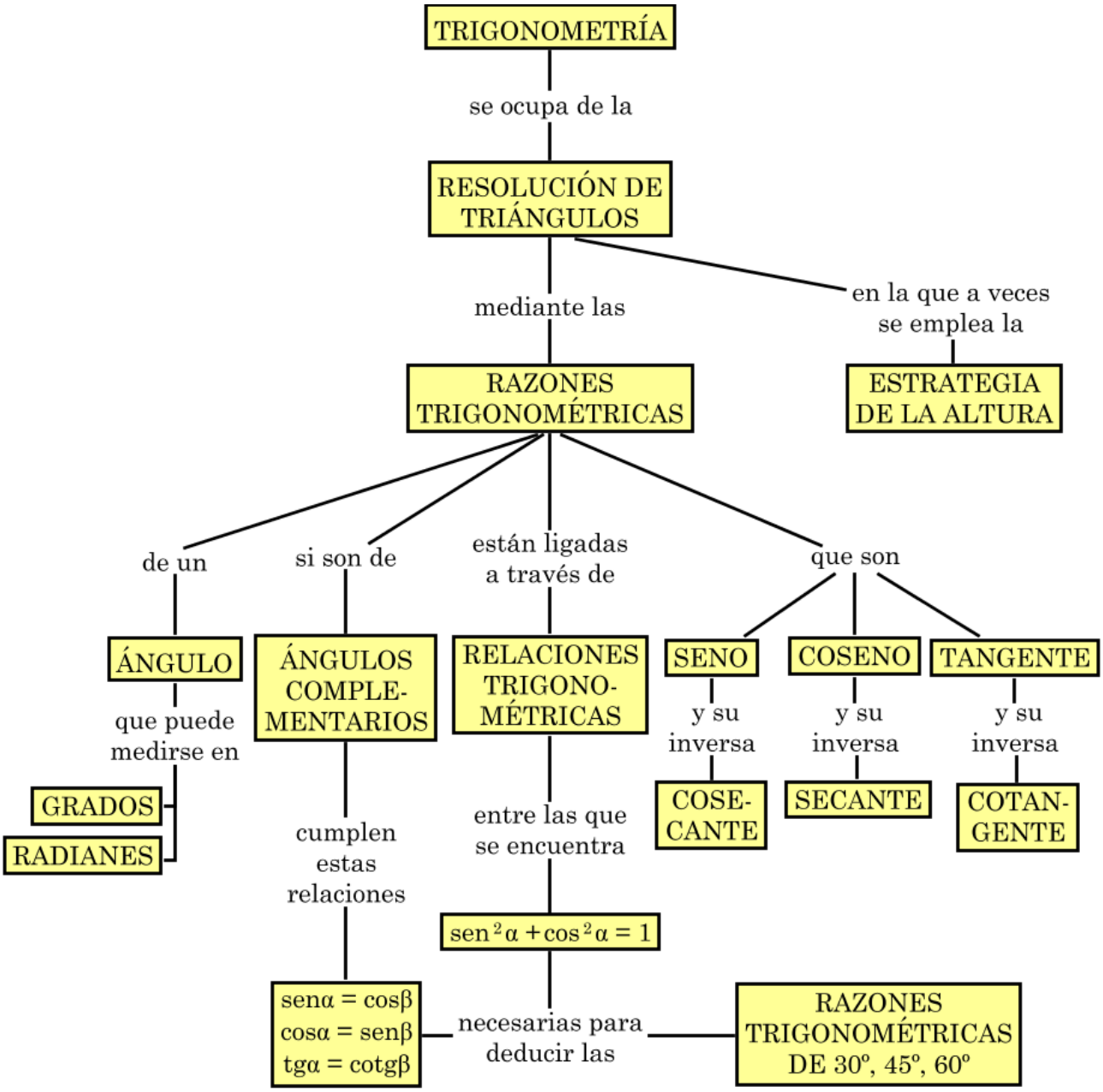
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

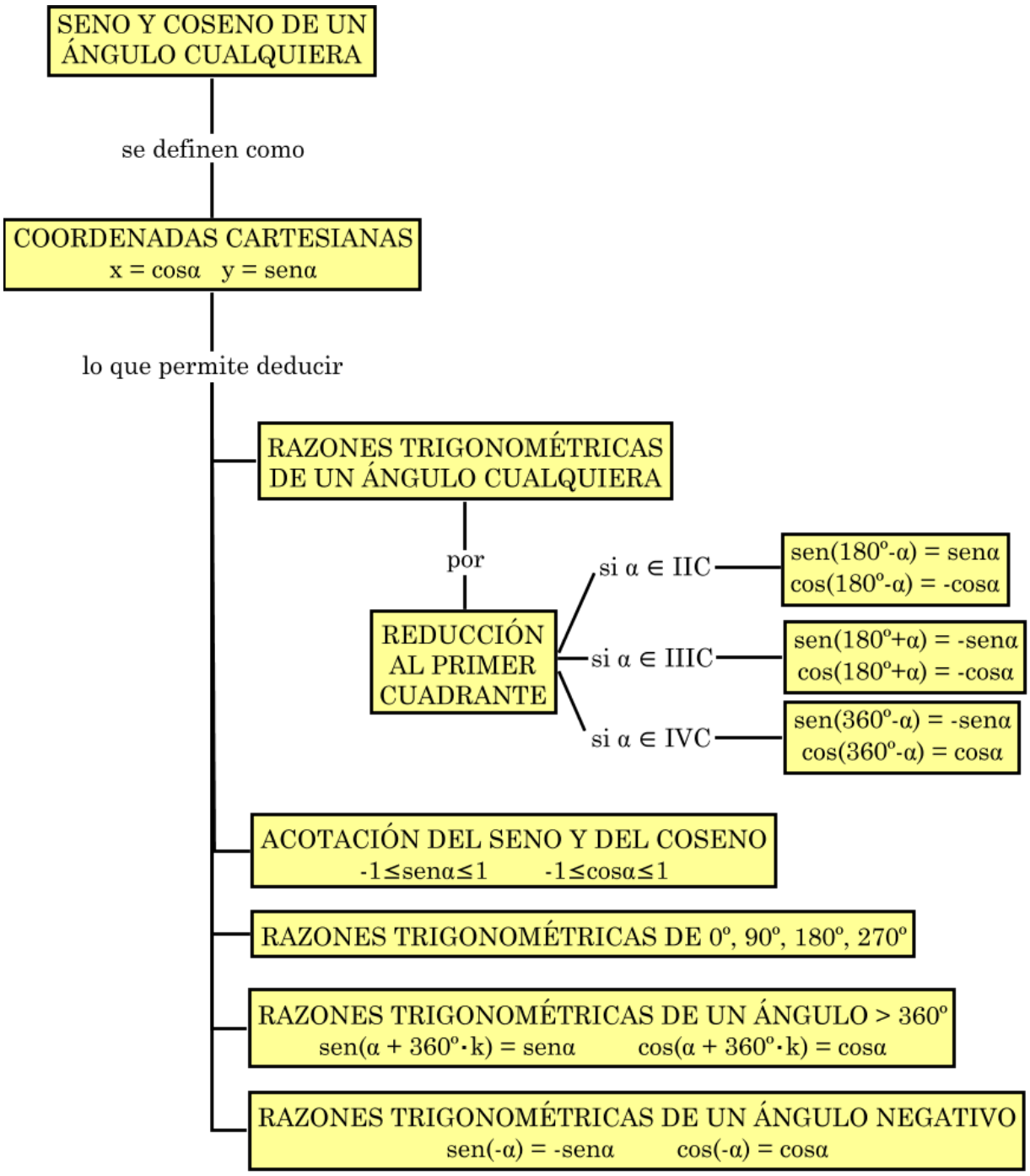
**MATEMÁTICAS B DE 4ºESO.**

**UNIDAD 6. TRIGONOMETRÍA.**

IES LA BAHIA

## MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD




SENO Y COSENO DE UN ÁNGULO CUALQUIERA
se definen como
COORDENADAS CARTESIANAS
x = cosα y = senα
lo que permite deducir
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO CUALQUIERA
por
REDUCCIÓN AL PRIMER CUADRANTE
si α ∈ IIC
sen(180º-α) = senα
cos(180º-α) = -cosα
si α ∈ IIIC
sen(180º+α) = -senα
cos(180º+α) = -cosα
si α ∈ IVC
sen(360º-α) = -senα
cos(360º-α) = cosα
ACOTACIÓN DEL SENO Y DEL COSENO
-1≤senα≤1 -1≤cosα≤1
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE 0º, 90º, 180º, 270º
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO > 360º
sen(α + 360º·k) = senα cos(α + 360º·k) = cosα
RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE UN ÁNGULO NEGATIVO
sen(-α) = -senα cos(-α) = cosα

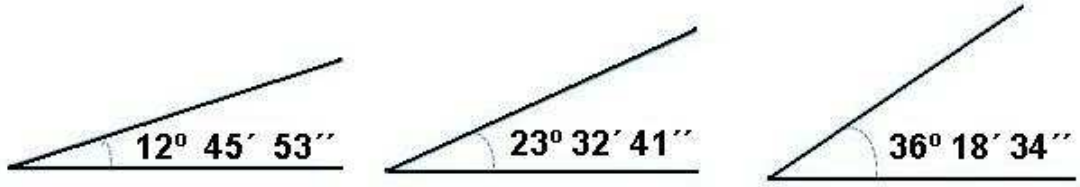
## 1. Medida de ángulos.

**Ángulo** es la parte del plano comprendida entre dos semirrectas que parten de un mismo punto llamado **vértice**.
Los sistemas de medida de ángulos más usados son el **sistema sexagesimal** y el **sistema de radianes**.

### Sistema sexagesimal

Tiene como unidad de medida el **grado sexagesimal** o simplemente **grado**, que resulta de dividir un ángulo recto en noventa partes iguales. Se representa por **º**.

Un **minuto** es la sexagésima parte (1/60) de un grado. 1 grado = 60´ (60 minutos)
Un **segundo** es la sexagésima parte (1/60) de un minuto. 1 minuto = 60´´ (60 segundos)




Un sistema de coordenadas divide al plano en cuatro zonas iguales llamadas **cuadrantes**.

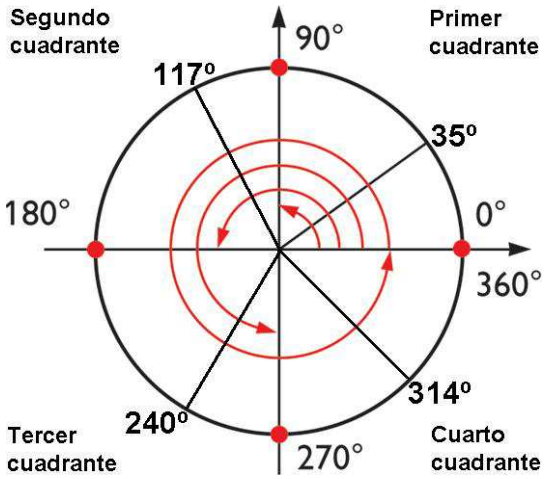
Dado un ángulo $\alpha$ en el sistema sexagesimal:

$0^o < \alpha < 90^o \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in$ I C

$90^o < \alpha < 180^o \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in$ II C

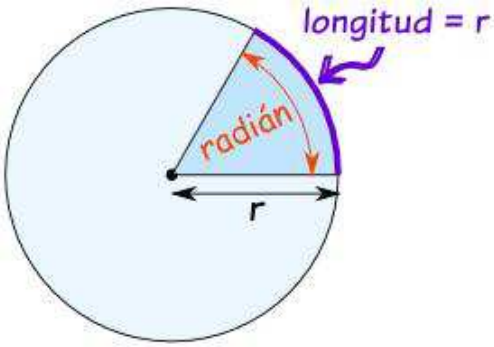
$180^o < \alpha < 270^o \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in$ III C

$270^o < \alpha < 360^o \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in$ IV C




### Sistema de radianes

El **radián** es el ángulo plano que teniendo su vértice en el centro de un círculo, intercepta sobre su circunferencia un arco de longitud igual al radio. Se representa por **rad**.



De la definición se deduce que el número de radios que caben en una circunferencia es igual al número de radianes contenidos en 360º.
Como la longitud de una circunferencia es $L = 2\pi r$, hay $2\pi$ radios en una circunferencia y en consecuencia hay $2\pi$ radianes contenidos en 360º.

Lo anterior se resume en la siguiente equivalencia: $360^{o} = 2\pi \text{rad}$

**¿A cuántos grados, minutos y segundos equivale 1 radián?**

$$1 \text{ rad} = 1 \text{ rad} \cdot \frac{360^{o}}{2\pi \text{rad}} = \frac{360^{o}}{2\pi} \cong 57{,}296^{o} = 57^{o}\, 17'\, 45''$$

**Paso de grados a radianes y viceversa**

<u>Ejemplo 1</u>: para expresar en grados el ángulo $\frac{2\pi}{3}\text{rad}$, se utiliza la equivalencia $180^{o} = \pi \text{rad}$

$$\frac{2\pi}{3}\text{ rad} = \frac{2\pi}{3}\text{ rad} \cdot \frac{180^{o}}{\pi \text{rad}} = \frac{2 \cdot 180^{o}}{3} = 120^{o}$$

<u>Ejemplo 2</u>: para expresar en radianes el ángulo 225º, se utiliza la equivalencia $\pi \text{rad} = 180^{o}$

$$225^{o} = 225^{o} \cdot \frac{\pi \text{rad}}{180^{o}} = \frac{225^{o} \cdot \pi}{180^{o}}\text{rad} = \frac{5\pi}{4}\text{rad}$$

En el siguiente gráfico aparece una lista de ángulos cuya medida en radianes es una fracción del número pi.

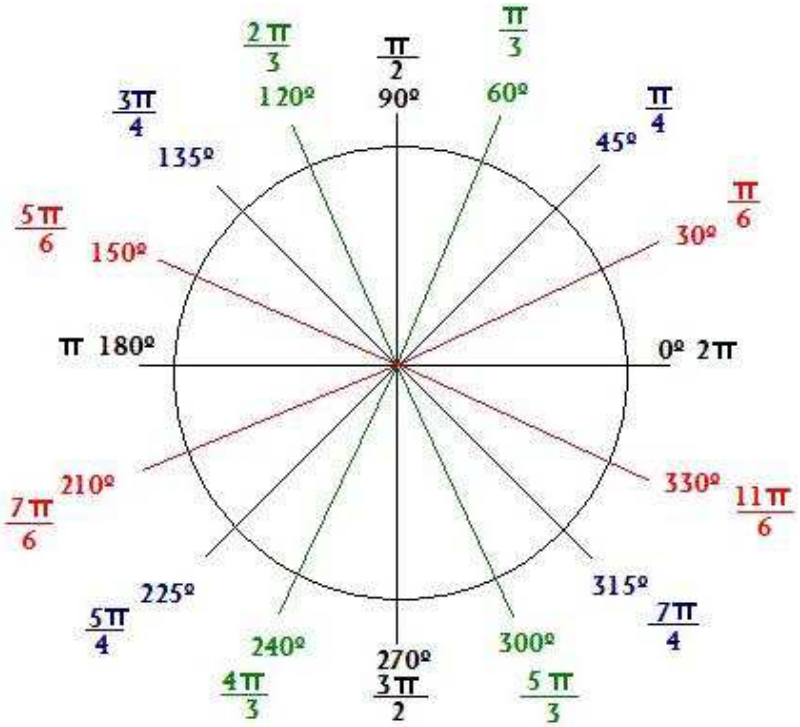
Dado un ángulo $\alpha$ en radianes:

$0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \text{I C}$

$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \text{II C}$

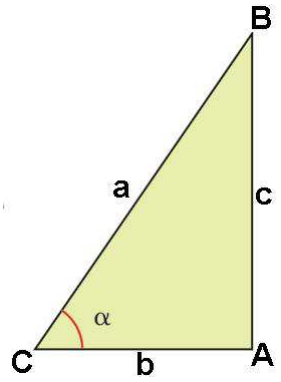
$\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \text{III C}$

$\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi \quad \Leftrightarrow \quad \alpha \in \text{IV C}$



## 2. Razones trigonométricas de un ángulo agudo.

Dado un ángulo agudo $\alpha$ en un triángulo rectángulo ABC con el ángulo recto en A, se definen las razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ de la siguiente forma:




Seno de $\alpha$ $\quad \operatorname{sen}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{c}{a}$

Coseno de $\alpha$ $\quad \cos\alpha = \dfrac{\text{cateto adyacente } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \dfrac{b}{a}$

Tangente de $\alpha$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{cateto adyacente } \alpha} = \dfrac{c}{b}$

### Razones trigonométricas inversas

Otras razones trigonométricas del ángulo $\alpha$ son las inversas multiplicativas del seno, coseno y tangente, que son las siguientes:

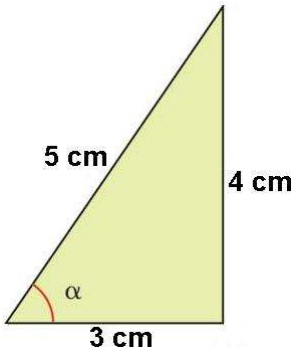
| Cosecante de $\alpha$ | Secante de $\alpha$ | Cotangente de $\alpha$ |
|---|---|---|
| $\operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha}$ | $\sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha}$ | $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$ |

Ejemplo 1: en el triángulo rectángulo de la figura, las razones trigonométricas de $\alpha$ son:

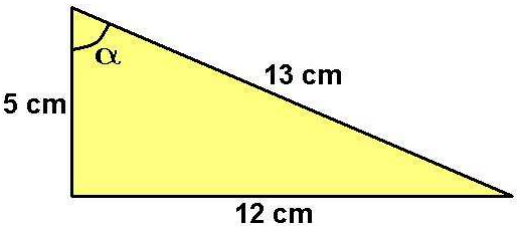
$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{5}{4} = 1{,}25$

$\cos\alpha = \dfrac{3}{5} = 0{,}6 \qquad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{5}{3} \cong 1{,}66$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{4}{3} \cong 1{,}33 \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$




Ejemplo 2: en el triángulo rectángulo de la figura, las razones trigonométricas de $\alpha$ son:

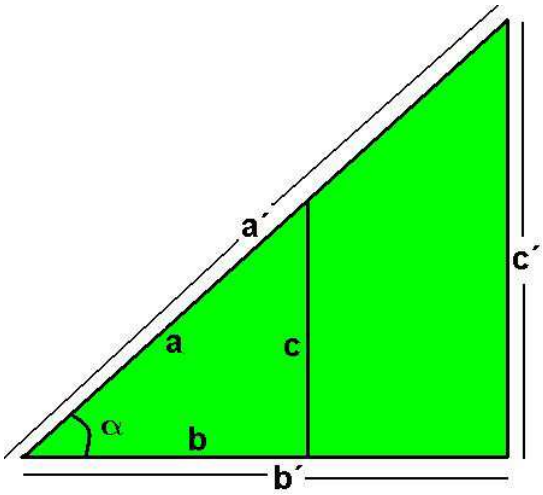



$\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{12}{13} \cong 0{,}92 \qquad \operatorname{cosec}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}\alpha} = \dfrac{13}{12} \cong 1{,}08$

$\cos\alpha = \dfrac{5}{13} \cong 0{,}38 \qquad \sec\alpha = \dfrac{1}{\cos\alpha} = \dfrac{13}{5} = 2{,}6$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{12}{5} = 2{,}4 \qquad \operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{5}{12} \cong 0{,}42$

**Las razones trigonométricas no dependen del tamaño del triángulo**




Las razones trigonométricas de un ángulo sólo dependen del ángulo. No dependen del tamaño del triángulo que lo contiene.

Esto se debe a que los triángulos rectángulos que contienen al ángulo $\alpha$ son semejantes y por lo tanto, sus lados son proporcionales.

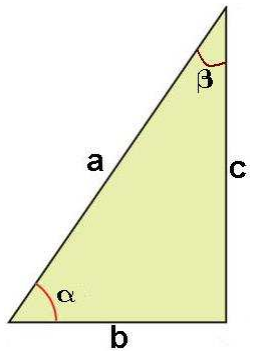
$$\text{sen}\alpha = \frac{c}{a} = \frac{c'}{a'} \qquad \cos\alpha = \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} \qquad \text{tg}\alpha = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'}$$

**Razones trigonométricas de ángulos complementarios**

Dos ángulos $\alpha, \beta$ son complementarios si $\alpha + \beta = 90^o$

Si dos ángulos son complementarios, entonces: $\text{sen}\alpha = \cos\beta \qquad \cos\alpha = \text{sen}\beta \qquad \text{tg}\alpha = \text{cotg}\beta$

Demostración:




$$\text{sen}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adyacente } \beta}{\text{hipotenusa}} = \cos\beta$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adyacente } \alpha}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{a} = \frac{\text{cateto opuesto } \beta}{\text{hipotenusa}} = \text{sen}\beta$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{cateto adyacente } \alpha} = \frac{c}{b} = \frac{\text{cateto adyacente } \beta}{\text{cateto opuesto } \beta} = \frac{1}{\text{tg}\beta} = \text{cotg}\beta$$

Este resultado suele formularse así: $\text{sen}\alpha = \cos(90^o - \alpha) \qquad \cos\alpha = \text{sen}(90^o - \alpha) \qquad \text{tg}\alpha = \text{cotg}(90^o - \alpha)$

Ejemplo 1: $\text{sen}30^o = \cos 60^o \qquad \cos 30^o = \text{sen}60^o \qquad \text{tg}30^o = \text{cotg}60^o = \dfrac{1}{\text{tg}60^o}$

Ejemplo 2: $\text{sen}15^o = \cos 75^o \qquad \cos 15^o = \text{sen}75^o \qquad \text{tg}15^o = \text{cotg}75^o = \dfrac{1}{\text{tg}75^o}$

Ejemplo 3: $\text{sen}45^o = \cos 45^o \qquad \text{tg}45^o = \text{cotg}45^o = \dfrac{1}{\text{tg}45^o}$

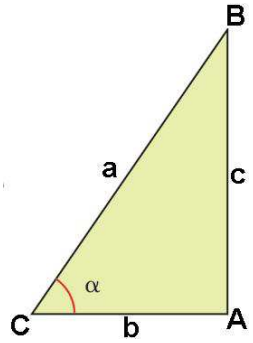
## 3. Relaciones trigonométricas.

Las siguientes relaciones son válidas para cualquier ángulo $\alpha$ (no necesariamente agudo).

**Notación**: el cuadrado de una razón trigonométrica se escribe situando el "exponente dos" entre la abreviatura y el ángulo, es decir: $(\text{sen}\alpha)^2 = \text{sen}^2\alpha$ (Idem para el resto de razones)

(R1) $\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

RELACIÓN FUNDAMENTAL DE LA TRIGONOMETRÍA




Demostración: teniendo en cuenta que en todo triángulo rectángulo se cumple el Teorema de Pitágoras ($b^2 + c^2 = a^2$), se tiene lo siguiente:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(\frac{c}{a}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = \frac{c^2}{a^2} + \frac{b^2}{a^2} = \frac{c^2+b^2}{a^2} = \frac{a^2}{a^2} = 1$$

(R2) $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$ Demostración: $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{c}{a} \div \dfrac{b}{a} = \dfrac{c\cdot a}{a\cdot b} = \dfrac{c}{b} = \operatorname{tg}\alpha$

(R3) $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$ Demostración: $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \dfrac{1}{1} \div \dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$

(R4) $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ Demostración: $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = 1 + \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

(R5) $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$ Demostración: $1 + \operatorname{cotg}^2\alpha = 1 + \dfrac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha}{\operatorname{sen}^2\alpha} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}^2\alpha}$

Ejemplo 1: sabiendo que $\operatorname{sen}\alpha = \dfrac{3}{5}$, se pueden hallar $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{16}{25} \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{5} \div \frac{4}{5} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

Ejemplo 2: sabiendo que $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, se pueden hallar $\operatorname{sen}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ de la siguiente forma:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{4}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{4}{9}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2}{3} \div \frac{\sqrt{5}}{3} = \frac{6}{3\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

Ejemplo 3: sabiendo que $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$, se pueden hallar $\operatorname{sen}\alpha$, $\cos\alpha$ de la siguiente forma:

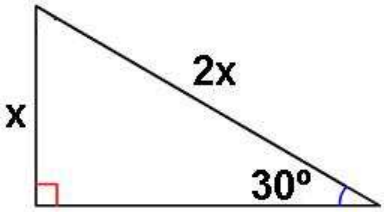
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 1 + (2\sqrt{2})^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow 9 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{9} \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha + \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 \Rightarrow \operatorname{sen}^2\alpha = \frac{8}{9} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{\frac{8}{9}} \Rightarrow \operatorname{sen}\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

**Razones trigonométricas de 30º, 45º, 60º**

| | | |
|---|---|---|
| $\text{sen } 30^\circ = \frac{1}{2}$ | $\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\text{tg } 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\text{sen } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\text{tg } 45^\circ = 1$ |
| $\text{sen } 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ | $\text{tg } 60^\circ = \sqrt{3}$ |

<u>Demostración</u>: con ayuda del transportador de ángulos, se construye un triángulo rectángulo (da igual el tamaño) que contenga un ángulo de 30º.




Al medir con la regla, la hipotenusa es el doble del cateto opuesto. Por lo tanto, $\text{sen } 30^\circ = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

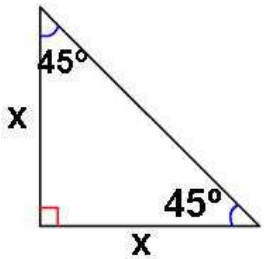
$$\text{sen}^2 30^\circ + \cos^2 30^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 30^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 30^\circ = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{\text{sen}30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} \div \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Aplicando las relaciones existentes entre los ángulos complementarios 30º y 60º, se obtienen las razones trigonométricas de 60º a partir de las de 30º:

$$\text{sen}60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \cos 60^\circ = \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2} \qquad \text{tg}60^\circ = \frac{1}{\text{tg}30^\circ} = \frac{1}{1} \div \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

Con ayuda del transportador de ángulos, se construye un triángulo rectángulo (da igual el tamaño) que contenga un ángulo de 45º.




Al medir con la regla, los catetos son iguales. Por lo tanto, $\text{tg}45^\circ = \frac{x}{x} = 1$

$$1 + \text{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad 1 + 1^2 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \Rightarrow \quad \cos^2\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

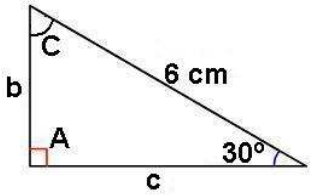
$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\alpha + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \text{sen}^2\alpha = \frac{2}{4} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\alpha = \sqrt{\frac{2}{4}} \quad \Rightarrow \quad \text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

## 4. Resolución de triángulos.

Resolver un triángulo rectángulo equivale a determinar el valor de los tres lados y los tres ángulos del triángulo. Se pueden dar cuatro casos dependiendo de cuáles sean los datos.

### Caso 1. Que los datos sean la hipotenusa y un ángulo agudo.

Ejemplo: la hipotenusa mide 6 cm y uno de sus ángulos mide 30º.



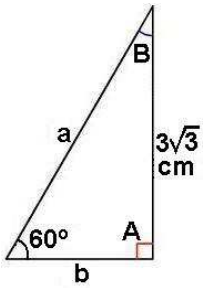

A = 90º porque es recto; C = 60º porque A + B + C = 180º

$$\text{sen}30^\circ = \frac{b}{6} \Rightarrow b = 6 \cdot \text{sen}30^\circ \Rightarrow b = 6 \cdot \frac{1}{2} \Rightarrow b = 3 \text{ cm}$$

$$\cos 30^\circ = \frac{c}{6} \Rightarrow c = 6 \cdot \cos 30^\circ \Rightarrow c = 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 3\sqrt{3} \text{ cm}$$

### Caso 2. Que los datos sean un cateto y un ángulo agudo.

Ejemplo: un cateto mide $3\sqrt{3}$ cm y uno de sus ángulos mide 60º.



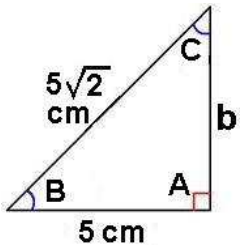

A = 90º porque es recto; B = 30º porque A + B + C = 180º

$$\text{sen}60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{a} \Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{a} \Rightarrow a = \frac{6\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow a = 6 \text{ cm}$$

$$\text{tg}60^\circ = \frac{3\sqrt{3}}{b} \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{3\sqrt{3}}{b} \Rightarrow b = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = 3 \text{ cm}$$

### Caso 3. Que los datos sean la hipotenusa y un cateto.

Ejemplo: un cateto mide 5 cm y la hipotenusa mide $5\sqrt{2}$ cm.



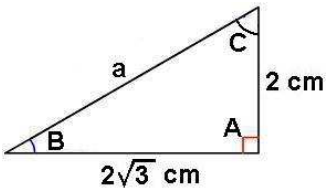

A = 90º (A es recto); $\cos B = \frac{5}{5\sqrt{2}} \Rightarrow \cos B = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow B = 45^\circ$

C = 45º porque A + B + C = 180º

$$\text{tg}B = \frac{b}{5} \Rightarrow \text{tg}45^\circ = \frac{b}{5} \Rightarrow b = 5 \cdot \text{tg}45^\circ \Rightarrow b = 5 \cdot 1 \Rightarrow b = 5 \text{ cm}$$

### Caso 4. Que los datos sean los dos catetos.

Ejemplo: los catetos miden 2 cm y $2\sqrt{3}$ cm, respectivamente.




A = 90º (A es recto); $\text{tg}B = \frac{2}{2\sqrt{3}} \Rightarrow \text{tg}B = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow B = 30^\circ$

C = 60º porque A + B + C = 180º

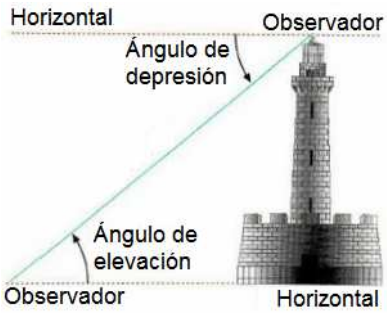
$$\text{sen}B = \frac{2}{a} \Rightarrow \text{sen}30^\circ = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{2 \cdot 2}{1} \Rightarrow a = 4 \text{ cm}$$

**Estrategia de la altura**

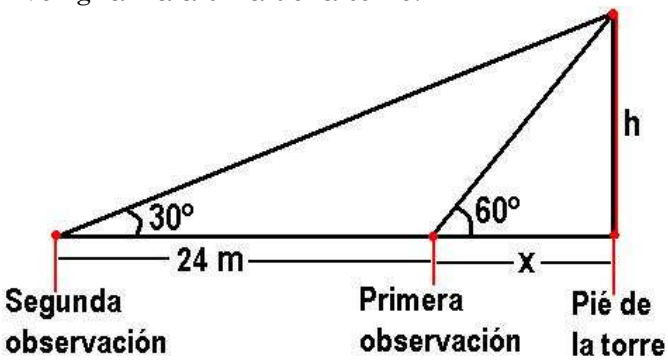
Se basa en utilizar la altura común a dos triángulos rectángulos. A continuación, se utilizan las razones trigonométricas en cada uno de estos dos triángulos.

Por **ángulo de elevación** se entiende el formado por **la línea de visión a un punto alto, con la horizontal**.

Por **ángulo de depresión** se entiende el formado por **la línea de visión a un punto bajo, con la horizontal**.




Ejemplo: para conocer la altura de una torre se hacen dos mediciones. La primera, desde un punto situado en el suelo, obteniéndose un ángulo de elevación de 60º. Desde este punto nos alejamos 24 m. Desde este segundo punto, se obtiene ahora un ángulo de elevación de 30º. Averiguar la altura de la torre.




Aplicando la tangente de 60º en el triángulo "pequeño", se tiene que: $\text{tg}60^\circ = \dfrac{h}{x}$

Aplicando la tangente de 30º en el triángulo "grande", se tiene que: $\text{tg}30^\circ = \dfrac{h}{24+x}$

Ambas ecuaciones forman un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Ahora se resuelve el sistema por el método de igualación:

$$\text{tg}60^\circ = \frac{h}{x} \quad \Rightarrow \quad h = x \cdot \text{tg}60^\circ \quad \Rightarrow \quad h = \sqrt{3} \cdot x$$

$$\text{tg}30^\circ = \frac{h}{24+x} \quad \Rightarrow \quad h = (24+x) \cdot \text{tg}30^\circ \quad \Rightarrow \quad h = (24+x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\sqrt{3}x = (24+x)\frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Rightarrow \quad 3\sqrt{3}x = 24\sqrt{3} + \sqrt{3}x \quad \Rightarrow \quad 2\sqrt{3}x = 24\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{24\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = 12 \text{ m} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad h = \sqrt{3} \cdot x \quad \Rightarrow \quad h = 12\sqrt{3} \text{ m} \cong 20{,}78 \text{ m}$$

## 5. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Para ampliar a un ángulo cualquiera las definiciones de las razones trigonométricas, se aplican los siguientes pasos:

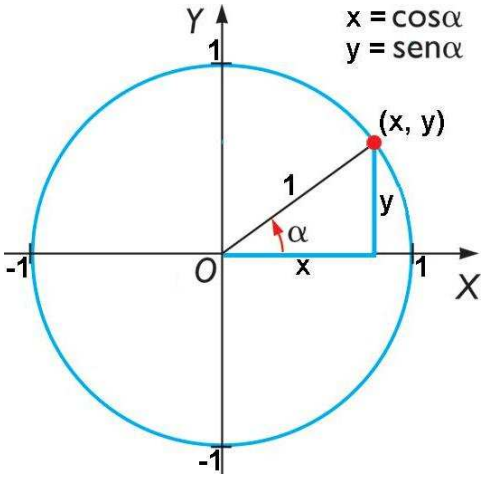
1. En un sistema de ejes cartesianos, se traza una circunferencia de radio 1 con centro en el origen O. A esta circunferencia se le llama **circunferencia goniométrica**.

2. Dado un ángulo $\alpha$ cualquiera, no necesariamente agudo, se hace coincidir su vértice con el origen O y su lado inferior con el eje OX.

3. El lado superior de $\alpha$ corta a la circunferencia goniométrica en un punto de coordenadas (x, y).

4. Por definición, las razones trigonométricas de $\alpha$ son:

$\operatorname{sen}\alpha = y \qquad \cos\alpha = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$




**Las nuevas definiciones son ampliaciones de las definiciones para un ángulo agudo**

En efecto, en el caso de que $\alpha$ sea un ángulo agudo, obsérvese que:

$$\operatorname{sen}\alpha = y = \frac{y}{1} = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos\alpha = x = \frac{x}{1} = \frac{\text{cateto adyacente } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{cateto adyacente } \alpha}$$

**¿Por qué se elige la circunferencia goniométrica para ampliar las definiciones?**

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo no dependen del tamaño del triángulo rectángulo que lo contiene. Por lo tanto, las nuevas definiciones no dependen del radio de la circunferencia elegida y en consecuencia, se puede elegir una circunferencia de radio 1.

Si la circunferencia tuviera radio $r \neq 1$, por semejanza de triángulos, se tendría que:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{y'}{r} = \frac{y}{1} = y \qquad \cos\alpha = \frac{x'}{r} = \frac{x}{1} = x \qquad \operatorname{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$$

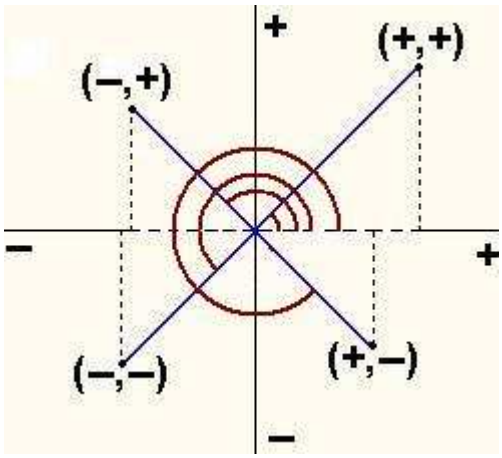
**Acotación de las razones trigonométricas**

Las razones trigonométricas **seno** y **coseno** toman sólo valores comprendidos entre $-1$ y $1$.

$$-1 \leq \operatorname{sen}\alpha \leq 1 \qquad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

La razón trigonométrica **tangente** no está acotada, puede tomar cualquier valor real.

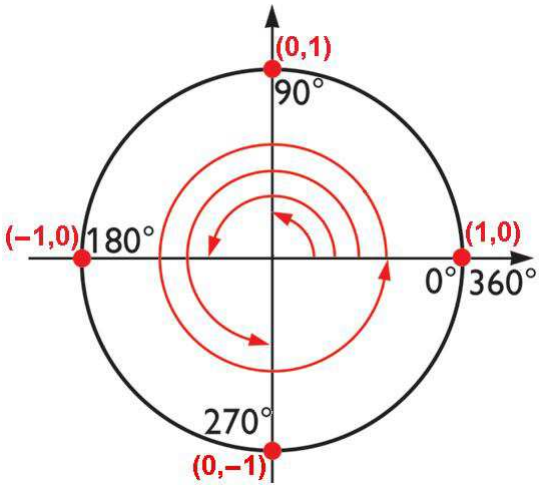
## Signo de las razones trigonométricas




$(x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

| | $\operatorname{sen}\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ |
|---|---|---|---|
| $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ | + | + | + |
| $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ | + | – | – |
| $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ | – | – | + |
| $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ | – | + | – |

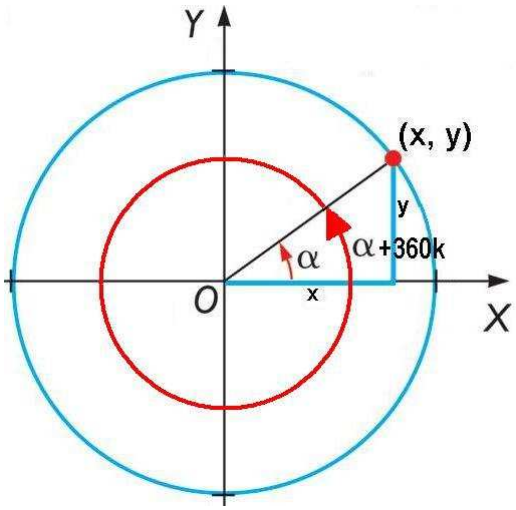
## Razones trigométricas de 0º, 90º, 180º, 270º




$(x, y) = (\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$

| | | |
|---|---|---|
| $\operatorname{sen}0^\circ = 0$ | $\cos 0^\circ = 1$ | $\operatorname{tg}0^\circ = 0$ |
| $\operatorname{sen}90^\circ = 1$ | $\cos 90^\circ = 0$ | $\nexists\ \operatorname{tg}90^\circ$ |
| $\operatorname{sen}180^\circ = 0$ | $\cos 180^\circ = -1$ | $\operatorname{tg}180^\circ = 0$ |
| $\operatorname{sen}270^\circ = -1$ | $\cos 270^\circ = 0$ | $\nexists\ \operatorname{tg}270^\circ$ |
| $\operatorname{sen}360^\circ = 0$ | $\cos 360^\circ = 1$ | $\operatorname{tg}360^\circ = 0$ |

## Las razones trigonométricas tienen un comportamiento circular




Los ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, tienen las mismas razones trigonométricas.

$\operatorname{sen}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{sen}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{sen}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{sen}\alpha$

$\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos\alpha$ $\qquad$ $\cos(\alpha + 2\pi k) = \cos\alpha$

$\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{tg}\alpha$ $\qquad$ $\operatorname{tg}(\alpha + 2\pi k) = \operatorname{tg}\alpha$

$\forall k \in \mathbb{Z}$

<u>Ejemplos</u>:

$\operatorname{sen}420^\circ = \operatorname{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ porque $420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$

$\operatorname{tg}750^\circ = \operatorname{tg}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$ porque $750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$

$\cos 1125^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ porque $1125^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 45^\circ$

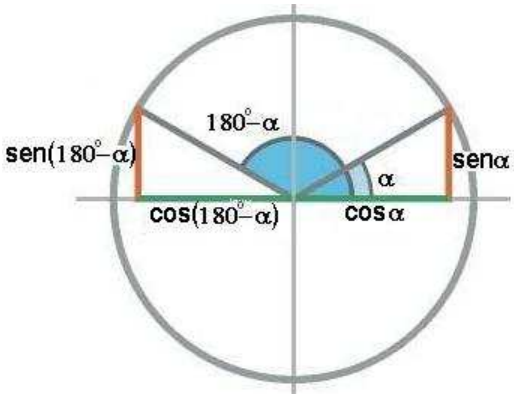
## 6. Reducción al primer cuadrante.

Si un ángulo pertenece al segundo, tercer o cuarto cuadrante, es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas tienen los mismos valores absolutos.

**a) Ángulos que suman 180º**

$\text{sen}(180^\circ-\alpha) = \text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}(\pi-\alpha) = \text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$




Ejemplos:

$\text{sen}120^\circ = \text{sen}60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

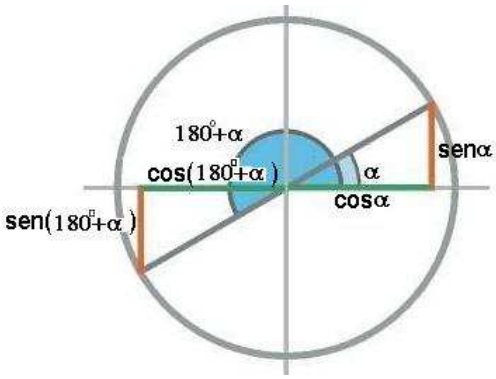
$\text{sen}135^\circ = \text{sen}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}150^\circ = \text{sen}30^\circ = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

**b) Ángulos que difieren en 180º**

$\text{sen}(180^\circ+\alpha) = -\text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(180^\circ+\alpha) = -\cos\alpha$

$\text{sen}(\pi+\alpha) = -\text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$




Ejemplos:

$\text{sen}210^\circ = -\text{sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 210^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

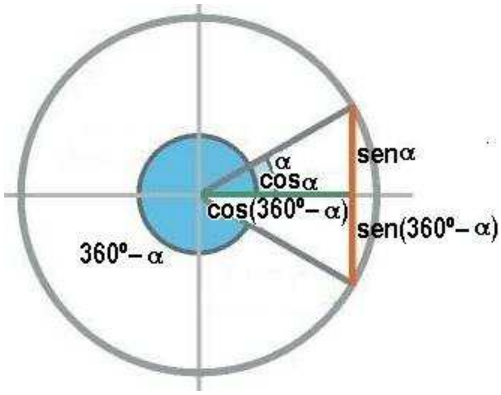
$\text{sen}225^\circ = -\text{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 225^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\text{sen}240^\circ = -\text{sen}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 240^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$

**c) Ángulos que suman 360º**

$\text{sen}(360^\circ-\alpha) = -\text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(360^\circ-\alpha) = \cos\alpha$

$\text{sen}(2\pi-\alpha) = -\text{sen}\alpha$ $\qquad$ $\cos(2\pi-\alpha) = \cos\alpha$




Ejemplos:

$\text{sen}300^\circ = -\text{sen}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $\cos 300^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$

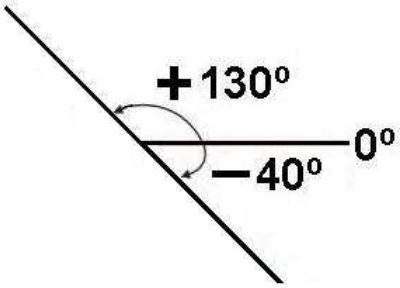
$\text{sen}315^\circ = -\text{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\qquad$ $\cos 315^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

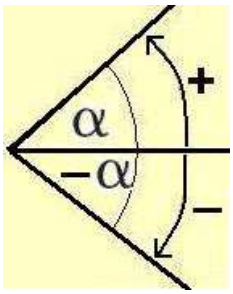
$\text{sen}330^\circ = -\text{sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos 330^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

**Ángulo orientado**

Un ángulo tiene signo **negativo** si su sentido de giro es idéntico al de las manecillas del reloj.

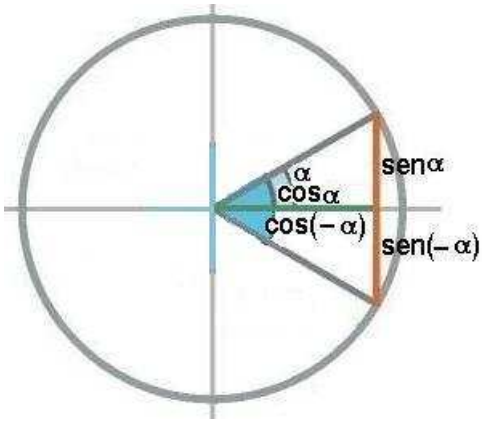
Un ángulo tiene signo **positivo** si su sentido de giro es contrario al de las manecillas del reloj.




$-\alpha$ es el ángulo opuesto de $\alpha$

**Razones trigonométricas de ángulos opuestos** $\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha$ $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$




Ejemplos:

$\operatorname{sen}(-30^\circ) = -\operatorname{sen}30^\circ = -\frac{1}{2}$ $\cos(-30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\operatorname{sen}(-45^\circ) = -\operatorname{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\cos(-45^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\operatorname{sen}(-60^\circ) = -\operatorname{sen}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\cos(-60^\circ) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$