DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

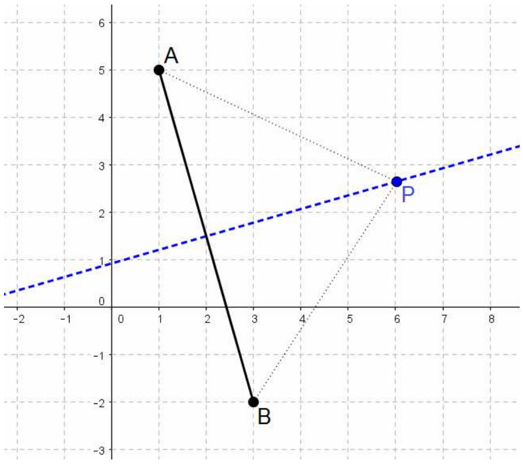
MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 10. CÓNICAS.

1. Lugares geométricos.

Se llama **lugar geométrico** al conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad. En un sistema de coordenadas cartesianas, se puede averiguar la expresión analítica o ecuación de un lugar geométrico. Para ello, basta considerar un punto (x, y) genérico y expresar algebraicamente la propiedad que lo define.

Ejemplo 1: la **mediatriz** de un segmento $\overline{AB}$ es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos A y B.



Si los extremos del segmento son los puntos A(1, 5) y B(3, –2), entonces un punto P(x, y) de la mediatriz del segmento $\overline{AB}$ cumple lo siguiente: d(P, A) = d(P, B)

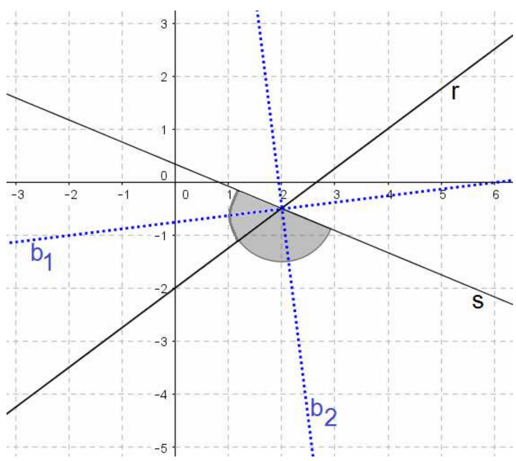
$$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad x^2+1-2x+y^2+25-10y=x^2+9-6x+y^2+4+4y$$
$$\Rightarrow \quad 1-2x+25-10y-9+6x-4-4y=0$$
$$\Rightarrow \quad 4x-14y+13=0$$

La mediatriz del segmento $\overline{AB}$ tiene por ecuación general $r \equiv 4x-14y+13=0$

Ejemplo 2: la **bisectriz** de un ángulo cuyos lados están determinados por las rectas r y s, es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas.

Si los lados del ángulo se encuentran en las rectas $r \equiv 3x-4y-8=0$, $s \equiv 5x+12y-4=0$, entonces un punto P(x, y) de la bisectriz del ángulo cumple lo siguiente: d(P, r) = d(P, s)

$$\frac{|3\cdot x-4\cdot y-8|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=\frac{|5\cdot x+12\cdot y-4|}{\sqrt{5^2+12^2}} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{3x-4y-8}{5}=\pm\frac{5x+12y-4}{13} \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \frac{39x-52y-104}{65}=\pm\frac{25x+60y-20}{65}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 39x-52y-104=25x+60y-20 \\ 39x-52y-104=-25x-60y+20 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \quad \begin{cases} x-8y-6=0 \\ 16x+2y-31=0 \end{cases}$$

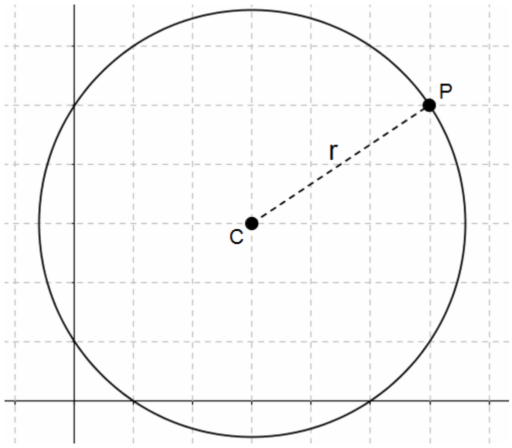


– La bisectriz del primer ángulo tiene por ecuación general $b_1 \equiv x-8y-6=0$

– La bisectriz del segundo ángulo tiene por ecuación general $b_2 \equiv 16x+2y-31=0$

2. La circunferencia.

Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia a un punto fijo C es constante: d(P, C) = constante = r
Al punto fijo se le llama **centro** y a la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y el centro se le llama **radio**.



La ecuación de una circunferencia de centro C(a, b) y radio r es $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$

La ecuación general de una circunferencia es
$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$, donde:
$D=-2a \qquad E=-2b \qquad F=a^2+b^2-r^2$

Ejemplo 1: la ecuación general de una circunferencia de centro C(1, 3) y radio 5 es
$$x^2+y^2-2x-6y-15=0$$
Se obtiene desarrollando la ecuación $(x-1)^2+(y-3)^2=5^2$ e igualando a cero:
$(x-1)^2+(y-3)^2=5^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+1-2x+y^2+9-6y=25 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-2x-6y-15=0$

Ejemplo 2: la circunferencia de ecuación general $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ tiene centro C(2, 3) y radio 5 ya que:

$D=-2a \;\Rightarrow\; -4=-2a \;\Rightarrow\; a=2 \qquad E=-2b \;\Rightarrow\; -6=-2b \;\Rightarrow\; b=3$
$F=a^2+b^2-r^2 \;\Rightarrow\; -12=2^2+3^2-r^2 \;\Rightarrow\; -12=4+9-r^2 \;\Rightarrow\; r^2=25 \;\Rightarrow\; r=5$

Nota: no toda ecuación de la forma $x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$ representa a una circunferencia, ya que de la relación $F=a^2+b^2-r^2$ no siempre se obtiene una solución válida para el radio r.

Ejemplo: la ecuación $x^2+y^2+4x-6y+17=0$ no es la ecuación de una circunferencia:

$D=-2a \;\Rightarrow\; 4=-2a \;\Rightarrow\; a=-2 \qquad E=-2b \;\Rightarrow\; -6=-2b \;\Rightarrow\; b=3$
$F=a^2+b^2-r^2 \;\Rightarrow\; 17=(-2)^2+3^2-r^2 \;\Rightarrow\; 17=4+9-r^2 \;\Rightarrow\; r^2=-4$ No tiene solución

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

1. Una recta t es **tangente** a una circunferencia de centro C y radio r $\Leftrightarrow$ d(C, t) = r
2. Una recta t **corta** a la circunferencia en dos puntos $\Leftrightarrow$ d(C, t) < r
3. Una recta t y una circunferencia **no se tocan** en ningún punto $\Leftrightarrow$ d(C, t) > r

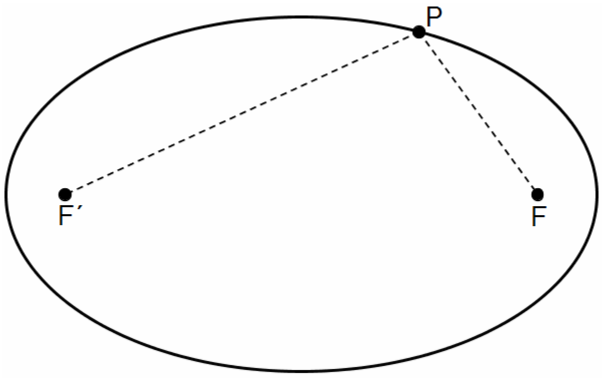
Ejemplo: para hallar la ecuación general de una circunferencia de centro C(4, –1) que sea tangente a la recta $t \equiv 2x+y-2=0$, se halla d(C, t). El valor obtenido debe ser el radio.

$$d(C,t)=\frac{|2\cdot 4+1\cdot(-1)-2|}{\sqrt{2^2+1^2}}=\frac{5}{\sqrt{5}}=\sqrt{5} \quad\Rightarrow\quad r=\sqrt{5}$$

La circunferencia tiene por ecuación $(x-4)^2+(y+1)^2=\sqrt{5}^2 \quad\Rightarrow\quad x^2+y^2-8x+2y+12=0$

3. La elipse.

Se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F´ es constante: d(P, F) + d(P, F´) = constante = 2a
A los dos puntos fijos se les llama **focos**.



Elementos de una elipse

Focos: los puntos F y F´

Eje de simetría horizontal: la recta que pasa por los focos F y F´

Eje de simetría vertical: la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$

Centro: el punto de corte C de los ejes de simetría.

Vértices: los puntos de corte A, A´, B, B´ entre la elipse y los ejes de simetría.

Eje mayor: el segmento $\overline{AA'}$

Eje menor: el segmento $\overline{BB'}$

Distancia focal: la longitud del segmento $\overline{FF'}$

<u>Ejemplo</u>:

Focos: los puntos F(6, 1) y F´(–2, 1)

Ejes de simetría: recta x = 2, recta y = 1

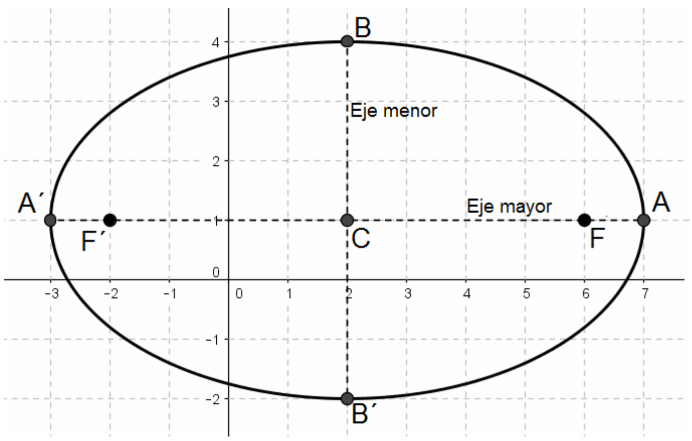
Centro: el punto C(2, 1)

Vértices: A(7, 1) A´(–3, 1) B(2, 4) B´(2, –2)

Eje mayor: segmento $\overline{AA'}$, que mide 10 u

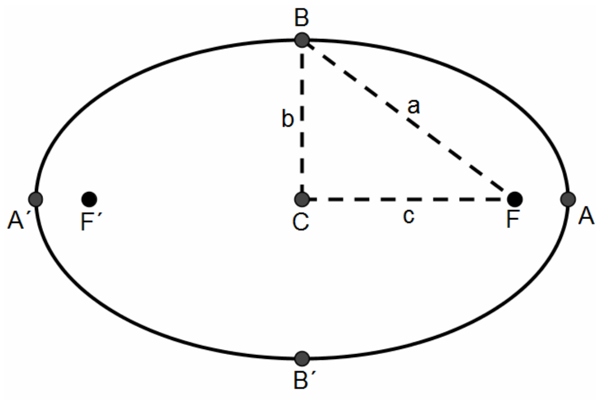
Eje menor: segmento $\overline{BB'}$, que mide 6 u

Distancia focal: 8 u



Relaciones métricas

Si se representa por **2a** la constante suma de distancias a los focos, por **2b** la longitud del eje menor y por **2c** la distancia focal, entonces se cumple lo siguiente:



1) La longitud del eje mayor $\overline{AA'}$ es 2a

2) $a^2 = b^2 + c^2$

Demostración:
1) El segmento $\overline{AA'}$ se puede escribir como suma $\overline{AA'} = \overline{A'F'} + \overline{AF'}$
Como $\overline{A'F'} = \overline{AF}$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{AF'}$
Finalmente, dado que el punto A pertenece a la elipse, entonces $\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$

2) Dado que B es un punto de la elipse, se cumple que $\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$
Como $\overline{BF} = \overline{BF'}$, se deduce que $\overline{BF} = a$
Si 2b es la longitud del eje menor, entonces $\overline{BC} = b$
Si 2c es la distancia focal, entonces $\overline{CF} = c$
Como los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{CF}$ son los catetos y $\overline{BF}$ la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cumplen el teorema de Pitágoras y por lo tanto $a^2 = b^2 + c^2$

Ecuación reducida de la elipse

Si se sitúan los dos focos de la elipse sobre el eje X, el eje de simetría horizontal sobre el eje X y el eje de simetría vertical sobre el eje Y, entonces:

– El centro tiene coordenadas C(0, 0)

– Los focos tienen coordenadas F(c, 0) y F´(–c, 0)

– Los vértices del eje mayor tienen coordenadas A(a, 0) y A´(–a, 0)

– Los vértices del eje menor tienen coordenadas B(0, b) y B´(0, –b)

– El eje mayor mide 2a, el eje menor mide 2b y la distancia focal mide 2c.

– Todo punto P(x, y) de la elipse cumple la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

A la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se le llama **ecuación reducida de la elipse**.

Recuérdese que los valores a, b y c están ligados mediante la relación $a^2 = b^2 + c^2$

Ejemplo:

Focos: los puntos F(3, 0) y F´(–3, 0)

Ejes de simetría: recta x = 0, recta y = 0

Centro: el punto C(0, 0)

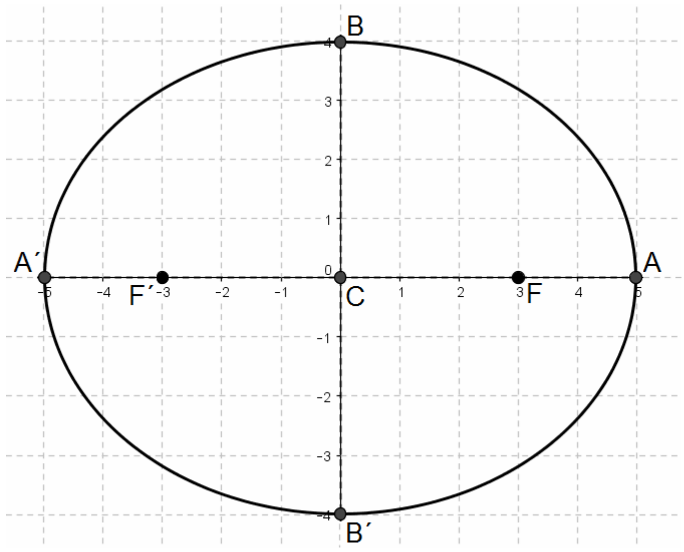
Vértices: A(5, 0) A´(–5, 0) B(0, 4) B´(0, –4)

Eje mayor: segmento $\overline{AA'}$, que mide 10 u

Eje menor: segmento $\overline{BB'}$, que mide 8 u

Distancia focal: 6 u

Obsérvese que a = 5, b = 4, c = 3 y que cumplen la relación $a^2 = b^2 + c^2$

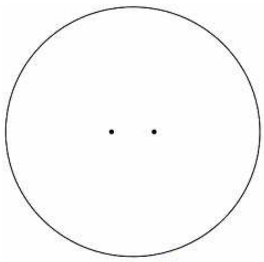


Ecuación reducida de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

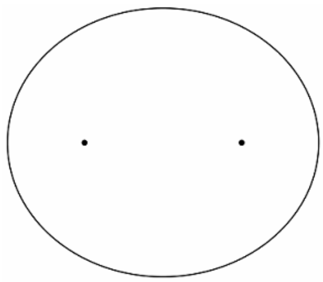
Excentricidad de la elipse

Se llama **excentricidad** de una elipse, al cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Se representa por **e**. Por lo tanto, $e = \frac{c}{a}$

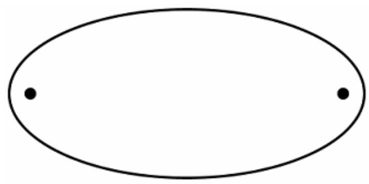
Dado que c < a, la excentricidad es siempre un valor comprendido entre 0 y 1: $0 < e < 1$



e = 0,15



e = 0,5



e = 0,9

– Cuanto más se aproxima la excentricidad al valor 0, más redondeada es la elipse. En el caso extremo de que fuera e = 0, entonces sería c = 0, los valores a y b serían iguales (a = b), y por tanto, el lugar geométrico sería una circunferencia.
– Cuanto más se aproxima la excentricidad al valor 1, más achatada es la elipse. En el caso extremo de que fuera e = 1, entonces los valores a y c serían iguales, b = 0, y por tanto, el lugar geométrico sería un segmento.

Ejemplo: para hallar la ecuación reducida y la excentricidad de una elipse cuya distancia focal es 6 cm y cuyo eje mayor mide 10 cm, se averigua primero la medida del eje menor:

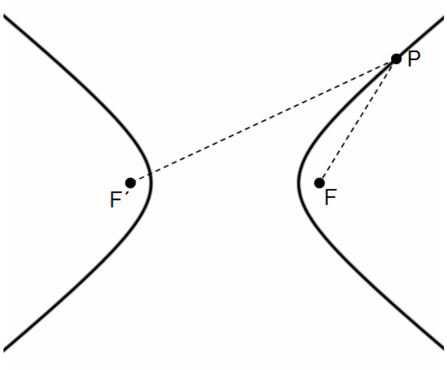
$2c = 6 \Rightarrow c = 3$ $\qquad$ $2a = 10 \Rightarrow a = 5$

$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ $\qquad$ El eje menor mide 8 cm

Su ecuación reducida es $\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ Su excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

4. La hipérbola.

Se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F´ es constante: | d(P, F) – d(P, F´) | = constante = 2a
A los dos puntos fijos se les llama **focos**.



Elementos de una hipérbola

Focos: los puntos F y F´

Eje de simetría horizontal: la recta que pasa por los focos F y F´

Eje de simetría vertical: la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$

Centro: el punto de corte C de los ejes de simetría.

Vértices reales: los puntos de corte A, A´ entre la hipérbola y el eje de simetría horizontal.

Vértices imaginarios: los puntos de corte B, B´ entre la circunferencia de centro A y radio CF con el eje de simetría vertical.

Eje real: el segmento $\overline{AA'}$ **Eje imaginario**: el segmento $\overline{BB'}$

Distancia focal: la longitud del segmento $\overline{FF'}$

Asíntotas: las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo cuyos lados tienen por puntos medios a los vértices A, A´, B, B´

Ejemplo:

Focos: los puntos F(7, 2) y F´(–3, 2)

Distancia focal: 10 u

Ejes de simetría: recta x = 2, recta y = 2

Centro: el punto C(2, 2)

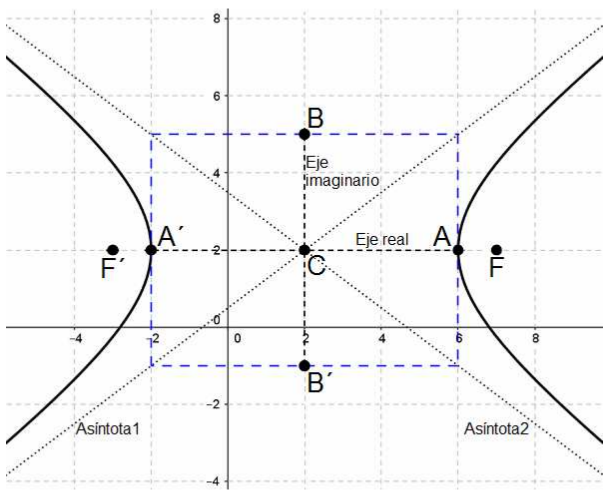
Vértices reales: A(6, 2) A´(–2, 2)

Vértices imaginarios: B(2, 5) B´(2, –1)

Eje real: segmento $\overline{AA'}$, que mide 8 u

Eje imaginario: segmento $\overline{BB'}$, que mide 6 u

Asíntotas: las rectas $3x - 4y + 2 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$

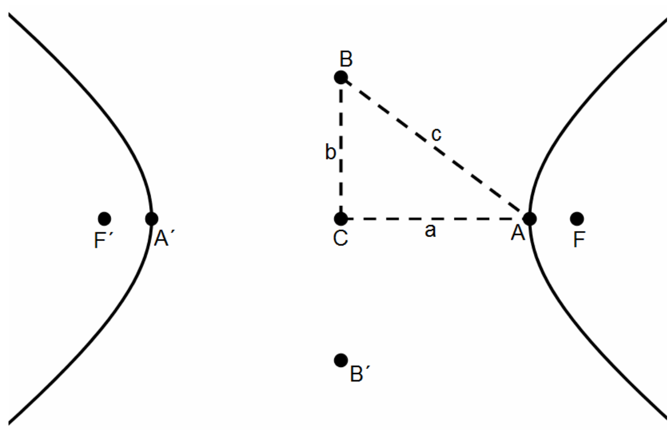


Relaciones métricas

Si se representa por **2a** la constante suma de distancias a los focos, por **2b** la longitud del eje imaginario y por **2c** la distancia focal, entonces se cumple lo siguiente:

1) La longitud del eje real $\overline{AA'}$ es 2a

2) $c^2 = a^2 + b^2$



<u>Demostración</u>:

1) El segmento $\overline{AA'}$ se puede escribir como diferencia $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{A'F'}$

Como $\overline{A'F'} = \overline{AF}$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{AF}$

Finalmente, dado que el punto A pertenece a la hipérbola, entonces $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{AF} = 2a$

2) Por la definición de B, se cumple que $\overline{AB} = c$

Si 2b es la longitud del eje imaginario, entonces $\overline{BC} = b$

Si 2c es la distancia focal, entonces $\overline{AC} = a$

Como los segmentos $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ son los catetos y $\overline{AB}$ la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cumplen el teorema de Pitágoras y por lo tanto $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuación reducida de la hipérbola

Si se ubican los dos focos de la hipérbola sobre el eje X, el eje de simetría horizontal sobre el eje X y el eje de simetría vertical sobre el eje Y, entonces:

– El centro tiene coordenadas C(0, 0)

– Los focos tienen coordenadas F(c, 0) y F´(–c, 0)

– Los vértices reales tienen coordenadas A(a, 0) y A´(–a, 0)

– Los vértices imaginarios tienen coordenadas B(0, b) y B´(0, –b)

– El eje real mide 2a, el eje imaginario mide 2b y la distancia focal mide 2c.

– Las asíntotas de la hipérbola son las rectas: $y = \frac{b}{a}x \qquad y = \frac{-b}{a}x$

– Todo punto P(x, y) de la elipse cumple la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

A la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se le llama **ecuación reducida de la hipérbola**.

Recuérdese que los valores a, b y c están ligados mediante la relación $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo:

Focos: los puntos F(5, 0) y F´(–5, 0)

Distancia focal: 10 u

Ejes de simetría: recta x = 0, recta y = 0

Centro: el punto C(0, 0)

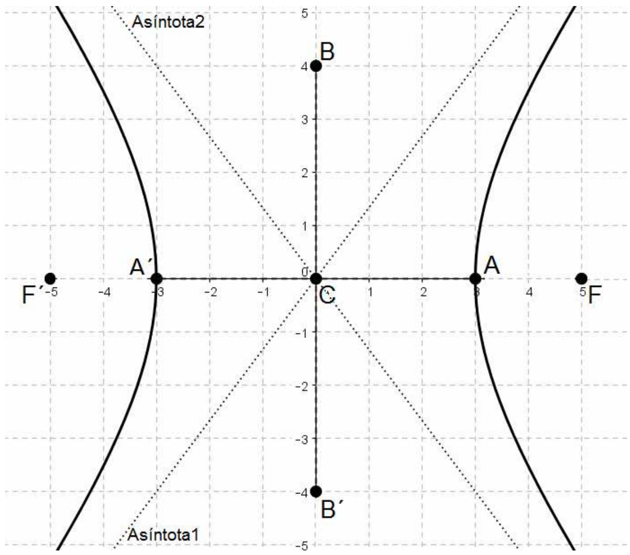
Vértices reales: A(3, 0) A´(–3, 0)

Vértices imaginarios: B(0, 4) B´(0, –4)

Eje real: segmento $\overline{AA'}$, que mide 6 u

Eje imaginario: segmento $\overline{BB'}$, que mide 8 u

Asíntotas: las rectas $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$



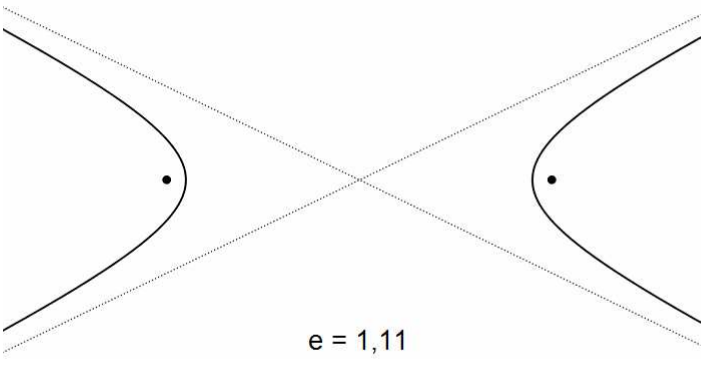
Obsérvese que $a = 3, b = 4, c = 5$ y que cumplen la relación $c^2 = a^2 + b^2$

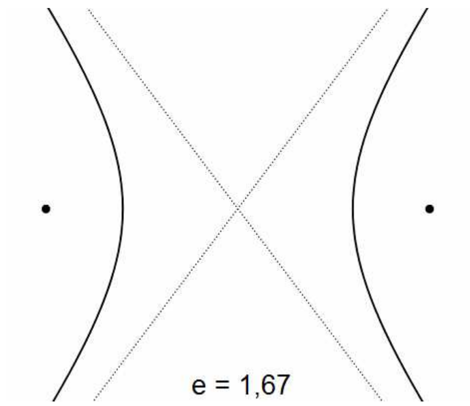
Ecuación reducida de la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Excentricidad de la hipérbola

Se llama **excentricidad** de una hipérbola, al cociente entre la semidistancia focal y el semieje real. Se representa por **e**. Por lo tanto, $e = \frac{c}{a}$

Dado que c > a, la excentricidad es siempre un valor mayor que 1: $e > 1$





Ejemplo: para hallar la ecuación reducida y la excentricidad de una elipse cuya distancia focal es 10 cm y cuyo eje real mide 6 cm, se averigua primero la medida del eje imaginario:

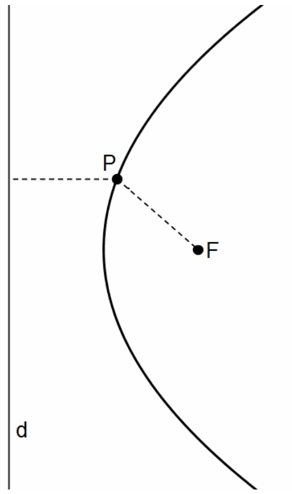
$2c = 10 \Rightarrow c = 5$ $\qquad$ $2a = 6 \Rightarrow a = 3$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$ $\qquad$ El eje imaginario mide 8 cm

Su ecuación reducida es $\frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ $\qquad$ Su excentricidad es $e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \cong 1{,}67$

5. La parábola.

Se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F y de una recta fija d: d(P, F) = d(P, d)
Al punto fijo se le llama **foco** y a la recta fija se le llama **directriz**.



Elementos de una parábola

Foco: el punto F

Directriz: la recta d

Eje de simetría: la recta perpendicular a la recta directriz y que pasa por el foco.

Vértice: el punto de corte V entre el eje de simetría y la parábola.

Parámetro: la distancia p del foco a la directriz.

Ejemplo:

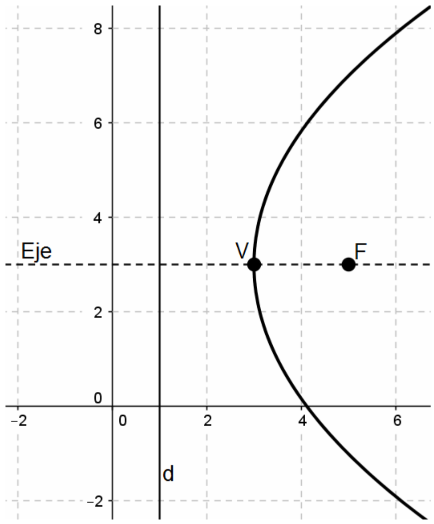
Foco: F(5, 3)

Directriz: recta x = 1

Eje de simetría: recta y = 3

Vértice: V(3, 3)

Parámetro: p = d(F, d) = 4



Ecuación reducida de la parábola

Caso 1. Si se ubican el vértice en el origen de coordenadas y el eje de simetría sobre el eje X, entonces:

– El foco tiene coordenadas $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

– La recta directriz tiene ecuación $x = -\frac{p}{2}$

– El vértice tiene coordenadas V(0, 0)

– El eje de simetría coincide con el eje X, es decir, su ecuación es $y = 0$

– Todo punto P(x, y) de la parábola cumple la siguiente ecuación: $y^2 = 2px$
A la ecuación $y^2 = 2px$ se le llama **ecuación reducida de la parábola**.

Ejemplo:

Foco: F(2, 0)

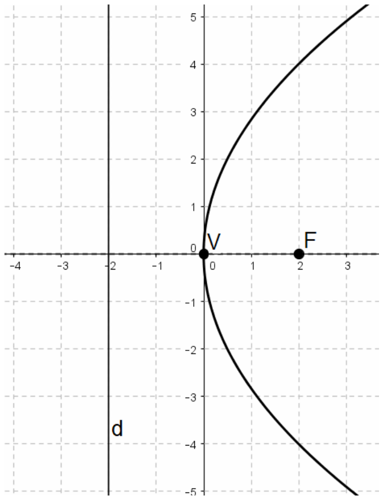
Directriz: recta $x = -2$

Eje de simetría: recta $y = 0$

Vértice: V(0, 0)

Parámetro: $p = d(F, d) = 4$

Ecuación reducida
de la parábola: $y^2 = 8x$



Caso 2. Si se ubican el vértice en el origen de coordenadas y el eje de simetría sobre el eje Y, entonces:

– El foco tiene coordenadas $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

– La recta directriz tiene ecuación $y = -\frac{p}{2}$

– El vértice tiene coordenadas V(0, 0)

– El eje de simetría coincide con el eje Y, es decir, su ecuación es $x = 0$

– Todo punto P(x, y) de la parábola cumple la siguiente ecuación: $x^2 = 2py$

A la ecuación $x^2 = 2py$ se le llama **ecuación reducida de la parábola**.

Ejemplo:

Foco: F(0, 2)

Directriz: recta $y = -2$

Eje de simetría: recta $x = 0$

Vértice: V(0, 0)

Parámetro: $p = d(F, d) = 4$

Ecuación reducida de la parábola: $x^2 = 8y$