UNIDAD 4. APLICACIONES DE LAS DERIVADAS.

IES LA BAHIA

1. Rectas tangente y normal a una gráfica en un punto.

La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = c$ es: $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$

Ejemplo: la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = 2$ es $y = 12x - 16$

$f(2) = 8$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad f'(2) = 12$ $\quad y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \Rightarrow y = 12x - 16$

La ecuación de la **recta normal** a la gráfica de $y = f(x)$ en $x = c$ es: $y - f(c) = \dfrac{-1}{f'(c)} \cdot (x - c)$

La recta normal a la gráfica en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente a la gráfica en dicho punto.

Ejemplo: la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^3$ en $x = 2$ es $y = \dfrac{-1}{12}x + \dfrac{49}{6}$

$f(2) = 8$ $\quad f'(x) = 3x^2$ $\quad \dfrac{-1}{f'(2)} = \dfrac{-1}{12}$ $\quad y - 8 = \dfrac{-1}{12} \cdot (x - 2) \Rightarrow y = \dfrac{-1}{12}x + \dfrac{49}{6}$

2. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.

Una función f es **creciente** en un intervalo I si $\forall$ a, b $\in$ I, siendo a < b, entonces f(a) < f(b)

Una función f es **decreciente** en un intervalo I si $\forall$ a, b $\in$ I, siendo a < b, entonces f(a) > f(b)

Una función f es **constante** en un intervalo I si $\forall$ a, b $\in$ I, siendo a < b, entonces f(a) = f(b)

Condición suficiente de monotonía: dada una función f derivable en un intervalo I,

– Si $f'(x) > 0 \ \ \forall x \in I$, entonces f es creciente en el intervalo I

– Si $f'(x) < 0 \ \ \forall x \in I$, entonces f es decreciente en el intervalo I

Ejemplo 1: para analizar la monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{5x^2}{2} + 6x - 1$, se estudia el signo de su función derivada $f'(x) = x^2 - 5x + 6$

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 2)$ y en $(3, +\infty)$ $\Rightarrow$ f es creciente en $(-\infty, 2)$ y en $(3, +\infty)$

$f'(x) < 0$ en $(2, 3)$ $\Rightarrow$ f es decreciente en $(2, 3)$

Ejemplo 2: para analizar la monotonía de la función $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x - 1}$, se estudia el signo de su función derivada $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$ $\Rightarrow$ f es decreciente en $(-\infty, 1)$ y en $(1, +\infty)$

El signo de la derivada es condición suficiente pero no necesaria

Si una función es creciente en un intervalo, su derivada no tiene por qué ser positiva en todos los puntos de dicho intervalo. Por ejemplo, $f(x) = x^3$ es creciente en cualquier intervalo que contenga a x = 0 y sin embargo, su derivada se anula en x = 0.

Es más, una función puede ser creciente en un intervalo y ni siquiera ser derivable en algún punto del mismo.

Extremos locales

Una función f tiene un **máximo local** en un punto (c, f(c)) si existe un entorno de c donde **f(c) > f(x)** $\forall\, x \neq c$ perteneciente a dicho entorno.

Una función f tiene un **mínimo local** en un punto (c, f(c)) si existe un entorno de c donde **f(c) < f(x)** $\forall\, x \neq c$ perteneciente a dicho entorno.

Condición necesaria de extremo local: si una función f es derivable en un valor c de su dominio y tiene un extremo local en el punto (c, f(c)), entonces $f'(c) = 0$

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Por ejemplo, la derivada de $f(x) = x^3$, que es la función $f'(x) = 3x^2$, se anula en x = 0 y sin embargo, f no tiene extremo local en x = 0.

Condición suficiente de extremo local: dada una función f dos veces derivable en un valor c de su dominio,

– Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en el punto (c, f(c))
– Si $f'(c) = 0$ y $f''(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en el punto (c, f(c))

Esta condición es suficiente pero no necesaria. Por ejemplo, $f(x) = x^4$ tiene un mínimo local en el punto (0, 0) y sin embargo, su derivada segunda se anula en x = 0.

Ejemplo 1: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x + 1$, dado que es derivable en todo su dominio, se hallan los valores donde se anula $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$

$$f'(x) = 3x^2 - 8x + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 1,\, x_2 = \frac{5}{3}$$

$f''(x) = 6x - 8 \quad \Rightarrow \quad f''(1) = -2 < 0 \quad \Rightarrow$ f tiene un máximo local en el punto (1, 3)

$f''(x) = 6x - 8 \quad \Rightarrow \quad f''\left(\frac{5}{3}\right) = 2 > 0 \quad \Rightarrow$ f tiene un mínimo local en el punto $\left(\frac{5}{3}, \frac{77}{27}\right)$

Ejemplo 2: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = \frac{4 - 2x}{x - 1}$, dado que es derivable en todo su dominio $\mathbb{R} - \{1\}$, se hallan los valores donde se anula $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Como $f'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2} \neq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R} - \{1\} \quad \Rightarrow$ f no tiene extremos locales

Puntos críticos de una función

Dada una función $y = f(x)$, se dice que $(c, f(c))$ es un **punto crítico** de f si ocurre alguna de estas dos situaciones:

1) f no es derivable en $x = c$ 2) f es derivable en $x = c$ pero $f'(c) = 0$

En consecuencia, para determinar los extremos locales de una función que no sea derivable en algún valor de su dominio, hay que analizar qué ocurre en sus puntos críticos.

Ejemplo 1: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = \begin{cases} 9 - x^2 & \text{si} \quad x \le 3 \\ -2x^2 + 16x - 30 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$

primero hay que hallar sus puntos críticos.

Si $x < 3 \Rightarrow f(x) = 9 - x^2 \Rightarrow f'(x) = -2x$

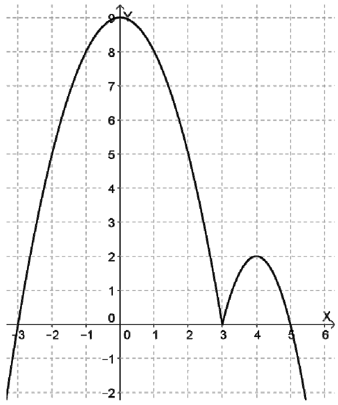
$f'(x) = -2x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow$ El punto (0, 9) es un punto crítico de f

$f''(x) = -2 \quad \Rightarrow \quad f''(0) = -2 \quad \Rightarrow$ f tiene un máximo local en el punto (0, 9)

Si $x > 3 \Rightarrow f(x) = -2x^2 + 16x - 30 \Rightarrow f'(x) = -4x + 16$

$f'(x) = -4x + 16 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 4 \quad \Rightarrow$ El punto (4, 2) es un punto crítico de f

$f''(x) = -4 \quad \Rightarrow \quad f''(4) = -4 \quad \Rightarrow$ f tiene un máximo local en el punto (4, 2)



En x = 3 la función es continua pero no es derivable ya que $f'_-(3) = -6 \ne f'_+(3) = 4$. Por lo tanto, (3, 0) es un punto crítico.

¿Hay un extremo local en el punto (3, 0)?

$f'(x) < 0$ en (0, 3) $\Rightarrow$ f es decreciente en (0, 3)

$f'(x) > 0$ en (3, 4) $\Rightarrow$ f es creciente en (3, 4)

f es continua en x = 3

Por lo tanto, f tiene un mínimo local en el punto (3, 0)

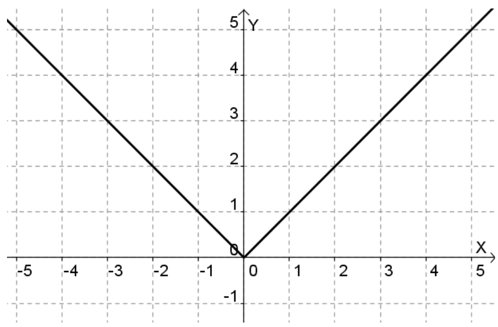
Ejemplo 2: para hallar los extremos locales de la función $f(x) = |x| = \begin{cases} -x & \text{si} \quad x < 0 \\ x & \text{si} \quad x \ge 0 \end{cases}$ primero

hay que hallar sus puntos críticos.

Si $x < 0 \Rightarrow f(x) = -x \Rightarrow f'(x) = -1 \ne 0$ Si $x > 0 \Rightarrow f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1 \ne 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En x = 0 la función es continua pero no es derivable ya que $f'_-(0) = -1 \ne f'_+(0) = 1$

Por lo tanto, el punto (0, 0) es un punto crítico.



¿Hay un extremo local en el punto (0, 0)?

$f'(x) < 0$ en $(-\infty, 0)$ $\Rightarrow$ f es decreciente en $(-\infty, 0)$

$f'(x) > 0$ en $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ f es creciente en $(0, +\infty)$

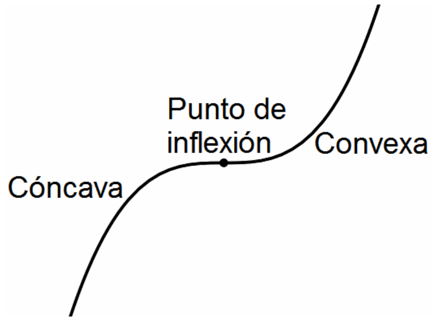
f es continua en x = 0

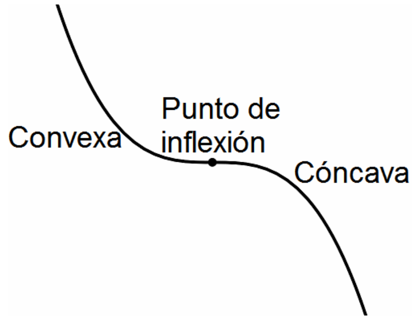
Por lo tanto, f tiene un mínimo local en el punto (0, 0)

3. Curvatura en un intervalo. Puntos de inflexión.

Una función es **cóncava** en un intervalo si su gráfica queda por **debajo** de la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función es **convexa** en un intervalo si su gráfica queda por **arriba** de la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos del intervalo.





Condición suficiente de curvatura: dada f dos veces derivable en un intervalo I,

– Si $f''(x) > 0 \quad \forall x \in I$, entonces f es convexa en el intervalo I

– Si $f''(x) < 0 \quad \forall x \in I$, entonces f es cóncava en el intervalo I

Ejemplo 1: para analizar la curvatura de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 2$, se estudia el signo de su función derivada segunda $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) > 0$ en $(1, +\infty) \Rightarrow f$ es convexa en $(1, +\infty)$

$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \Rightarrow f$ es cóncava en $(-\infty, 1)$

Ejemplo 2: para analizar la curvatura de la función $f(x) = x^4 - 6x^3 + 12x^2$, se estudia el signo de su función derivada segunda $f''(x) = 12x^2 - 36x + 24$

$f''(x) > 0$ en $(-\infty, 1)$ y en $(2, +\infty) \Rightarrow f$ es convexa en $(-\infty, 1)$ y en $(2, +\infty)$

$f''(x) < 0$ en $(1, 2) \Rightarrow f$ es cóncava en $(1, 2)$

Ejemplo 3: para analizar la curvatura de la función $f(x) = \dfrac{4 - 2x}{x - 1}$, se estudia el signo de su función derivada segunda $f''(x) = \dfrac{4}{(x-1)^3}$

$f''(x) > 0$ en $(1, +\infty) \Rightarrow f$ es convexa en $(1, +\infty)$

$f''(x) < 0$ en $(-\infty, 1) \Rightarrow f$ es cóncava en $(-\infty, 1)$

Ejemplo 4: para analizar la curvatura de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad x < 1 \\ -x^2 + 4x - 2 & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$, se estudia el signo de su función derivada segunda.

Si $x < 1 \Rightarrow f''(x) = 2 \Rightarrow f''(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \Rightarrow f$ es convexa en $(-\infty, 1)$

Si $x > 1 \Rightarrow f''(x) = -2 \Rightarrow f''(x) < 0$ en $(1, +\infty) \Rightarrow f$ es cóncava en $(1, +\infty)$

Puntos de inflexión

Una función f tiene un **punto de inflexión** en $(c, f(c))$ si pasa de convexa a cóncava o viceversa en dicho punto. En un punto de inflexión, la recta tangente en dicho punto atraviesa la curva, pasando de estar por debajo a estar por arriba de la gráfica (o viceversa).

Condición necesaria de punto de inflexión: si una función f es dos veces derivable en un valor c de su dominio y tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$, entonces $f''(c) = 0$

Esta condición es necesaria pero no suficiente. Por ejemplo, la derivada segunda de $f(x) = x^4$, que es $f''(x) = 12x^2$, se anula en $x = 0$ y sin embargo, f no tiene punto de inflexión en $x = 0$ (tiene un mínimo local).

Condición suficiente de punto de inflexión: dada una función f tres veces derivable en un valor c de su dominio,

Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$

<u>Ejemplo</u>: para hallar los puntos de inflexión de la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x + 3$, se averiguan los valores que anulan a su función derivada segunda $f''(x) = 6x - 6$

$f''(x) = 6x - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$

$f'''(x) = 6 \quad \Rightarrow \quad f'''(1) = 6 \neq 0 \quad \Rightarrow$ f tiene un punto de inflexión en el punto $(1, 7)$

Generalización de las conclusiones obtenidas al derivar sucesivamente una función

Sea f una función **n** veces derivable en un valor c de su dominio, tal que la derivada de orden **n** sea la primera que no se anula en $x = c$, es decir,

$$f'(c) = 0, \quad f''(c) = 0, \quad f'''(c) = 0, \quad ......, f^{n-1)}(c) = 0, \quad f^{n)}(c) \neq 0$$

– Si n es impar, entonces f tiene un punto de inflexión en el punto $(c, f(c))$

– Si n es par y $f^{n)}(c) > 0$, entonces f tiene un mínimo local en el punto $(c, f(c))$

– Si n es par y $f^{n)}(c) < 0$, entonces f tiene un máximo local en el punto $(c, f(c))$

<u>4. Representación gráfica de funciones.</u>

Para la representación gráfica de una función, hay que **saber determinar algebraicamente** cualquiera de los **aspectos esenciales** que siguen a continuación:

– Dominio de la función.

– Puntos de corte con los ejes.

– Intervalos de monotonía/extremos locales.

– Intervalos de curvatura/puntos de inflexión.

– Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.

– Ramas parabólicas.

Aspectos complementarios

Recorrido de la función, simetría en la gráfica, periodicidad, etc.