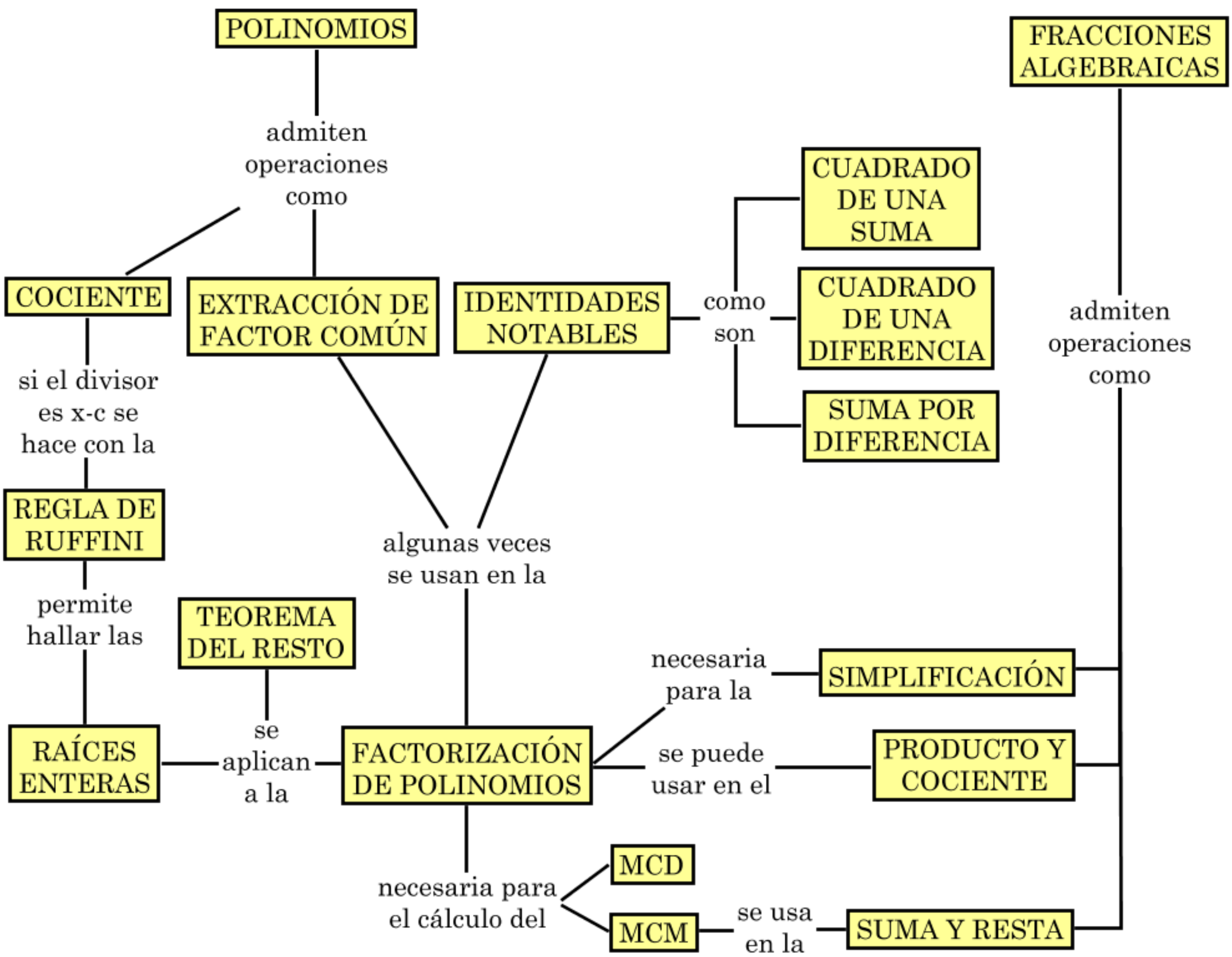
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS B DE 4ºESO.

UNIDAD 2. POLINOMIOS. FRACCIONES ALGEBRAICAS.

IES LA BAHIA

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. División de polinomios.

Dada una división de polinomios D(x) : d(x), al polinomio **D(x)** se le llama **dividendo** y al polinomio **d(x)** se le llama **divisor**. El resultado de la división es un polinomio llamado **cociente c(x)** y otro polinomio llamado **resto r(x)**.

En toda división de polinomios se cumple que: $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$

Para que se pueda realizar la división, el grado del polinomio D(x) tiene que ser mayor o igual que el grado del polinomio d(x). Se procede del siguiente modo:

Paso 1. Se escribe el polinomio D(x) a la izquierda de forma ordenada y dejando huecos en los términos cuyo coeficiente sea cero. Se escribe el polinomio d(x) a la derecha también ordenado.

Paso 2. Se divide el primer término de D(x) entre el primer término de d(x), obteniéndose el primer término de c(x).

Paso 3. El primer término de c(x) obtenido se multiplica ahora por todos los términos de d(x), obteniéndose un polinomio que hay que restar a D(x).

Paso 4. Tras aplicar el paso anterior se obtiene un polinomio resto parcial. Tomando éste como nuevo dividendo y con el mismo divisor d(x) se vuelven a repetir los pasos 2 y 3.

Paso 5. La división finaliza cuando se llega a un polinomio resto parcial de grado menor que el grado de d(x). El último resto parcial es el polinomio resto r(x) de la división.

Ejemplo: para dividir $D(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ entre $d(x) = x^2 - 2x + 1$, se hace

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{1-3}
 & +2x^4 & +x^3 & & -x & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-5}
 & & +5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-6}
 & & & +8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

obteniéndose como cociente $c(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 8$ y como resto $r(x) = 10x - 16$

División exacta

Si al realizar la división de un polinomio P(x) entre otro polinomio Q(x), se obtiene resto cero, entonces se dice que la **división** es **exacta** y que **P(x) es divisible por Q(x)**.

Ejemplo: para saber si $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ es divisible por $Q(x) = x^2 - x - 2$, se hace

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +4x^2 & -7x & -10 & x^2-x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +2x & & x+5 \\ \cline{1-3}
 & +5x^2 & -5x & -10 & \\
 & -5x^2 & +5x & +10 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Como el resto de la división es 0, se dice que P(x) es divisible entre Q(x).

Regla de Ruffini para la división entre un binomio x – c

Si el polinomio divisor es de la forma $d(x) = x - c$, siendo $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}$, la división se puede hacer de forma más sencilla usando la llamada **Regla de Ruffini**, que sólo necesita de los coeficientes de D(x) y del número **c**.

Paso 1. Se escriben los coeficientes de D(x) de forma ordenada, rellenando con ceros los huecos correspondientes a los términos que no existan.

Paso 2. Se escribe el número **c** una línea más abajo y a la izquierda de los coeficientes de D(x).

Paso 3. Dos líneas más abajo se coloca el primer coeficiente de D(x).

Paso 4. Se multiplica este coeficiente por **c** y se suma el resultado al siguiente coeficiente de D(x). El resultado obtenido se anota a la derecha del primer coeficiente de D(x). Con este resultado se vuelve a aplicar el paso 4 y así sucesivamente hasta llegar a la última columna.

Paso 5. El número obtenido al aplicar por última vez el paso anterior es el resto de la división. Los demás números obtenidos previos al resto, son los coeficientes ordenados del cociente c(x) teniendo en cuenta que el grado de c(x) es una unidad menor que el grado de D(x).

<u>Ejemplo 1</u>: para dividir $D(x) = x^4 - 3x^2 + 2$ entre $d(x) = x - 2$ por la regla de Ruffini, se hace

$$\begin{array}{c|ccccc} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{6} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{El cociente es } c(x) = x^3 + 2x^2 + x + 2 \text{ y el resto es } r = 6$$

<u>Ejemplo 2</u>: para dividir $D(x) = x^3 + 2x + 7$ entre $d(x) = x + 1$ por la regla de Ruffini, se hace

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{4} \end{array} \quad \Rightarrow \quad \text{El cociente es } c(x) = x^2 - x + 3 \text{ y el resto es } r = 4$$

<u>2. Identidades notables.</u>

Una **identidad** es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que en ella intervienen.
El cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia y suma por diferencia son casos particulares de identidades y se les nombra como **identidades notables**.

1. Cuadrado de una suma: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$$\begin{array}{ccccc} & & a & + & b \\ & & a & + & b \\ \hline & + & ab & + & b^2 \\ a^2 & + & ba & & \\ \hline a^2 & + & 2ab & + & b^2 \end{array}$$

<u>Ejemplo 1</u>: $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{3}\right)^2 + 2 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{9} + \frac{x}{3} + \frac{1}{4}$

<u>Ejemplo 2</u>: $(x^3 + 5xy)^2 = (x^3)^2 + 2 \cdot x^3 \cdot 5xy + (5xy)^2 = x^6 + 10x^4y + 25x^2y^2$

<u>Ejemplo 3</u>: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = (\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} + (\sqrt{3})^2 = 2 + 2\sqrt{6} + 3 = 5 + 2\sqrt{6}$

El cuadrado de una suma puede utilizarse para **factorizar algunos polinomios**:

<u>Ejemplo</u>: $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + (3)^2 = (2x + 3)^2$

2. Cuadrado de una diferencia: $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

		a	−	b
		a	−	b
	−	ab	+	b^2
a^2	−	ba		
a^2	−	2ab	+	b^2

Ejemplo 1: $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}$

Ejemplo 2: $(x^2-4y)^2 = (x^2)^2 - 2\cdot x^2\cdot 4y + (4y)^2 = x^4 - 8x^2y + 16y^2$

Ejemplo 3: $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2 = (3\sqrt{2})^2 - 2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3} + (2\sqrt{3})^2 = 18 - 12\sqrt{6} + 12 = 30 - 12\sqrt{6}$

El cuadrado de una diferencia puede utilizarse para **factorizar algunos polinomios**:

Ejemplo: $4x^2 - 12x + 9 = (2x)^2 - 2\cdot 2x\cdot 3 + (3)^2 = (2x-3)^2$

3. Suma por diferencia: $(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$

		a	+	b
		a	−	b
	−	ab	−	b^2
a^2	+	ba		
a^2			−	b^2

Ejemplo 1: $\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right) = \left(\frac{x}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{7}\right)^2 = \frac{x^2}{25}-\frac{1}{49}$

Ejemplo 2: $(xy^2+5)\cdot(xy^2-5) = (xy^2)^2 - 5^2 = x^2y^4 - 25$

Ejemplo 3: $(\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-3\sqrt{2}) = (\sqrt{3})^2 - (3\sqrt{2})^2 = 3 - 18 = -15$

Una suma por diferencia puede utilizarse para **factorizar algunos polinomios**:

Ejemplo: $4x^2 - 9 = (2x)^2 - (3)^2 = (2x+3)\cdot(2x-3)$

Factorización de polinomios usando factor común e identidades notables

Extrayendo factor común primero y usando alguna de las identidades notables se pueden **factorizar algunos polinomios**:

Ejemplo 1: $5x^3 + 20x^2 + 20x = 5x\cdot(x^2+4x+4) = 5x\cdot(x+2)^2$

Ejemplo 2: $3x^4 - 6x^3 + 3x^2 = 3x^2\cdot(x^2-2x+1) = 3x^2\cdot(x-1)^2$

Ejemplo 3: $7x^3 - 63x = 7x\cdot(x^2-9) = 7x\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

3. Raíces de un polinomio.

Dados $c \in \mathbb{R}$ y un polinomio P(x), se dice que **c** es raíz de P(x) si $P(c) = 0$.

Ejemplo 1: -1 es raíz de $P(x) = x^5 + 2x + 3$ porque $P(-1) = (-1)^5 + 2\cdot(-1) + 3 = -1 - 2 + 3 = 0$

Ejemplo 2: 2 es raíz de $P(x) = x^3 - 4x$ porque $P(2) = 2^3 - 4\cdot 2 = 8 - 8 = 0$

Ejemplo 3: 0 es raíz de $P(x) = x^3 - 4x$ porque $P(0) = 0^3 - 4\cdot 0 = 0 - 0 = 0$

Nota 1: las **raíces enteras** de un polinomio, si existen, se encuentran entre los **divisores del término independiente**.

Nota 2: **un polinomio de grado n tiene como máximo n raíces enteras**.

4. Teorema del resto.

El teorema del resto afirma lo siguiente: **"Dados $c \in \mathbb{R}$ y un polinomio P(x), el resto de la división P(x) : x – c coincide con P(c)"**

El teorema del resto permite averiguar el resto de una división P(x) : $x - c$, sin necesidad de efectuar la división, ni por el método clásico ni por Ruffini.

Ejemplo: según el teorema del resto, el resto de la división de $P(x) = x^3 + 3x^2 - 5$ entre $x + 2$ es igual a –1 ya que $P(-2) = (-2)^3 + 3 \cdot (-2)^2 - 5 = -8 + 12 - 5 = -1$

Como consecuencia del teorema del resto, obsérvese que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1) **La división P(x) : (x – c) es exacta (tiene resto igual a cero)**
2) **P(x) es divisible por (x – c)**
3) **El binomio (x – c) es factor de P(x)**
4) **P(c) = 0, es decir, el número c es raíz de P(x)**

Ejemplo: la división $P(x) = 3x^3 + 4x^2 - 13x + 6 \ : (x - 1)$ es exacta ya que su resto es cero.

En estos casos, se dice que P(x) es divisible por $(x - 1)$

	3	+4	–13	+6
1		3	7	–6
	3	7	–6	0

También se puede afirmar que el binomio $(x - 1)$ es factor de P(x). Finalmente, obsérvese que $P(1) = 3 \cdot 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 13 \cdot 1 + 6 = 3 + 4 - 13 + 6 = 0$, es decir, el número 1 es raíz de P(x).

5. Factorización de un polinomio.

La descomposición factorial o **factorización** de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios con el menor grado posible cada uno de ellos. Si no es posible descomponer un polinomio en factores, dicho polinomio se dice que es **irreducible**.

Para descomponer un polinomio P(x) en factores, se procede como sigue:

Paso 1. Si P(x) tiene término independiente, se le aplica el paso siguiente directamente. En caso contrario, hay que extraer como factor común alguna potencia de x (la máxima posible). [Este factor común pasa a formar parte de la factorización final como otro factor más y el número 0 es una raíz de P(x)]. Entre paréntesis quedará un polinomio que sí tiene término independiente.

Paso 2. Se aplica la regla de Ruffini al polinomio con término independiente, probando sólo con los divisores de éste, hasta encontrar uno con el que se obtenga resto igual a cero. En ese caso, el número probado **c** es raíz entera de P(x) y por lo tanto, $x - c$ es un factor de P(x).

Paso 3. Se aplica el paso anterior ahora con el polinomio cociente parcial resultante de la división exacta anterior, obteniéndose, si se da el caso, una nueva raíz entera y un nuevo factor de P(x) que habrá que añadir a su factorización.

Paso 4. El proceso se detiene en alguno de los siguientes supuestos:
a) Si queda un cociente final con un único coeficiente, número que habrá que añadirse a la factorización de P(x).
b) Si queda un cociente final con dos o más coeficientes y con el que no se obtienen más raíces enteras. En este caso, hay que añadir el cociente final a la factorización de P(x).

Ejemplo 1: para factorizar $P(x) = x^4 - x^3 - 7x^2 + x + 6$, se hace

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 1 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ La factorización es $P(x) = (x-1) \cdot (x+1) \cdot (x+2) \cdot (x-3)$ y sus raíces enteras son 1, –1, –2 y 3

Ejemplo 2: para factorizar $P(x) = 3x^2 - 3x - 6$, se hace

$$\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & -3 & -6 \\
-1 & & -3 & 6 \\
\hline
 & 3 & -6 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & \\
\hline
 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ La descomposición en factores de P(x) es $P(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$ y sus raíces enteras son –1 y 2

Ejemplo 3: para factorizar $P(x) = 2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 11x - 6$, se hace

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & -5 & -2 & 11 & -6 \\
1 & & 2 & -3 & -5 & 6 \\
\hline
 & 2 & -3 & -5 & 6 & \boxed{0} \\
1 & & 2 & -1 & -6 & \\
\hline
 & 2 & -1 & -6 & \boxed{0} & \\
2 & & 4 & 6 & & \\
\hline
 & 2 & 3 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ La factorización es $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x-2) \cdot (2x+3)$ y sus raíces enteras son 1 (doble) y 2

Ejemplo 4: para factorizar $P(x) = 2x^4 + x^3 - 7x^2 - 4x - 4$, se hace

$$\begin{array}{r|rrrrr}
 & 2 & 1 & -7 & -4 & -4 \\
2 & & 4 & 10 & 6 & 4 \\
\hline
 & 2 & 5 & 3 & 2 & \boxed{0} \\
-2 & & -4 & -2 & -2 & \\
\hline
 & 2 & 1 & 1 & \boxed{0} &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ La factorización es $P(x) = (x-2) \cdot (x+2) \cdot (2x^2 + x + 1)$ y sus raíces enteras son 2 y –2

Ejemplo 5: para factorizar $P(x) = x^4 + 3x^3 - 4x$, se hace $P(x) = x \cdot (x^3 + 3x^2 - 4)$

$$\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 3 & 0 & -4 \\
1 & & 1 & 4 & 4 \\
\hline
 & 1 & 4 & 4 & \boxed{0} \\
-2 & & -2 & -4 & \\
\hline
 & 1 & 2 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}$$

$\Rightarrow$ La descomposición en factores de P(x) es $P(x) = x \cdot (x-1) \cdot (x+2)^2$ y sus raíces enteras son 0, 1 y –2 (doble)

6. Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más polinomios.

Para hallar el m.c.d. o el m.c.m. de dos o más polinomios, hay que factorizar cada uno de ellos.

El m.c.d. es el producto de los factores comunes elevados al menor exponente.

El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo 1: para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios x^2-1 y x^2+2x+1, se factorizan cada uno de ellos:

$$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1) \qquad x^2+2x+1=(x+1)^2$$

$$\Rightarrow \quad \text{m.c.d.}(x^2-1\,,\ x^2+2x+1)=x+1 \qquad \text{m.c.m.}(x^2-1\,,\ x^2+2x+1)=(x+1)^2\cdot(x-1)$$

Ejemplo 2: para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios x^3-x, x^3+2x^2+x y x^2, se factorizan cada uno de ellos:

$$x^3-x=x\cdot(x+1)\cdot(x-1) \qquad x^3+2x^2+x=x\cdot(x+1)^2 \qquad x^2=x^2$$

$$\Rightarrow \quad \text{m.c.d.}(x^3-x\,,\ x^2+2x+1\,,\ x^2)=x \qquad \text{m.c.m.}(x^3-x\,,\ x^2+2x+1\,,\ x^2)=x^2\cdot(x+1)^2\cdot(x-1)$$

7. Fracciones algebraicas.

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios, siendo el denominador distinto de cero.

Ejemplos: $\dfrac{3x}{x^2-1}$ $\quad \dfrac{5x^3+2x}{x-2}$ $\quad \dfrac{6x^2y+3x+2}{7x-y}$ son fracciones algebraicas

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** si coinciden sus productos cruzados. Al **simplificar** una fracción algebraica, la fracción que se obtiene es equivalente a la primera.

Para **simplificar una fracción algebraica:**

Paso 1. Se descomponen en factores tanto el polinomio numerador como el polinomio denominador.

Paso 2. Se eliminan los factores comunes a ambos. Si no hay factores comunes, entonces la fracción algebraica dada es irreducible: no se puede simplificar.

Ejemplo 1: para simplificar $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}$, se hace $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\dfrac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\dfrac{x-1}{x+1}$

Ejemplo 2: para simplificar $\dfrac{x^2-4}{2x-4}$, se hace $\dfrac{x^2-4}{2x-4}=\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{2\cdot(x-2)}=\dfrac{x+2}{2}$

Ejemplo 3: para simplificar $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}$, se hace $\dfrac{x^3-x^2+x-1}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x+2)}=\dfrac{x^2+1}{x+2}$

Para **operar con fracciones algebraicas** se siguen las mismas reglas que con las fracciones numéricas: todo es igual salvo que se opera con polinomios en lugar de con números.

Ejemplo 1: para calcular $\frac{-2}{x^3-x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$, se averigua m.c.m.$(x^3-x\,,\ x-1\,,\ x)$

$x^3-x = x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$ $\qquad$ $x-1 = x-1$ $\qquad$ $x = x$

$\Rightarrow$ m.c.m.$(x^3-x\,,\ x-1\,,\ x) = x\cdot(x+1)\cdot(x-1)$

$$\frac{-2}{x^3-x}+\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}=\frac{-2\cdot 1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{1\cdot x\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{1\cdot(x-1)\cdot(x+1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{-2+x^2+x-(x^2-1)}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-2+x^2+x-x^2+1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-1}{x\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{1}{x\cdot(x+1)}$$

Ejemplo 2: $\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x^2-4)}{(x+2)\cdot(x^2-1)}=\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$

Ejemplo 3: $\frac{x-3}{x-2}\div\frac{x^2-9}{3x-6}=\frac{(x-3)\cdot(3x-6)}{(x-2)\cdot(x^2-9)}=\frac{(x-3)\cdot 3\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{3}{x+3}$