $\sqrt[4]{5}=\sqrt[12]{5^3}$

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, primero hay que reducirlos a **común índice** y después aplicar el producto o cociente de radicales del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}=\sqrt[n]{a\cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}=\sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 1: $\dfrac{\sqrt[3]{2^8}}{\sqrt{2^3}} = \dfrac{\sqrt[6]{2^{16}}}{\sqrt[6]{2^9}} = \sqrt[6]{2^7} = \sqrt[6]{2^6 \cdot 2} = 2\,\sqrt[6]{2}$

Ejemplo 2: $\dfrac{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{2^7}} = \dfrac{\sqrt[12]{2^8} \cdot \sqrt[12]{2^{30}}}{\sqrt[12]{2^{21}}} = \sqrt[12]{\dfrac{2^{38}}{2^{21}}} = \sqrt[12]{2^{17}} = \sqrt[12]{2^{12} \cdot 2^5} = 2\,\sqrt[12]{2^5} = 2\,\sqrt[12]{32}$

Ejemplo 3: $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x^7} \cdot \sqrt[15]{x} = \sqrt[30]{x^{12}} \cdot \sqrt[30]{x^{40}} \cdot \sqrt[30]{x^{105}} \cdot \sqrt[30]{x^2} = \sqrt[30]{x^{159}} = \sqrt[30]{x^{150} \cdot x^9} = x^5\,\sqrt[30]{x^9}$

Ejemplo 4: $\sqrt[3]{a^2b\sqrt{ab\sqrt{a}}} = \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^8b^4} \cdot \sqrt[12]{a^2b^2} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^{11}b^6}$

Ejemplo 5: $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b\sqrt{2ab}}}{\sqrt{2a^2b\sqrt[3]{b}}} = \dfrac{\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt{2a^2b} \cdot \sqrt[6]{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt[6]{2^3a^6b^3} \cdot \sqrt[6]{b}} = \dfrac{\sqrt[6]{2a^5b^3}}{\sqrt[6]{2^3a^6b^4}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{2^2ab}} = \sqrt[6]{\dfrac{1}{4ab}}$

8. Racionalización de denominadores.

Racionalizar una fracción con denominador radical consiste en encontrar una fracción equivalente cuyo denominador sea un número racional.

Caso 1: si el denominador de la fracción es de la forma $\sqrt[n]{a^m}$ siendo m < n, entonces hay que multiplicar el numerador y el denominador por $\sqrt[n]{a^{n-m}}$

Si fuese m > n, previamente hay que extraer factores y después aplicar la regla anterior.

Ejemplo 1: $\dfrac{10}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{10 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \dfrac{10 \cdot \sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{2^3}} = \dfrac{10 \cdot \sqrt[3]{4}}{2} = 5\,\sqrt[3]{4}$

Ejemplo 2: $\dfrac{5}{\sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \dfrac{5\sqrt{5}}{5} = \sqrt{5}$

Ejemplo 3: $\dfrac{ab}{\sqrt[4]{ab^2}} = \dfrac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{ab^2} \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}} = \dfrac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{\sqrt[4]{a^4b^4}} = \dfrac{ab \cdot \sqrt[4]{a^3b^2}}{ab} = \sqrt[4]{a^3b^2}$

Caso 2: si el denominador de la fracción es de alguna de las siguientes formas:

$$p\sqrt{a} \pm q\sqrt{b} \qquad\qquad p \pm q\sqrt{b} \qquad\qquad p\sqrt{a} \pm q$$

entonces hay que multiplicar el numerador y el denominador por la expresión conjugada del denominador. La expresión conjugada de A+B es A–B o viceversa.

Ejemplo 1: $\dfrac{6}{2\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \dfrac{6 \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5}-\sqrt{3}) \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})} = \dfrac{6 \cdot (2\sqrt{5}+\sqrt{3})}{(2\sqrt{5})^2 - (\sqrt{3})^2} = \dfrac{12\sqrt{5}+6\sqrt{3}}{20-3} = \dfrac{12\sqrt{5}+6\sqrt{3}}{17}$

Ejemplo 2: $\dfrac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+3} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3}+3) \cdot (2\sqrt{3}-3)} = \dfrac{\sqrt{3} \cdot (2\sqrt{3}-3)}{(2\sqrt{3})^2 - 3^2} = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{12-9} = \dfrac{6-3\sqrt{3}}{3} = \dfrac{2-\sqrt{3}}{1} = 2-\sqrt{3}$

9. Logaritmo de un número.

Dados a, b $\in \mathbb{R}$, a, b > 0, a $\neq$ 1, se llama **logaritmo en base a de b** al número al que hay que elevar **a** para obtener **b**. Se representa por $\log_a b$.

$$\log_a b = x \quad \Leftrightarrow \quad a^x = b$$

Ejemplo 1: $\log_2 8 = 3$ porque $2^3 = 8$

Ejemplo 2: $\log_3 81 = 4$ porque $3^4 = 81$

Ejemplo 3: $\log_4 1 = 0$ porque $4^0 = 1$

Ejemplo 4: $\log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4} = 2$ porque $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

Si la **base** del logaritmo **es el número 10**, entonces el logaritmo se llama **decimal**.
Se representa por **log x**. El número 10 no se escribe.

$$\log_{10} x = \log x$$

Si la **base** del logaritmo **es el número e = 2,7182...**, entonces el logaritmo se llama **neperiano**. Se representa por **ln x** ó también por **Lx.**

$$\log_e x = \ln x = Lx$$

10. Propiedades de los logaritmos.

P1. $\forall a > 0,\ a \neq 1$, no existe $\log_a b$ si $b \leqslant 0$.

Sea cual sea la base, no existe el logaritmo de cero ni el logaritmo de un número negativo.

P2. $\log_a 1 = 0 \quad \forall a > 0,\ a \neq 1$

P3. $\log_a a = 1 \quad \forall a > 0,\ a \neq 1$

P4. $\log_a (m \cdot n) = \log_a m + \log_a n \quad \forall a > 0,\ a \neq 1 \quad \forall m, n > 0$

P5. $\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n \quad \forall a > 0,\ a \neq 1 \quad \forall m, n > 0$

P6. $\log_a m^n = n \cdot \log_a m \quad \forall a > 0,\ a \neq 1 \quad \forall m > 0$

P7. Cambio de base: $\log_a b = \dfrac{\log b}{\log a} \quad \forall a > 0,\ a \neq 1 \quad \forall b > 0$

El cambio de base se utiliza para resolver ecuaciones del tipo $a^x = b$, donde a y b son números que no pueden expresarse como potencias de la misma base.

Ejemplo: si se quiere resolver la ecuación $2^x = 43$, se despeja **x** aplicando la definición de logaritmo: $x = \log_2 43$

Aplicando ahora el cambio de base se tiene que $x = \log_2 43 = \dfrac{\log 43}{\log 2} \cong 5{,}43$

Nota: la forma general de la propiedad de cambio de base es: $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$

Demostraciones

Demostración P4: nombrando $x = \log_a(m \cdot n)$ $y = \log_a m$ $z = \log_a n$
se va a demostrar que x = y + z

De la definición de logaritmo se deduce que:
Si $x = \log_a(m \cdot n) \Rightarrow a^x = m \cdot n$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$ Si $z = \log_a n \Rightarrow a^z = n$

De lo anterior se deduce que $a^x = a^y \cdot a^z$ Por otro lado, es sabido que $a^y \cdot a^z = a^{y+z}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = a^y \cdot a^z = a^{y+z}$. Luego x = y + z

Demostración P5: nombrando $x = \log_a \frac{m}{n}$ $y = \log_a m$ $z = \log_a n$
se va a demostrar que x = y – z

De la definición de logaritmo se deduce que:
Si $x = \log_a \frac{m}{n} \Rightarrow a^x = \frac{m}{n}$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$ Si $z = \log_a n \Rightarrow a^z = n$

De lo anterior se deduce que $a^x = \frac{a^y}{a^z}$ Por otro lado, es sabido que $\frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = \frac{a^y}{a^z} = a^{y-z}$. Luego x = y – z

Demostración P6: nombrando $x = \log_a m^n$ $y = \log_a m$ se va a demostrar que $x = n \cdot y$

De la definición de logaritmo se deduce que:
Si $x = \log_a m^n \Rightarrow a^x = m^n$ Si $y = \log_a m \Rightarrow a^y = m$

De lo anterior se deduce que $a^x = (a^y)^n$ Por otro lado, es sabido que $(a^y)^n = a^{n \cdot y}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $a^x = (a^y)^n = a^{n \cdot y}$. Luego $x = n \cdot y$

Demostración P7: nombrando $x = \log_a b$ $y = \log b$ $z = \log a$ se va a demostrar que $x = \frac{y}{z}$

De la definición de logaritmo se deduce que:
Si $x = \log_a b \Rightarrow a^x = b$ Si $y = \log b \Rightarrow 10^y = b$ Si $z = \log a \Rightarrow 10^z = a$

De lo anterior se deduce que $10^y = (10^z)^x$ Por otro lado, es sabido que $(10^z)^x = 10^{z \cdot x}$

Encadenando las dos igualdades anteriores, se tiene que $10^y = (10^z)^x = 10^{z \cdot x}$

Luego $y = z \cdot x$, lo que a su vez implica que $x = \frac{y}{z}$