

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1º BACHILLERATO.

UNIDAD 10. CÓNICAS.



ACTIVIDADES

1. Lugares geométricos.

1. Hallar la ecuación general de la mediatriz del segmento de extremos $A(6, -2)$ y $B(4, 6)$.
2. Hallar la ecuación general de las bisectrices de los ángulos que forman, respectivamente, las rectas $r \equiv 3x - 4y + 5 = 0$, $s \equiv x - 3 = 0$
3. Dados los puntos $A(1, 3)$ y $B(-2, 1)$, determinar la ecuación del lugar geométrico de los puntos P del plano tales que el producto escalar de los vectores \overrightarrow{AP} y \overrightarrow{BP} es igual a 5.

2. La circunferencia.

4. En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación general de la circunferencia:
 - a) Con centro $C(1, 1)$ y radio 3
 - b) Con centro $C(0, 0)$ y radio 2
 - c) Con centro $C(4, 1)$ y pasa por el punto $P(2, -3)$
 - d) De diámetro \overline{PQ} , siendo $P(-4, 2)$, $Q(1, 6)$
5. En cada uno de los siguientes casos, averiguar si las siguientes ecuaciones corresponden a circunferencias. En caso afirmativo, hallar su centro y su radio.
 - a) $x^2 + y^2 - 4x + 10y + 25 = 0$
 - b) $x^2 + y^2 - 18x - 19 = 0$
 - c) $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 14 = 0$
 - d) $x^2 + y^2 + 3x - 2y - 3 = 0$
6. Determinar la ecuación general de la circunferencia de centro $C(2, 3)$ y tangente a la recta $t \equiv 4x - 3y + 6 = 0$.
7. Hallar la ecuación general de la recta tangente a la circunferencia $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 10$ en el punto $P(2, 5)$.
8. Hallar la ecuación general de las rectas tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ que pasan por el punto $A(0, 6)$.
9. En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos:
 - a) $A(2, 1)$, $B(3, 2)$, $C(4, 1)$
 - b) $P(-1, 2)$, $Q(-3, 4)$, $R(2, 5)$
10. Hallar la ecuación general de la circunferencia que pasa por los puntos $A(1, -3)$ y $B(2, 4)$ y que tiene su centro en la recta $s \equiv x - 2y + 4 = 0$

3. La elipse.

11. Determinar la longitud del eje mayor, la longitud del eje menor, los vértices, los focos, la distancia focal y la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $16x^2 + 25y^2 = 400$

b) $\frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{2} = 1$

c) $3x^2 + 6y^2 = 12$

12. Determinar la ecuación reducida de la elipse que tiene:

a) Semieje mayor 10 u y distancia focal 12 u b) Excentricidad 0,4 y semidistancia focal 2 u

c) Excentricidad $1/3$ y vértices $(0, 6)$, $(0, -6)$

13. Determinar la ecuación reducida de la elipse que pasa por los puntos:

a) $P(1, -1)$ y $Q(0, -4)$

b) $P(3, -2)$ y $Q(\sqrt{3}, 2\sqrt{3})$

14. Determinar la posición relativa de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y la recta que pasa por los puntos $P(-1, 4)$ y $Q(5, 0)$.

15. Hallar la ecuación de la recta tangente a la elipse $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$ en el punto $P(4, 1)$.

4. La hipérbola.

16. Determinar la longitud del eje real, la longitud del eje imaginario, los vértices, los focos, la distancia focal, las asíntotas y la excentricidad de las siguientes hipérbolas:

a) $4x^2 - y^2 = 1$

b) $7x^2 - 9y^2 = 63$

c) $3x^2 - 6y^2 = 12$

17. Determinar la ecuación reducida de la hipérbola que tiene:

a) Eje real 14 u y semidistancia focal 8 u b) Excentricidad $\sqrt{5}$ y focos $(5, 0)$, $(-5, 0)$

c) Excentricidad 3 y vértices reales $(1, 0)$, $(-1, 0)$ d) Foco $F(4, 0)$ y pasa por el punto $P(-4, 6)$

18. Determinar la ecuación reducida de la hipérbola que pasa por los puntos:

a) $P(4, 2)$ y $Q(6, \sqrt{14})$

b) $P(3\sqrt{5}, -2)$ y $Q(5, 0)$

19. Hallar la ecuación de la recta tangente a la hipérbola $4x^2 - y^2 = 20$ en el punto $P(3, 4)$.

20. Hallar la ecuación de las rectas tangentes a la hipérbola $2x^2 - 4y^2 = 8$ que pasan por el punto $P(0, 6)$.

5. La parábola.

21. Determinar el parámetro, el foco, la recta directriz y el eje de simetría de las siguientes parábolas con vértice en el origen de coordenadas:

a) $y^2 = 8x$

b) $y^2 = 2x$

c) $x^2 = 4y$

22. Determinar la ecuación reducida de la parábola con vértice en el origen de coordenadas:

a) Con eje de simetría el eje X y foco F(1, 0).

b) Con eje de simetría el eje Y y que pasa por el punto P(-3, 3).

23. Hallar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 10x$ en el punto P(10, 10).

24. Determinar la ecuación de la recta tangente a la parábola $y^2 = 4x$ que pasa por P(0, 2).

SOLUCIONES

1. $r \equiv x - 4y + 3 = 0$

2. $b_1 \equiv x + 2y - 10 = 0$, $b_2 \equiv 4x - 2y - 5 = 0$

3. $x^2 + y^2 + x - 4y - 4 = 0$

4. a) $x^2 + y^2 - 2x - 2y - 7 = 0$; b) $x^2 + y^2 - 4 = 0$; c) $x^2 + y^2 - 8x - 2y - 3 = 0$;

d) $x^2 + y^2 + 3x - 8y + 8 = 0$

5. a) Sí, tiene centro $C(2, -5)$ y radio 2; b) Sí, tiene centro $C(9, 0)$ y radio 10; c) No es una circunferencia; d) Sí, tiene centro $C(-3/2, 1)$ y radio $5/2$.

6. $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$

7. $t \equiv x + 3y - 17 = 0$

8. $t_1 \equiv \sqrt{11}x - 5y + 30 = 0$, $t_2 \equiv \sqrt{11}x + 5y - 30 = 0$

9. a) $x^2 + y^2 - 6x - 2y + 9 = 0$; b) $x^2 + y^2 + x - 9y + 14 = 0$

10. $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 20 = 0$

11. a) Eje mayor = 10 u, eje menor = 8 u, vértices: $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$, focos: $F(3, 0)$, $F'(-3, 0)$, distancia focal = 6 u, $e = 0,6$; b) Eje mayor = $2\sqrt{6}$ u, eje menor = $2\sqrt{2}$ u, vértices: $A(\sqrt{6}, 0)$, $A'(-\sqrt{6}, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$, $B'(0, -\sqrt{2})$, focos: $F(2, 0)$, $F'(-2, 0)$, distancia focal = 4 u, $e = 2/\sqrt{6} \cong 0,82$; c) Eje mayor = 4 u, eje menor = $2\sqrt{2}$ u, vértices: $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$, $B'(0, -\sqrt{2})$, focos: $F(\sqrt{2}, 0)$, $F'(-\sqrt{2}, 0)$, distancia focal = $2\sqrt{2}$ u, $e = \sqrt{2}/2 \cong 0,7$

12. a) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$; c) $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{36} = 1$

13. a) $15x^2 + y^2 = 16$; b) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{16} = 1$

14. La elipse y la recta no se tocan en ningún punto.

15. $t \equiv 2x + y - 9 = 0$

16. a) Eje real = 1 u, eje imaginario = 2 u, vértices: $A(1/2, 0)$, $A'(-1/2, 0)$, $B(0, 1)$, $B'(0, -1)$, focos: $F(\sqrt{5}/2, 0)$, $F'(-\sqrt{5}/2, 0)$, distancia focal = $\sqrt{5}$ u, $e = \sqrt{5}$;

b) Eje real = 6 u, eje imaginario = $2\sqrt{7}$ u, vértices: $A(3, 0)$, $A'(-3, 0)$, $B(0, \sqrt{7})$, $B'(0, -\sqrt{7})$, focos: $F(4, 0)$, $F'(-4, 0)$, distancia focal = 8 u, $e = 4/3$;

c) Eje real = 4 u, eje imaginario = $2\sqrt{2}$ u, vértices: $A(2, 0)$, $A'(-2, 0)$, $B(0, \sqrt{2})$, $B'(0, -\sqrt{2})$, focos: $F(\sqrt{6}, 0)$, $F'(-\sqrt{6}, 0)$, distancia focal = $2\sqrt{6}$ u, $e = \sqrt{6}/2$

17. a) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{15} = 1$; b) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$; c) $x^2 - \frac{y^2}{8} = 1$; d) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

18. a) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$; b) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{5} = 1$

19. $t \equiv 3x - y - 5 = 0$

20. $t_1 \equiv \sqrt{38}x - y + 6 = 0$, $t_2 \equiv \sqrt{38}x + y - 6 = 0$

21. a) $p = 4$, foco $F(2, 0)$, directriz $x = -2$, eje de simetría $y = 0$; b) $p = 1$, foco $F(1/2, 0)$, directriz $x = -1/2$, eje de simetría $y = 0$; c) $p = 2$, foco $F(0, 1)$, directriz $y = -1$, eje de simetría $x = 0$

22. a) $y^2 = 4x$; b) $x^2 = 3y$

23. $t \equiv x - 2y + 10 = 0$

24. $t \equiv x - 2y + 4 = 0$