DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 4. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

IES LA BAHIA

ACTIVIDADES

1. Rectas tangente y normal a una gráfica en un punto.

1. Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\dfrac{4x-1}{2x-2}$ en $x = 0$ b) $f(x)=1+\ln(2x-1)$ en $x = 1$ c) $f(x)=\operatorname{sen}x\cdot\cos x$ en $x = \pi$

d) $f(x)=x^2\cdot e^x$ en $x = 1$ e) $f(x)=\operatorname{sen}^2 x$ en $x = \pi/4$ f) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ en $x=\sqrt{e}$

2. Hallar los puntos de la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ donde su recta tangente tiene pendiente $-\dfrac{1}{4}$ y la ecuación de la recta tangente en cada uno de esos puntos.

3. Hallar el punto de la curva $f(x)=\ln x$ donde la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $r\equiv 4x-2y+1=0$ y calcular la ecuación de dicha recta.

4. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ paralelas a la recta $y = 4x–2$.

5. Hallar los puntos de la función $f(x)=x^3-x^2$ en los que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

6. Calcular los valores de **a** y **b** para que $f(x)=x^2+ax+b$ pase por el punto (0, –5) y que en dicho punto la recta tangente sea paralela a la recta $y = –4x$

7. Hallar el punto de la función $f(x)=x^2-4x+3$ donde la tangente es paralela al eje X.

8. Hallar los puntos de tangencia horizontal de la función $f(x)=x^3-3x^2+5$

9. Dada la función $f(x)=x^2+x$, hallar el ángulo que forma su recta tangente con el eje X en el punto de abscisa $x = 0$.

10. Hallar los puntos de la función $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ donde la tangente tiene una inclinación de 45º.

11. Una curva de la forma $f(x)=ax^2+bx+c$ pasa por el punto P(1, 5) y es tangente en el punto de coordenadas (0, 1) a la recta $y = x+1$. Hallar la expresión analítica de f.

12. Hallar las ecuaciones de las rectas tangentes a la curva $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ que forman un ángulo de 45º con la horizontal.

13. Hallar la ecuación de la recta tangente a la curva $y=x^3$ en el punto de abscisa x = 0. Representar graficamente la función y dicha recta tangente. ¿Qué se observa?

14. Calcular el valor de **k** para que las rectas tangentes a la función $f(x)=kx^3-x^2+7x-18$ en x = 1 y x = 2, respectivamente, sean paralelas.

2. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.

15. Analizar la monotonía y los extremos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x)=x\cdot e^x$ b) $f(x)=x\cdot e^{-x}$ c) $f(x)=x^2\cdot e^x$

d) $f(x)=(x-3)\cdot e^x$ e) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ f) $f(x)=x^2\cdot \ln x$

g) $f(x)=x^3-3x^2+2$ h) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ i) $f(x)=\dfrac{x^2+x+1}{x^2+3x+3}$

16. Analizar la monotonía de $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x<0 \\ -1/x & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ y representarla graficamente.

17. Para cada una de las siguientes funciones, analizar su derivabilidad y determinar los intervalos de monotonía y sus extremos relativos:

a) $f(x)=x^2-|x|$ b) $f(x)=(x-2)\cdot|x|$

18. Averiguar el valor de **a** para que la función $f(x)=x^2-ax+2$ tenga un extremo local en el punto de abscisa x = 1.

19. Dada la función $f(x)=ax^2+bx$, calcular los valores de **a** y **b** para que la función tenga un extremo relativo en el punto (1, 4).

20. Dada la función $f(x)=x^2+px+q$, calcular los valores de **p** y **q** sabiendo que la función tiene un extremo local en x = –6 y su valor en él es –2.

21. Hallar los valores de **a** y **b** para que la función $f(x)=x^3+ax^2+b$ tenga un extremo relativo en el punto (–2, 3).

22. Dada la función $f(x)=ax^2+bx+5$, calcular los valores de **a** y **b** para que la función tenga un máximo relativo en el punto (2, 9).

23. Hallar los valores de **a**, **b**, **c** para que la gráfica de la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tenga tangente horizontal en x = – 2 y en x = 2, respectivamente y que pase por el punto (0, 3).

24. Dada la función $f(x) = x^3 + ax + b$, determinar los valores de **a** y **b** sabiendo que dicha función alcanza un máximo relativo en el punto (–1, 3).

25. La gráfica de una función derivada $f'(x)$ es una parábola de vértice (1, –4) que además corta al eje de abscisas en los puntos (–1, 0) y (3, 0).

a) Analizar la monotonía de la función f(x) y los valores de x donde la función f alcanza un máximo o un mínimo relativos.

b) Realizar un esbozo de la gráfica de la función f(x).

26. Analizar la monotonía y los extremos locales de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x - \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \le 4 \\ 2x - 8 & \text{si } x > 4 \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \le 1 \\ 3x^2 - 12x + 9 & \text{si } 1 < x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$ d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & \text{si } x \le 4 \\ x^2 - 9x + 21 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

3. Curvatura en un intervalo. Puntos de inflexión.

27. Analizar la curvatura de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - \dfrac{3}{2}x^2$ b) $f(x) = x^3$ c) $f(x) = x^2 \cdot \ln x$ d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$

28. De una función f se sabe que su función derivada es $f'(x) = 3x^2 - 9x + 6$

a) Analizar la monotonía y la curvatura de f(x).

b) Sabiendo que la gráfica de f pasa por el punto (0, 1), calcular la ecuación de la recta tangente en dicho punto.

29. Hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ b) $f(x) = x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x - 1$ c) $f(x) = \dfrac{x^4}{24} + \dfrac{x^3}{2}$

30. Dada la función $f(x) = 2x^3 + ax^2 - 12x + b$

a) Hallar los valores de **a** y **b** para que la función se anule en x = 1 y tenga un punto de inflexión en x = –1/2

b) Para a = –3 y b = 2, hallar sus extremos relativos.

31. Dada la función $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 1$

a) Hallar los valores de **a** y **b**, sabiendo que su gráfica pasa por el punto (2, 2) y que tiene un punto de inflexión de abscisa x = 0.

b) Para los valores de **a** y **b** obtenidos en el apartado anterior, calcular las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica en su punto de inflexión.

32. Dada la función $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x<1 \\ -x^2+4x-2 & \text{si} \quad x\geq 1 \end{cases}$

Analizar la monotonía, extremos locales, intervalos de concavidad/convexidad, puntos de inflexión y representarla graficamente.

33. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=(x-3)\cdot e^x$ en su punto de inflexión.

34. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x+1}{\sqrt{x}}$, determinar los intervalos de monotonía, los extremos relativos y los puntos de inflexión.

35. Dada la función $f(x)=2x^3+12x^2+ax+b$, determinar los valores de **a** y **b** para que la recta tangente a la gráfica en su punto de inflexión sea la recta y = 2x+3

36. Dada la función $f(x)=\ln(x^2+1)$

a) Determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos.

b) Hallar la recta tangente a su gráfica en el punto de inflexión de abscisa negativa.

4. Representación gráfica de funciones.

37. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, ramas parabólicas, monotonía y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión y representarla gráficamente:

a) $f(x)=-x\cdot(x-3)^2$

b) $f(x)=x^3+3x^2$

c) $f(x)=x^3-6x^2+9x$

d) $f(x)=x^3-2x^2+1$

e) $f(x)=x^3-3x^2-2$

f) $f(x)=-x^3+3x^2-4x-1$

g) $f(x)=2x^4-4x^2$

h) $f(x)=x^4-2x^3$

i) $f(x)=-x^4+2x^3$

j) $f(x)=-x^4+6x^2+2$

k) $f(x)=x^4+2x$

l) $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$

38. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, asíntotas, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía y extremos relativos y representarla gráficamente:

a) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$

c) $f(x)=\dfrac{x^4+3}{x}$

d) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

f) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-2x+1}$

g) $f(x)=\dfrac{3x}{x^2+1}$

h) $f(x)=\dfrac{1-4x}{x^2}$

i) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

j) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

k) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+x-2}$

l) $f(x)=\dfrac{x^2}{2(x-1)}$

m) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

n) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+3}$

ñ) $f(x)=\dfrac{x^2+3}{x^2-4}$

o) $f(x)=\dfrac{x^4-4x^2}{x^2-1}$

SOLUCIONES

1. a) $y=\frac{-3x}{2}+\frac{1}{2}$; b) $y=2x-1$; c) $y=x-\pi$; d) $y=3ex-2e$; e) $y=x+\frac{2-\pi}{4}$; f) $y=2\sqrt{e}x-\frac{3e}{2}$

2. En x = 2, donde la tangente es $y=-\frac{x}{4}+1$; en x = –2, donde la tangente es $y=-\frac{x}{4}-1$

3. En $x=\frac{1}{2}$, donde la tangente es $y=2x-1+\ln\left(\frac{1}{2}\right)$

4. En $x=-\frac{1}{2}$, donde la tangente es y = 4x+1; en $x=-\frac{3}{2}$, donde la tangente es y = 4x+9

5. Los puntos (1, 0) y $\left(-\frac{1}{3},-\frac{4}{27}\right)$, respectivamente.

6. Los valores son a = –4, b = –5

7. El punto (2, –1)

8. Los puntos (2, 1) y (0, 5), respectivamente.

9. Forma un ángulo de 45º

10. Los puntos (0, 0) y (–2, 2), respectivamente.

11. La expresión analítica es $f(x)=3x^2+x+1$

12. Las rectas son y = x, y = x+4 respectivamente.

13. La recta es y = 0. Dicha recta atraviesa la gráfica en x = 0.

14. El valor es k = 2/9

15. a) Mínimo local en (–1, –1/e), ↘ en (–∞, –1), ↗ en (–1, +∞);
b) Máximo local en (1, 1/e), ↗ en (–∞, 1), ↘ en (1, +∞);
c) Máximo local en (–2, $4/e^2$), mínimo local en (0, 0), ↗ en (–∞, –2), ↘ en (–2, 0), ↗ en (0, +∞);
d) Mínimo local en (2, $-e^2$), ↘ en (–∞, 2), ↗ en (2, +∞);
e) Mínimo local en (0, 0), máximo local en (2, $4/e^2$), ↘ en (–∞, 0), ↗ en (0, 2), ↘ en (2, +∞);
f) Mínimo local en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},\frac{-1}{2e}\right)$, ↘ en $\left(0,\frac{1}{\sqrt{e}}\right)$, ↗ en $\left(\frac{1}{\sqrt{e}},+\infty\right)$;
g) Máx. local en (0, 2), mín. local en (2, –2), ↗ en (–∞, 0), ↘ en (0, 2), ↗ en (2, +∞);
h) No tiene extremos locales, ↘ en $\mathbb{R}-\{0\}$;
i) Máximo local en (–2, 3), mínimo local en (0, 1/3), ↗ en (–∞, –2), ↘ en (–2, 0), ↗ en (0, +∞)

16. Monotonía: ↘ en (–∞, 0), ↗ en (0, +∞)

17. a) Continua en todo $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$; ↘ en (–∞, –1/2), ↗ en (–1/2, 0), ↘ en (0, 1/2), ↗ en (1/2, +∞); mínimo local en (–1/2, –1/4) y en (1/2, –1/4), máximo local en (0, 0);
b) Continua en todo $\mathbb{R}$, derivable en $\mathbb{R}-\{0\}$; ↘ en (0, 1), ↗ en (–∞, 0) y en (1, +∞); máximo local en (0, 0) y mínimo local en (1, –1)

18. El valor es a = 2

19. Los valores son $a = -4$, $b = 8$

20. Los valores son $p = 12$, $q = 34$

21. Los valores son $a = 3$, $b = -1$

22. Los valores son $a = -1$, $b = 4$

23. Los valores son $a = 0$, $b = -12$, $c = 3$

24. Los valores son $a = -3$, $b = 1$

25. $\nearrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(3, +\infty)$, $\searrow$ en $(-1, 3)$; máximo local en $x = -1$ y mínimo local en $x = 3$

26. a) $\searrow$ en $(2, 4)$, $\nearrow$ en $(-\infty, 2)$ y en $(4, +\infty)$; máximo local en $(2, 2)$ y mínimo local en $(4, 0)$; b) $\searrow$ en $(0, 2)$ y en $(4, +\infty)$, $\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, 4)$; máximo local en $(0, 1)$ y en $(4, 2)$, mínimo local en $(2, -3)$; c) $\searrow$ en todo $\mathbb{R}$; no tiene extremos locales; d) $\searrow$ en $(-\infty, 3)$ y en $(3, 9/2)$, $\nearrow$ en $(9/2, +\infty)$; mínimo local en $(9/2, 3/4)$, no tiene máximos locales.

27. a) Cóncava en $(-\infty, 1/2)$, convexa en $(1/2, +\infty)$; b) Cóncava en $(-\infty, 0)$, convexa en $(0, +\infty)$; c) Cóncava en $\left(0, \dfrac{1}{e\sqrt{e}}\right)$, convexa en $\left(\dfrac{1}{e\sqrt{e}}, +\infty\right)$;
d) Cóncava en $(-\infty, -1/2)$, convexa en $(-1/2, 0)$ y en $(0, +\infty)$

28. a) $\nearrow$ en $(-\infty, 1)$ y en $(2, +\infty)$, $\searrow$ en $(1, 2)$; cóncava en $(-\infty, 3/2)$, convexa en $(3/2, +\infty)$;
b) $y = 6x+1$

29. a) $(1, 0)$; b) $(-1, -2)$; c) $(0, 0)$ y $(-6, -54)$

30. a) $a = 3$, $b = 7$; b) Máximo local en el punto $(-1, 9)$ y mínimo local en el punto $(2, -18)$

31. a) $a = 0$, $b = -7/2$; b) $y = \dfrac{-7}{2}x + 1$; $y = \dfrac{2}{7}x + 1$

32. a) $\nearrow$ en $(0, 2)$, $\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$; mínimo local en $(0, 0)$, máximo local en $(2, 2)$; convexa en $(-\infty, 1)$, cóncava en $(1, +\infty)$; punto de inflexión en $(1, 1)$

33. $y = -ex - e$

34. Monotonía: $\searrow$ en $(0, 1/3)$, $\nearrow$ en $(1/3, +\infty)$; mínimo local en el punto $\left(\dfrac{1}{3}, 2\sqrt{3}\right)$; el punto $(1, 4)$ es punto de inflexión.

35. Los valores son $a = 26$, $b = 19$

36. a) Monotonía: $\searrow$ en $(-\infty, 0)$, $\nearrow$ en $(0, +\infty)$; mínimo local en el punto $(0, 0)$;
b) En $x = -1$, la recta $y = -x+\ln(2)-1$

37. En todos los apartados, el dominio es todo $\mathbb{R}$

	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Intervalos de curvatura	Puntos de inflexión	Ramas parabólicas
a)	↘ en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$ ↗ en $(1, 3)$	Máximo en (3, 0) Mínimo en (1, –4)	Convexa en $(-\infty, 2)$ Cóncava en $(2, +\infty)$	(2, –2)	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
b)	↗ en $(-\infty, -2)$ y en $(0, +\infty)$ ↘ en $(-2, 0)$	Máximo en (–2, 4) Mínimo en (0, 0)	Cóncava en $(-\infty, -1)$ Convexa en $(-1, +\infty)$	(–1, 2)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
c)	↗ en $(-\infty, 1)$ y en $(3, +\infty)$ ↘ en $(1, 3)$	Máximo en (1, 4) Mínimo en (3, 0)	Cóncava en $(-\infty, 2)$ Convexa en $(2, +\infty)$	(2, 2)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
d)	↗ en $(-\infty, 0)$ y en $(4/3, +\infty)$ ↘ en $(0, 4/3)$	Máximo en (0, 1) Mínimo en (4/3, –0.19)	Cóncava en $(-\infty, 2/3)$ Convexa en $(2/3, +\infty)$	(2/3, 0.41)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
e)	↗ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ ↘ en $(0, 2)$	Máximo en (0, –2) Mínimo en (2, –6)	Cóncava en $(-\infty, 1)$ Convexa en $(1, +\infty)$	(1, –4)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
f)	↘ en $(-\infty, +\infty)$	No tiene	Convexa en $(-\infty, 1)$ Cóncava en $(1, +\infty)$	(1, –3)	RP: $(-\infty, +\infty)$ RP: $(+\infty, -\infty)$
g)	↗ en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$ ↘ en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$	Máximo en (0, 0) Mínimo en (–1, –2) Mínimo en (1, –2)	Convexa en $(-\infty, -0.58)$ y en $(0.58, +\infty)$ Cóncava en $(-0.58, 0.58)$	(–0.58, –1.11) (0.58, –1.11)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
h)	↗ en $(3/2, +\infty)$ ↘ en $(-\infty, 3/2)$	Mínimo en (3/2, –27/16)	Convexa en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ Cóncava en $(0, 1)$	(0, 0) (1, –1)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
i)	↘ en $(3/2, +\infty)$ ↗ en $(-\infty, 3/2)$	Máximo en (3/2, 27/16)	Cóncava en $(-\infty, 0)$ y en $(1, +\infty)$ Convexa en $(0, 1)$	(0, 0) (1, 1)	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
j)	↘ en $(-\sqrt{3}, 0)$ y en $(\sqrt{3}, +\infty)$ ↗ en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(0, \sqrt{3})$	Mínimo en (0, 2) Máximo en $(-\sqrt{3}, 11)$ Máximo en $(\sqrt{3}, 11)$	Cóncava en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$ Convexa en $(-1, 1)$	(–1, 7) (1, 7)	RP: $(+\infty, -\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
k)	↗ en $(-0.79, +\infty)$ ↘ en $(-\infty, -0.79)$	Mínimo en (–0.79, –1.19)	Convexa en $(-\infty, +\infty)$	No tiene	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
l)	↗ en $(-2, -1/2)$ y en $(1, +\infty)$ ↘ en $(-\infty, -2)$ y en $(-1/2, 1)$	Máximo en (–1/2, 81/16) Mínimo en (–2, 0) Mínimo en (1, 0)	Convexa en $(-\infty, -1.37)$ y en $(0.37, +\infty)$ Cóncava en $(-1.37, 0.37)$	(–1.37, 9/4) (0.37, 9/4)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$

38.

	Dom(f)	Corte ejes	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Asíntotas
a)	$\mathbb{R}-\{-1, 2\}$	(0, 0)	↘ en (–∞, –4), en (0, 2) y en (2, +∞) ↗ en (–4, –1) y en (–1, 0)	Máximo en (0, 0) Mínimo en (–4, 16/9)	AV: x = –1 AV: x = 2 AH: y = 2
b)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	↗ en (–∞, –1) y en (1, +∞) ↘ en (–1, 1)	Máximo en (–1, 3) Mínimo en (1, 1/3)	AH: y = 1
c)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No tiene	↗ en (–∞, –1) y en (1, +∞) ↘ en (–1, 0) y en (0, 1)	Máximo en (–1, –4) Mínimo en (1, 4)	AV: x = 0
d)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No tiene	↗ en (–∞, –1) y en (1, +∞) ↘ en (–1, 0) y en (0, 1)	Máximo en (–1, –2) Mínimo en (1, 2)	AV: x = 0 AO: y = x
e)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	↗ en (–∞, –1.73) y en (1.73, +∞) ↘ en (–1.73, –1), en (–1, 0), en (0, 1) y en (1, 1.73)	Máximo en (–1.73, –2.6) Mínimo en (1.73, 2.6)	AV: x = 1 AV: x = –1 AO: y = x
f)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, 0)	↘ en (–∞, 0) y en (1, +∞) ↗ en (0, 1)	Mínimo en (0, 0)	AV: x = 1 AH: y = 1
g)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	↘ en (–∞, –1) y en (1, +∞) ↗ en (–1, 1)	Máximo en (1, 3/2) Mínimo en (–1, –3/2)	AH: y = 0
h)	$\mathbb{R}-\{0\}$	(1/4, 0)	↗ en (–∞, 0) y en (1/2, +∞) ↘ en (0, 1/2)	Mínimo en (1/2, –4)	AV: x = 0 AH: y = 0
i)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	↘ en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	No tiene	AV: x = –1 AV: x = 1 AH: y = 0
j)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	↗ en (–∞, 0) ↘ en (0, +∞)	Máximo en (0, 1)	AH: y = 0
k)	$\mathbb{R}-\{-2, 1\}$	(0, –1/2)	↗ en (–∞, –2) y en (–2, –1/2) ↘ en (–1/2, 1) y en (1, +∞)	Máximo en (–1/2, –4/9)	AV: x = –2 AV: x = 1 AH: y = 0
l)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, 0)	↗ en (–∞, 0) y en (2, +∞) ↘ en (0, 1) y en (1, 2)	Máximo en (0, 0) Mínimo en (2, 2)	AV: x = 1 AO: $y = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$
m)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, –2)	↗ en (–∞, 0) y en (2, +∞) ↘ en (0, 1) y en (1, 2)	Máximo en (0, –2) Mínimo en (2, 2)	AV: x = 1 AO: y = x–1
n)	$\mathbb{R}-\{-3\}$	(–1, 0) (0, 1/3)	↗ en (–∞, –5) y en (–1, +∞) ↘ en (–5, –3) y en (–3, –1)	Máximo en (–5, –8) Mínimo en (–1, 0)	AV: x = –3 AO: y = x–1
ñ)	$\mathbb{R}-\{-2, 2\}$	(0, –3/4)	↗ en (–∞, –2) y en (–2, 0) ↘ en (0, 2) y en (2, +∞)	Máximo en (0, –3/4)	AV: x = 2 AV: x = –2 AH: y = 1
o)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(–2, 0) (0, 0) (2, 0)	↘ en (–∞, –1) y en (–1, 0) ↗ en (0, 1) y en (1, +∞)	Mínimo en (0, 0)	AV: x = 1 AV: x = –1