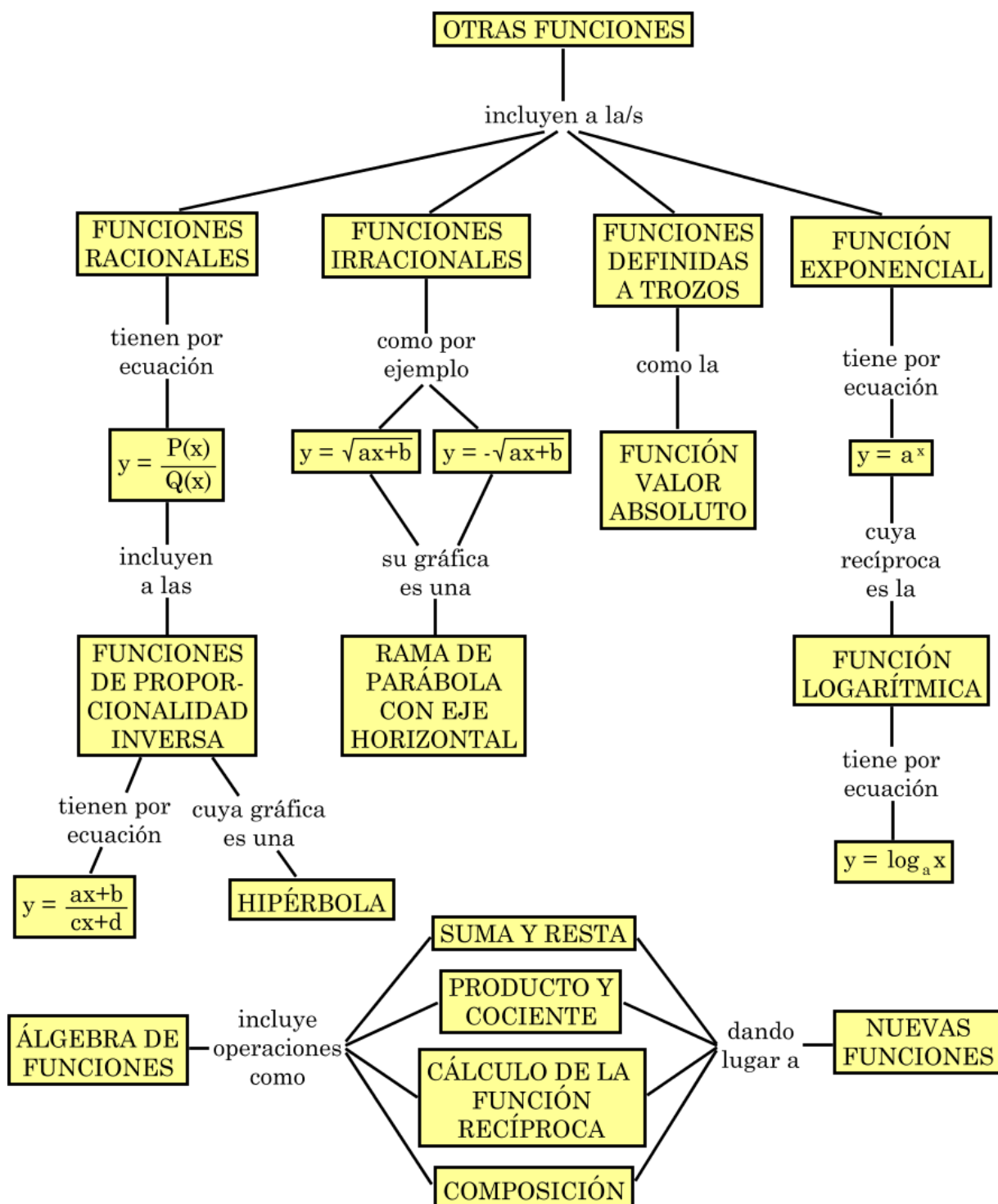




MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Función de proporcionalidad inversa.

Una **función racional** es aquella cuya expresión analítica es del tipo $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$, donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, su dominio es todo $\mathbb{R}$ excepto aquellos valores de x que anulan el denominador.

Dentro de las funciones racionales se encuentran las funciones de proporcionalidad inversa.

Función de proporcionalidad inversa es la que tiene por expresión analítica $y = \frac{ax + b}{cx + d}$,

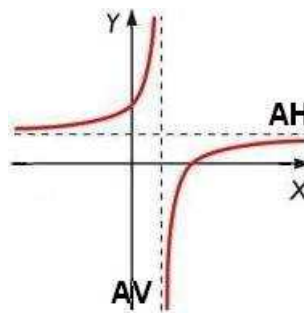
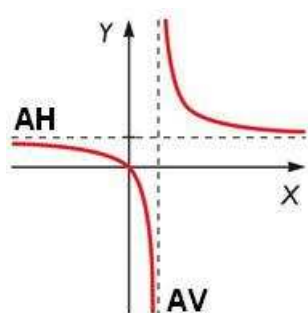
donde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, $c \neq 0$.

Su dominio es $\mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}$. Su **gráfica** es una curva llamada **hipérbola**.

Por tratarse de una hipérbola equilátera, esta curva tiene dos asíntotas perpendiculares:

Una asíntota vertical (AV): la recta $x = -\frac{d}{c}$

Una asíntota horizontal (AH): la recta $y = -\frac{a}{c}$



Ejemplo 1: para representar gráficamente la función $f(x) = \frac{2x + 2}{x - 2}$, se hace lo siguiente:

Se resuelve la ecuación $x - 2 = 0$, cuya solución es $x = 2 \Rightarrow$ El dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$

x	2,1	2,01	2,001	$\rightarrow 2^+$
y	+62	+602	+6 002	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

x	1,9	1,99	1,999	$\rightarrow 2^-$
y	-58	-598	-5 998	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

La AV es la recta $x = 2$

x	100	1 000	10 000	$\rightarrow +\infty$
y	2,06	2,006	2,0006	$\rightarrow 2$

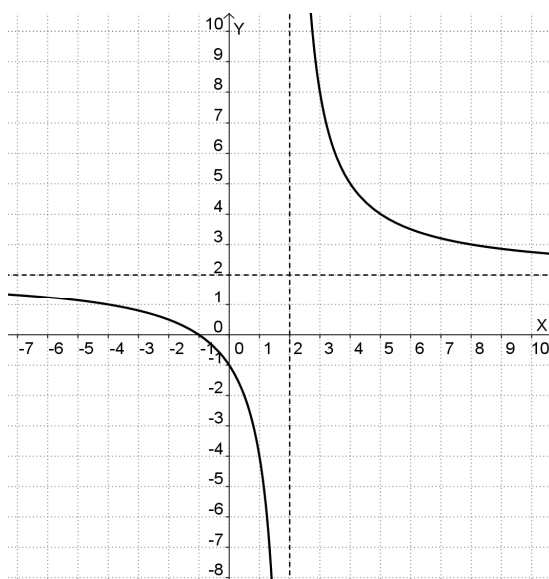
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$$

x	-100	-1 000	-10 000	$\rightarrow -\infty$
y	1,94	1,994	1,9994	$\rightarrow 2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

La AH es la recta $y = 2$

$$\frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$



Ejemplo 2: para representar graficamente la función $f(x) = \frac{-2x+2}{x-3}$, se hace lo siguiente:

Se resuelve la ecuación $x - 3 = 0$, cuya solución es $x = 3 \Rightarrow$ El dominio es $\mathbb{R} - \{ 3 \}$

x	3,1	3,01	3,001	$\rightarrow 3^+$
y	-42	-402	-4 002	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$$

x	2,9	2,99	2,999	$\rightarrow 3^-$
y	+38	+398	+3 998	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$$

La AV es la recta $x = 3$

x	100	1 000	10 000	$\rightarrow +\infty$
y	-2,04	-2,004	-2,0004	$\rightarrow -2$

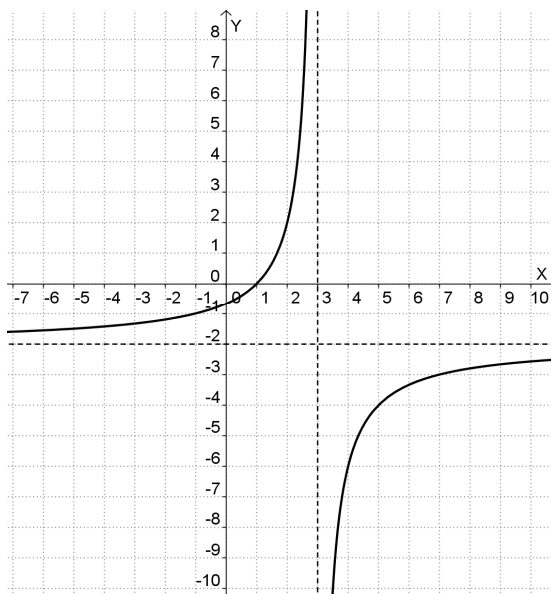
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$$

x	-100	-1 000	-10 000	$\rightarrow -\infty$
y	-1,96	-1,996	-1,9996	$\rightarrow -2$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$$

La AH es la recta $y = -2$

$$\frac{a}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$



Ejemplo 3: para representar graficamente la función $f(x) = \frac{-3x+1}{x-1}$, se hace lo siguiente:

Se resuelve la ecuación $x - 1 = 0$, cuya solución es $x = 1 \Rightarrow$ El dominio es $\mathbb{R} - \{ 1 \}$

x	1,1	1,01	1,001	$\rightarrow 1^+$
y	-23	-203	-2 003	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

x	0,9	0,99	0,999	$\rightarrow 1^-$
y	+17	+197	+1 997	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

La AV es la recta $x = 1$

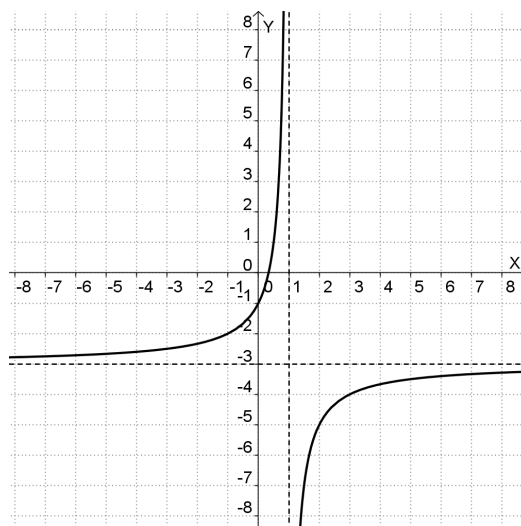
x	100	1 000	10 000	$\rightarrow +\infty$
y	-3,02	-3,002	-3,0002	$\rightarrow -3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -3$$

x	-100	-1 000	-10 000	$\rightarrow -\infty$
y	-2,98	-2,998	-2,9998	$\rightarrow -3$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -3$$

La AH es la recta $y = -3$



Caso particular de la función de proporcionalidad inversa

Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = \frac{k}{x}$ donde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, son casos particulares de la función de proporcionalidad inversa.

Dicha expresión se obtiene haciendo $a = 0$, $c = 1$, $d = 0$ en la expresión $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

En este caso, se dice que las magnitudes variables **x** e **y** son **inversamente proporcionales**. Dos magnitudes **x**, **y** son inversamente proporcionales si el producto de dos valores asociados (x, y) cualesquiera es siempre el mismo número, es decir, $x \cdot y = k$, donde $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$. Al valor de la letra k se le llama **constante de proporcionalidad inversa**.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $y = \frac{k}{x}$ es $\mathbb{R} - \{0\}$.

Su **gráfica** es una **hipérbola equilátera** cuyas asíntotas son los ejes de coordenadas:

- el **eje Y**, que es la recta vertical de ecuación $x = 0$
- el **eje X**, que es la recta horizontal de ecuación $y = 0$

La **monotonía** de esta función depende del signo de la constante k:

- Si **k > 0**, entonces la hipérbola es **decreciente** en todo su dominio.
- Si **k < 0**, entonces la hipérbola es **creciente** en todo su dominio.

Ejemplo 1: para representar graficamente la función $f(x) = \frac{2}{x}$, se hace lo siguiente:

El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

x	0,1	0,01	0,001	$\rightarrow 0^+$
y	+20	+200	+2 000	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	$\rightarrow 0^-$
y	-20	-200	-2 000	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

La AV es la recta $x = 0$

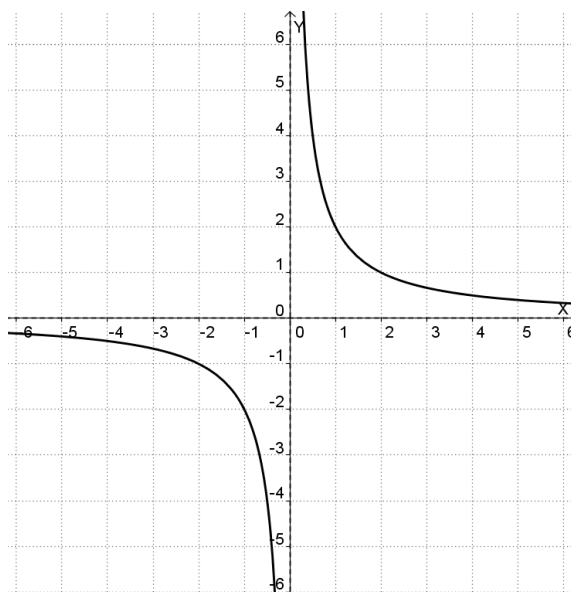
x	100	1 000	10 000	$\rightarrow +\infty$
y	0,02	0,002	0,0002	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	-100	-1 000	-10 000	$\rightarrow -\infty$
y	-0,02	-0,002	-0,0002	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

La AH es la recta $y = 0$



Ejemplo 2: para representar graficamente la función $f(x) = \frac{-4}{x}$, se hace lo siguiente:

El dominio es $\mathbb{R} - \{0\}$

x	0,1	0,01	0,001	$\rightarrow 0^+$
y	-40	-400	-4 000	$\rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

x	-0,1	-0,01	-0,001	$\rightarrow 0^-$
y	+40	+400	+4 000	$\rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

La AV es la recta $x = 0$

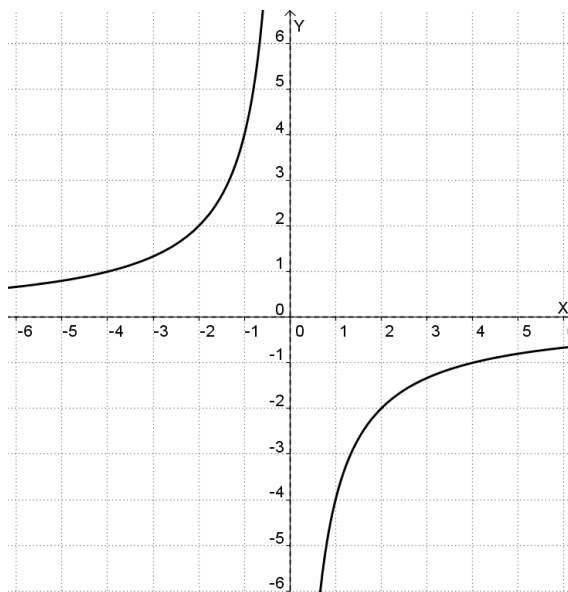
x	100	1 000	10 000	$\rightarrow +\infty$
y	-0,04	-0,004	-0,0004	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

x	-100	-1 000	-10 000	$\rightarrow -\infty$
y	0,04	0,004	0,0004	$\rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

La AH es la recta $y = 0$



2. Función irracional.

Una función **irracional** es aquella en la que la variable independiente x está bajo un signo radical.

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de toda función irracional de índice par, está formado por los valores de x para los que el radicando es mayor o igual que cero.

En particular, son funciones irracionales aquellas cuya expresión analítica es del tipo $y = \sqrt{ax+b}$ ó $y = -\sqrt{ax+b}$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Su **gráfica** es una **rama de parábola con eje de simetría horizontal**.

Para representar graficamente una función del tipo $y = \sqrt{ax+b}$ ó $y = -\sqrt{ax+b}$, se averigua primero su dominio y después se calculan algunos puntos por los que pasa.

Ejemplo 1: para representar graficamente la función $y = \sqrt{x}$, se hace lo siguiente:

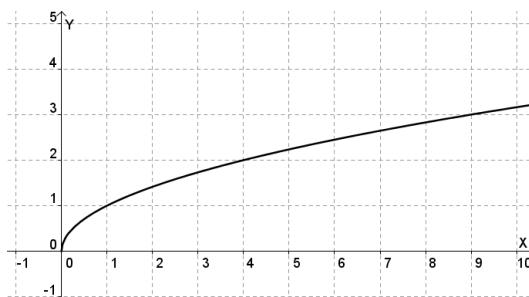
$x \geq 0 \Rightarrow$ el dominio es $[0, +\infty)$

Para $x = 0$, $y = \sqrt{0} = 0 \Rightarrow$ Pasa por $(0, 0)$

Para $x = 1$, $y = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$ Pasa por $(1, 1)$

Para $x = 4$, $y = \sqrt{4} = 2 \Rightarrow$ Pasa por $(4, 2)$

Para $x = 9$, $y = \sqrt{9} = 3 \Rightarrow$ Pasa por $(9, 3)$



Ejemplo 2: para representar graficamente la función $y = \sqrt{x+2}$, se hace lo siguiente:

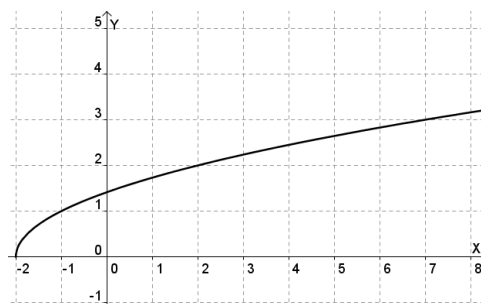
$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow \text{el dominio es } [-2, +\infty)$$

$$\text{Para } x = -2, y = \sqrt{-2+2} = 0 \Rightarrow \text{Pasa por } (-2, 0)$$

$$\text{Para } x = -1, y = \sqrt{-1+2} = 1 \Rightarrow \text{Pasa por } (-1, 1)$$

$$\text{Para } x = 2, y = \sqrt{2+2} = 2 \Rightarrow \text{Pasa por } (2, 2)$$

$$\text{Para } x = 7, y = \sqrt{7+2} = 3 \Rightarrow \text{Pasa por } (7, 3)$$



Ejemplo 3: para representar graficamente la función $y = \sqrt{-x}$, se hace lo siguiente:

$$-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0 \Rightarrow \text{el dominio es } (-\infty, 0]$$

$$\text{Para } x = 0, y = \sqrt{-0} = 0 \Rightarrow \text{Pasa por } (0, 0)$$

$$\text{Para } x = -1, y = \sqrt{-(-1)} = 1 \Rightarrow \text{Pasa por } (-1, 1)$$

$$\text{Para } x = -4, y = \sqrt{-(-4)} = 2 \Rightarrow \text{Pasa por } (-4, 2)$$

$$\text{Para } x = -9, y = \sqrt{-(-9)} = 3 \Rightarrow \text{Pasa por } (-9, 3)$$



Ejemplo 4: para representar graficamente la función $y = \sqrt{2-x}$, se hace lo siguiente:

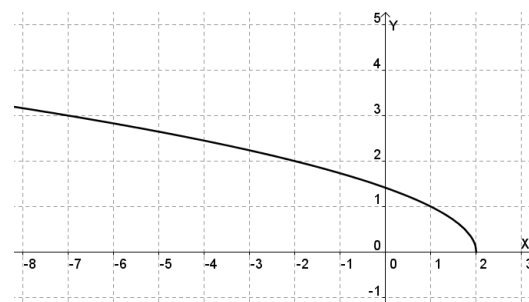
$$2-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow \text{el dominio es } (-\infty, 2]$$

$$\text{Para } x = 2, y = \sqrt{2-2} = 0 \Rightarrow \text{Pasa por } (2, 0)$$

$$\text{Para } x = 1, y = \sqrt{2-1} = 1 \Rightarrow \text{Pasa por } (1, 1)$$

$$\text{Para } x = -2, y = \sqrt{2-(-2)} = 2 \Rightarrow \text{Pasa por } (-2, 2)$$

$$\text{Para } x = -7, y = \sqrt{2-(-7)} = 3 \Rightarrow \text{Pasa por } (-7, 3)$$



Ejemplo 5: para representar graficamente la función $y = -\sqrt{x+2}$, se hace lo siguiente:

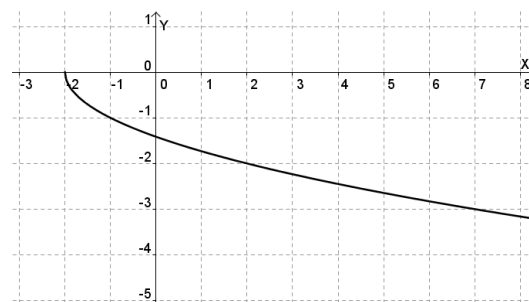
$$x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 \Rightarrow \text{el dominio es } [-2, +\infty)$$

$$\text{Para } x = -2, y = -\sqrt{-2-2} = 0 \Rightarrow \text{Pasa por } (-2, 0)$$

$$\text{Para } x = -1, y = -\sqrt{-1-2} = -1 \Rightarrow \text{Pasa por } (-1, -1)$$

$$\text{Para } x = 2, y = -\sqrt{2-(-2)} = -2 \Rightarrow \text{Pasa por } (2, -2)$$

$$\text{Para } x = 7, y = -\sqrt{2-(-7)} = -3 \Rightarrow \text{Pasa por } (7, -3)$$



3. Operaciones con funciones.

a) Suma, diferencia, producto y cociente de funciones.

Dadas dos funciones f, g definidas en sus respectivos dominios:

a.1) La **función suma** se representa por $f + g$ y se define así: $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

a.2) La **función resta** se representa por $f - g$ y se define así: $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo: dadas las funciones $f(x) = x - 1$, $g(x) = x^2 + 3x - 5$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x) = (x - 1) + (x^2 + 3x - 5) = x^2 + 4x - 6 \Rightarrow (f + g)(x) = x^2 + 4x - 6$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x - 1) - (x^2 + 3x - 5) = -x^2 - 2x + 4 \Rightarrow (f - g)(x) = -x^2 - 2x + 4$$

$$\text{Dom}(f + g) = \text{Dom}(f - g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = (-\infty, +\infty)$$

a.3) La **función producto** se representa como $f \cdot g$ y se define así: $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$$

Ejemplo 1: dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = \sqrt{1-x}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \sqrt{x+1} \cdot \sqrt{1-x} = \sqrt{1-x^2} \Rightarrow (f \cdot g)(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = [-1, +\infty) \cap (-\infty, 1] = [-1, 1]$$

Ejemplo 2: dadas las funciones $f(x) = x + 2$, $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = \frac{(x+2) \cdot (x+1)}{x^2-4} = \frac{(x+2) \cdot (x+1)}{(x+2) \cdot (x-2)} = \frac{x+1}{x-2} \Rightarrow (f \cdot g)(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$\text{Dom}(f \cdot g) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, aunque la expresión analítica simplificada de $f \cdot g$ pueda llevarnos a la conclusión errónea de que su dominio es $\mathbb{R} - \{2\}$.

a.4) La **función cociente** se representa por $\frac{f}{g}$ y se define así: $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\}$$

Ejemplo 1: dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = x - 1$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{x-1}$$

$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = [-2, +\infty) \cap \mathbb{R} - \{1\} = [-2, 1) \cup (1, +\infty)$$

Ejemplo 2: dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+2}$, $g(x) = \sqrt{x-1}$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

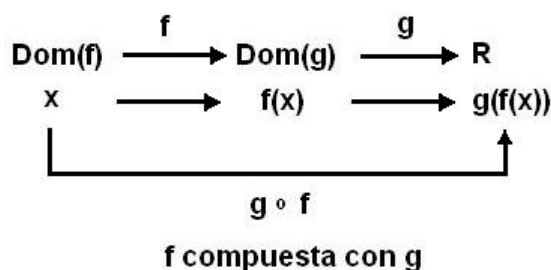
$$\text{Dom}\left(\frac{f}{g}\right) = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g) - \{x \in \mathbb{R} / g(x) = 0\} = [-2, +\infty) \cap (1, +\infty) = (1, +\infty)$$

aunque la expresión analítica simplificada de la función cociente pueda llevarnos a la conclusión errónea de que su dominio es $(-\infty, -2] \cup (1, +\infty)$.

b) Composición de funciones

Dadas dos funciones f, g se llama **f compuesta con g** y se representa por $g \circ f$, a la función que hace corresponder a cada valor $x \in \text{Dom}(f)$, la imagen mediante g de $f(x)$, es decir,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$



$$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\}$$

Ejemplo: dadas las funciones $f(x) = \sqrt{x+1}$, $g(x) = x^2 - 5$

$$(g \circ f)(3) = g(f(3)) = g(2) = -1 \Rightarrow (g \circ f)(3) = -1$$

$$(g \circ f)(-2) = g(f(-2)) = g(\sqrt{-1}) \Rightarrow (g \circ f)(-2) \text{ no existe} \Rightarrow -2 \notin \text{Dom}(g \circ f)$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 5 = x + 1 - 5 = x - 4 \Rightarrow (g \circ f)(x) = x - 4$$

$\text{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathbb{R} / x \in \text{Dom}(f) \wedge f(x) \in \text{Dom}(g)\} = [-1, +\infty)$ (aunque la expresión analítica simplificada de $g \circ f$ pueda llevarnos a la conclusión errónea de que su dominio es todo $\mathbb{R}$)

En general, **la composición de funciones no es conmutativa**, es decir, las expresiones analíticas de las funciones $g \circ f$, $f \circ g$ no tienen por qué coincidir.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sqrt{x+1})^2 - 5 = x + 1 - 5 = x - 4 \Rightarrow (g \circ f)(x) = x - 4$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{(x^2 - 5) + 1} = \sqrt{x^2 - 4} \Rightarrow (f \circ g)(x) = \sqrt{x^2 - 4}$$

c) Simetría en la gráfica de una función.

Se dice que una función es **par** si $f(-x) = f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

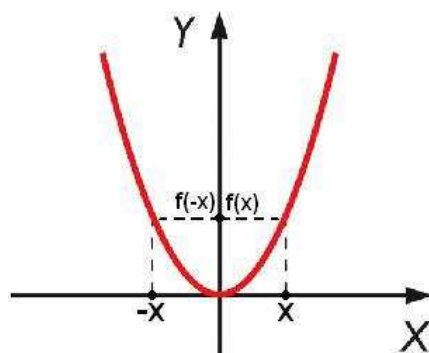
La gráfica de una función par es **simétrica respecto del eje Y**.

Por ejemplo, $f(x) = x^2$ es una función par ya que $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$

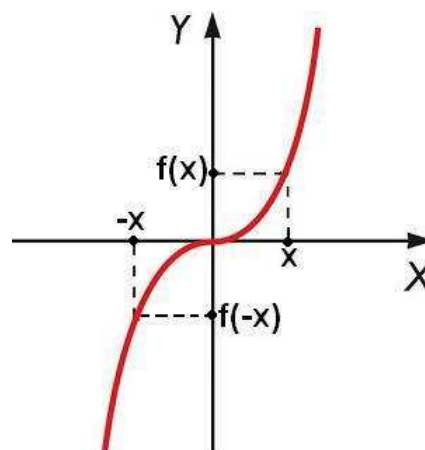
Por otra parte, se dice que una función es **impar** si $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$.

La gráfica de una función impar es **simétrica respecto del origen de coordenadas**.

Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es una función impar ya que $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$, $\forall x \in \text{Dom}(f)$



Función par



Función impar

4. Valor absoluto de una función.

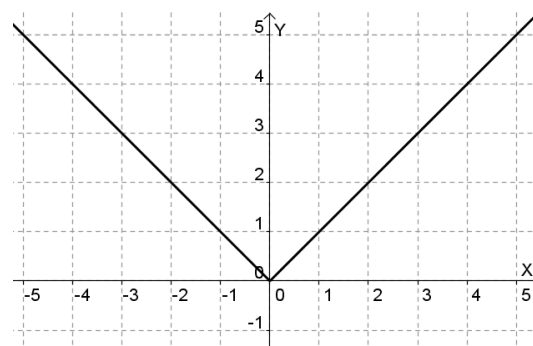
La función **valor absoluto de x** se define como $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Para representar su gráfica:

Se representa el trozo de gráfica correspondiente a la expresión $y = -x$ en el intervalo $(-\infty, 0)$

Se representa el trozo de gráfica correspondiente a la expresión $y = x$ en el intervalo $[0, +\infty)$

El resultado final es una gráfica en forma de "u" con el vértice en el origen de coordenadas.



Dada una función cualquiera $y = g(x)$, la función **valor absoluto de g(x)** se define como

$$|g(x)| = \begin{cases} -g(x) & \text{si } g(x) < 0 \\ g(x) & \text{si } g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Nótese que la función $|g(x)|$ es el resultado de componer la función $g(x)$ con la función $|x|$

Para representar la gráfica de una función del tipo $|g(x)|$, se hace lo siguiente:

Paso 1. Se representa la gráfica de $g(x)$.

Paso 2. Se analiza el signo de $g(x)$.

Paso 3. Los trazos donde $g(x)$ tiene signo positivo se dejan como estaban. En cambio, los trazos donde $g(x)$ tiene signo negativo se sustituyen por sus trazos simétricos respecto del eje X.

Ejemplo 1: hallar la expresión analítica y representar la gráfica de la función $f(x) = |2x + 4|$

Primero se analiza el signo de $g(x) = 2x + 4$, resultando que g tiene signo positivo en el intervalo $(-2, +\infty)$ y signo negativo en el intervalo $(-\infty, -2)$

En el intervalo donde g tiene signo positivo, se deja su misma expresión analítica.

En cambio, en el intervalo donde g tiene signo negativo, se escribe la opuesta de su expresión analítica.

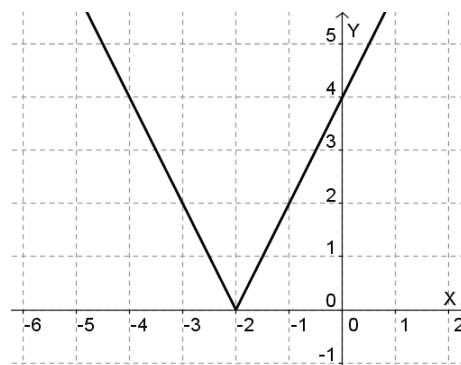
$$f(x) = \begin{cases} -2x - 4 & \text{si } x < -2 \\ 2x + 4 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

Después, para representar la gráfica de $f(x) = |2x + 4|$

primero se representa la gráfica de $g(x) = 2x + 4$

Como la función g tiene signo positivo en $(-2, +\infty)$, el trazo correspondiente a este intervalo se deja como estaba.

En cambio, como g tiene signo negativo en $(-\infty, -2)$, el trazo correspondiente a este intervalo se sustituye por su simétrico respecto del eje X.



Ejemplo 2: hallar la expresión analítica y representar la gráfica de $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

Primero se analiza el signo de $g(x) = x^2 + 2x - 3$, resultando que g tiene signo positivo en los intervalos $(-\infty, -3)$ y $(1, +\infty)$ y signo negativo en el intervalo $(-3, 1)$

En los intervalos donde g tiene signo positivo, se deja su misma expresión analítica.

En cambio, en el intervalo donde g tiene signo negativo, se escribe la opuesta de su expresión analítica.

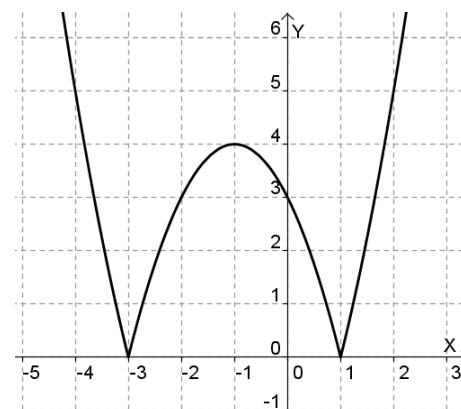
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \leq -3 \\ -x^2 - 2x + 3 & \text{si } -3 < x < 1 \\ x^2 + 2x - 3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Después, para representar la gráfica de $f(x) = |x^2 + 2x - 3|$

primero se representa la gráfica de $g(x) = x^2 + 2x - 3$

Como la función g tiene signo positivo en $(-\infty, -3)$ y en $(1, +\infty)$, los trazos correspondientes a estos intervalos se dejan como estaban.

En cambio, como g tiene signo negativo en $(-3, 1)$, el trazo correspondiente a este intervalo se sustituye por su simétrico respecto del eje X.



5. Funciones recíprocas.

Dada una función $y = f(x)$ (inyectiva en su dominio), se llama **función recíproca de f** a la que asocia a cada valor de y el correspondiente valor de x . Se representa por f^{-1}



Se dice que las funciones f , f^{-1} **son funciones recíprocas (o inversas)**.

Para hallar la función recíproca de una función, se aplican los siguientes pasos:

Paso 1. Se escribe su expresión analítica usando la notación " $y =$ "

Paso 2. En la expresión anterior, las letras x e y se intercambian.

Paso 3. Se despeja y en función de x .

Paso 4. La expresión obtenida dependiente de x es la expresión analítica de $f^{-1}(x)$

Ejemplo 1: para hallar la función recíproca de $f(x) = 2x + 5$, se hace lo siguiente:

$$y = 2x + 5 \Rightarrow x = \frac{y - 5}{2} \Rightarrow x - 5 = 2y \Rightarrow y = \frac{x - 5}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x - 5}{2}$$

Ejemplo 2: para hallar la función recíproca de $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, se hace lo siguiente:

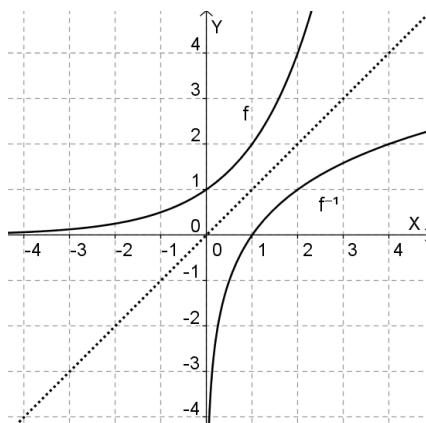
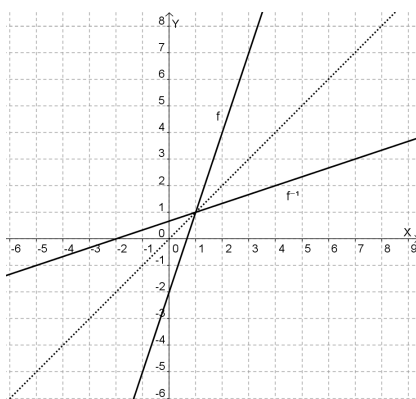
$$\begin{aligned} y = \frac{3x+1}{x-1} &\Rightarrow x = \frac{3y+1}{y-1} \Rightarrow xy - x = 3y + 1 \Rightarrow xy - 3y = x + 1 \Rightarrow y \cdot (x - 3) = x + 1 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y = \frac{x+1}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{x-3} \end{aligned}$$

Ejemplo 3: para hallar la función recíproca de $f(x) = \frac{x^2+3}{x^2-1}$, se hace lo siguiente:

$$\begin{aligned} y = \frac{x^2+3}{x^2-1} &\Rightarrow x = \frac{y^2+3}{y^2-1} \Rightarrow xy^2 - x = y^2 + 3 \Rightarrow xy^2 - y^2 = x + 3 \Rightarrow y^2(x - 1) = x + 3 \Rightarrow \\ &\Rightarrow y^2 = \frac{x+3}{x-1} \Rightarrow y = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-1}} \end{aligned}$$

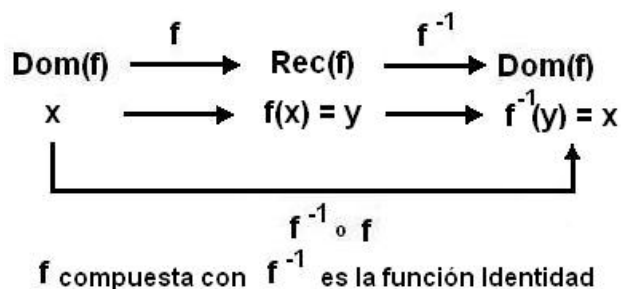
Propiedades

P1. Las **gráficas** de dos funciones recíprocas son **simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante**.



P2. La composición de dos funciones recíprocas es igual a la función identidad $I(x) = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = x \quad (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = x$$



Ejemplo: las funciones $f(x) = 2x + 5$, $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{2}$ son funciones recíprocas:

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(2x + 5) = \frac{2x + 5 - 5}{2} = \frac{2x}{2} = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f\left(\frac{x-5}{2}\right) = 2 \cdot \frac{x-5}{2} + 5 = x - 5 + 5 = x$$

P3. Una función solo admite recíproca en un conjunto donde sea inyectiva. Si una función f no es inyectiva en su dominio, su recíproca f^{-1} existe sólo si se restringe el dominio de f al subconjunto más grande posible donde sí sea inyectiva.

Ejemplo: la función $f(x) = x^2$ no es inyectiva en su dominio, ya que dos valores opuestos cualesquiera tienen la misma imagen. Para hallar su recíproca f^{-1} , hay que restringir su dominio al intervalo $[0, +\infty)$, que es el subconjunto más grande posible donde es inyectiva.

$$y = x^2 \Rightarrow x = y^2 \Rightarrow y = \sqrt{x} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x}$$

De esta forma, si $f(x) = x^2 : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$, entonces $f^{-1}(x) = \sqrt{x} : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$

6. Función exponencial.

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, **función exponencial de base a** es la que tiene por expresión analítica $y = a^x$. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, su dominio es todo $\mathbb{R}$ y su recorrido es el intervalo $(0, +\infty)$

Una función del tipo $y = a^x$ es continua en todo $\mathbb{R}$, corta al eje Y en el punto $(0, 1)$ y no corta al eje X. El resto de propiedades dependen de que la base sea un valor mayor que uno o bien un valor comprendido entre cero y uno.

Si $a > 1$	Creciente en todo $\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IC)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$ La recta $y = 0$ es AH
Si $0 < a < 1$	Decreciente en todo $\mathbb{R}$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ La recta $y = 0$ es AH	$\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IIC)

Las gráficas de dos funciones del tipo $y = a^x$, $y = \left(\frac{1}{a}\right)^x$ son **simétricas respecto del eje Y**.

Ejemplo 1: para representar graficamente la función $y = 2^x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable x , a izquierda y derecha de $x = 0$:

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	0,03125	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	...

Dom(f) = $(-\infty, +\infty)$

Rec(f) = $(0, +\infty)$

Continua en todo $\mathbb{R}$

Creciente en todo $\mathbb{R}$

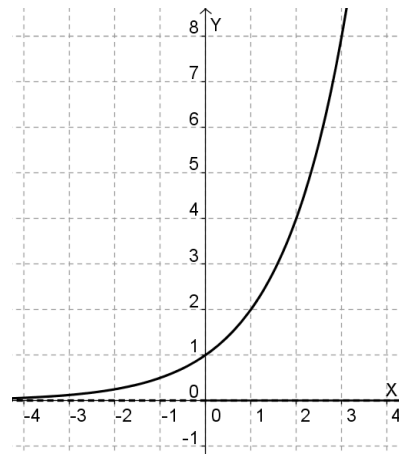
Corta al eje Y en el punto (0, 1) y no corta al eje X

x	10	20	30	$\rightarrow +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^x = +\infty$
y	1 024	1 048 576	1 073 741 824	$\rightarrow +\infty$	

Tiene una rama parabólica (IC)

x	-10	-20	-30	$\rightarrow -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2^x = 0$
y	0,00098	0,00000095	0,0000000009	$\rightarrow 0$	

La recta $y = 0$ es AH



Ejemplo 2: para representar graficamente la función $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable x , a izquierda y derecha de $x = 0$:

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...
y	...	32	16	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125	0,0625	0,03125	...

Dom(f) = $(-\infty, +\infty)$

Rec(f) = $(0, +\infty)$

Continua en todo $\mathbb{R}$

Decreciente en todo $\mathbb{R}$

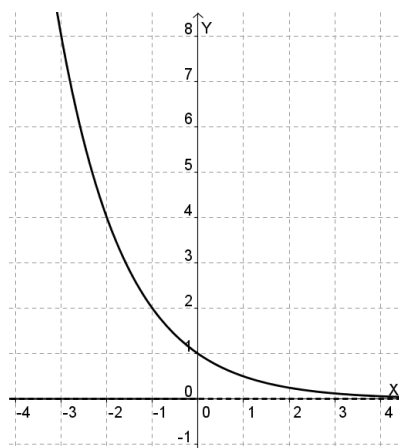
Corta al eje Y en el punto (0, 1) y no corta al eje X

x	10	20	50	$\rightarrow +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = 0$
y	0,00098	0,00000095	0,0000000009	$\rightarrow 0$	

La recta $y = 0$ es AH

x	-10	-20	-50	$\rightarrow -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = +\infty$
y	1 024	1 048 576	1 073 741 824	$\rightarrow +\infty$	

Tiene una rama parabólica (IIC)



Obsérvese que las gráficas de las funciones $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ son simétricas respecto del eje Y.

Traslaciones en la función exponencial

1. Las gráficas de las funciones del tipo $y = a^{x+k}$, donde $k \in \mathbb{R}$, son como la gráfica de $y = a^x$, solo que están trasladadas k unidades a la derecha o a la izquierda en el plano.
2. Las gráficas de las funciones del tipo $y = k + a^x$, donde $k \in \mathbb{R}$, son como la gráfica de $y = a^x$, solo que están trasladadas k unidades arriba o abajo en el plano.

Cálculo de dominios

Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = a^{g(x)}$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo $y = a^x$

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de una función del tipo $y = a^{g(x)}$ coincide con el dominio de $g(x)$.

Ejemplo 1: el dominio de $y = 2^{x^4+3x^2-1}$ es todo $\mathbb{R}$

Ejemplo 2: el dominio de $y = 3^{\frac{2x-1}{x^2-4}}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

Ejemplo 3: el dominio de $y = 2^{\frac{3x}{x^2+4}}$ es todo $\mathbb{R}$

Ejemplo 4: el dominio de $y = 2^{\sqrt{3x+6}}$ es $\{x \in \mathbb{R} / 3x + 6 \geq 0\} = [-2, +\infty)$

Ejemplo 5: el dominio de $y = 3^{\sqrt{x^2-1}}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\} = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Ejemplo 6: el dominio de $y = \frac{x+1}{2^x-8}$ es $\{x \in \mathbb{R} / 2^x - 8 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{3\}$

Ejemplo 7: el dominio de $y = \frac{x+1}{2^x}$ es todo $\mathbb{R}$

Ejemplo 8: el dominio de $y = \frac{\sqrt{x+1}}{2^x-8}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x+1 \geq 0 \wedge 2^x - 8 \neq 0\} = [-1, 3) \cup (3, +\infty)$

7. Función logarítmica.

Dado $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, **función logarítmica de base a** es la que tiene por expresión analítica $y = \log_a x$. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, su dominio es el intervalo $(0, +\infty)$ y el recorrido es todo $\mathbb{R}$.

Una función del tipo $y = \log_a x$ es continua en todo su dominio, corta al eje X en el punto $(1, 0)$ y no corta al eje Y. El resto de propiedades dependen de que la base sea un valor mayor que 1 o bien un valor comprendido entre 0 y 1.

Si $a > 1$	Creciente en $(0, +\infty)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$ Tiene una rama parabólica (IC)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$ La recta $x = 0$ es AV
Si $0 < a < 1$	Decreciente en $(0, +\infty)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty$ Tiene una rama parabólica (IVC)	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$ La recta $x = 0$ es AV

Las gráficas de dos funciones del tipo $y = \log_a x$, $y = \log_{1/a} x$ son simétricas respecto del eje X.

Ejemplo: para representar graficamente la función $y = \log_2 x$, se hace lo siguiente:

Se construye una tabla de valores dando valores a la variable x , a izquierda y derecha de $x = 0$:

x	...	0,0625	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8	16	32	...
y	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	...

Dom(f) = (0, +∞) Rec(f) = (-∞, +∞)

Continua en (0, +∞) Creciente en (0, +∞)

Corta al eje X en el punto (1, 0) y no corta al eje Y

x	1 000	10 000	100 000	$\rightarrow +\infty$
y	9,97	13,29	16,61	$\rightarrow +\infty$

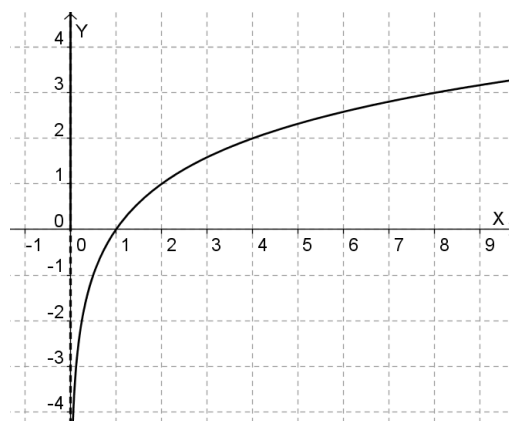
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty$

Tiene una rama parabólica (IC)

x	0,001	0,0001	0,00001	$\rightarrow 0^+$
y	-9,97	-13,29	-16,61	$\rightarrow -\infty$

 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$

La recta $x = 0$ es AV



Las funciones exponencial y logarítmica de la misma base son funciones recíprocas

$$f(x) = a^x : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$$

$$f^{-1}(x) = \log_a x : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

Demostración:

Para hallar la recíproca de $y = a^x$, se intercambian las letras x e y , obteniéndose $x = a^y$

Ahora se despeja y de la expresión $x = a^y$. Por definición de logaritmo en base a de x , se deduce que $y = \log_a x$. Por lo tanto, $f^{-1}(x) = \log_a x$

Obsérvese que el resultado de componer ambas funciones es la función identidad:

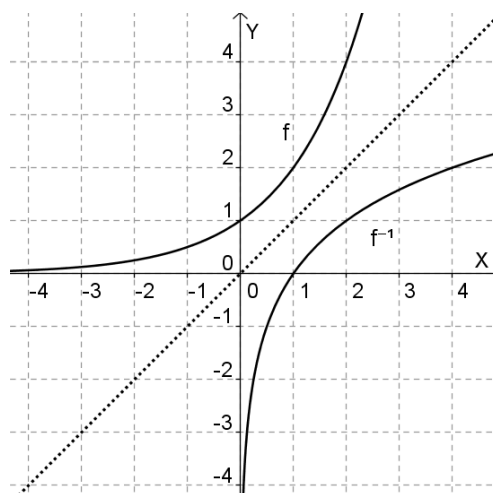
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(a^x) = \log_a a^x = x$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\log_a x) = a^{\log_a x} = x$$

Por ser funciones recíprocas, las **gráficas** de las funciones exponencial y logarítmica de la misma base son **simétricas respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrantes**.

Ejemplo: las gráficas de $f(x) = 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$ son simétricas respecto de la recta $y = x$

x	$y = 2^x$	x	$y = \log_2 x$
...	...	...	...
-4	0,0625	0,0625	-4
-3	0,125	0,125	-3
-2	0,25	0,25	-2
-1	0,5	0,5	-1
0	1	1	0
1	2	2	1
2	4	4	2
3	8	8	3
4	16	16	4
10	1 024	1 024	10
20	1 048 576	1 048 576	20
...	...	...	...



Traslaciones en la función logarítmica

1. Las gráficas de las funciones del tipo $y = \log_a(x+k)$, donde $k \in \mathbb{R}$, son como la gráfica de $y = \log_a x$, solo que están trasladadas k unidades a la derecha o a la izquierda en el plano.
2. Las gráficas de las funciones del tipo $y = k + \log_a x$, donde $k \in \mathbb{R}$, son como la gráfica de $y = \log_a x$, solo que están trasladadas k unidades arriba o abajo en el plano.

Cálculo de dominios

Las funciones cuya expresión analítica son del tipo $y = \log_a(g(x))$, donde $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$, $a \neq 1$, son el resultado de componer una función g con una función del tipo $y = \log_a x$

Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, el dominio de cualquier función del tipo $y = \log_a(g(x))$ está formado por los valores de x para los que $g(x)$ es mayor que cero.

Ejemplo 1: el dominio de $y = \log_2(x^2 - 1)$ es $\{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 > 0\} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

Ejemplo 2: el dominio de $y = \log\left(\frac{x+1}{x-2}\right)$ es $\{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{x-2} > 0\} = (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$

Ejemplo 3: el dominio de $y = \ln(\sqrt{3x+6})$ es $\{x \in \mathbb{R} / \sqrt{3x+6} > 0\} = (-2, +\infty)$

Ejemplo 4: el dominio de $y = \frac{1}{\log x}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge \log x \neq 0\} = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

Ejemplo 5: el dominio de $y = \frac{\log(x+3)}{2^x - 1}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x+3 > 0 \wedge 2^x - 1 \neq 0\} = (-3, 0) \cup (0, +\infty)$

Ejemplo 6: el dominio de $y = \frac{\log x}{1 - \log(x+1)}$ es $\{x \in \mathbb{R} / x > 0 \wedge 1 - \log(x+1) \neq 0\} = (0, 9) \cup (9, +\infty)$