**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

**MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.**

**UNIDAD 9. NÚMEROS COMPLEJOS.**

# ACTIVIDADES

## 1. Unidad imaginaria. Número complejo.

1. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones: a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $2x^2 + 32 = 0$

2. Expresar en forma binómica el resultado de las siguientes operaciones:

a) $\sqrt{3} - \sqrt{-49}$ b) $\sqrt{9} + \sqrt{-9}$ c) $7 + \sqrt{-\frac{9}{25}}$ d) $3 + \sqrt{-\pi}$ e) $\sqrt{-16} + \sqrt{\frac{25}{4}}$

3. Hallar el valor de $k$ para que los siguientes números complejos sean imaginarios puros:

a) $-3i + k$ b) $\sqrt{2}k - 1 + 6i$ c) $4k + \frac{5}{8} - i$

4. Hallar el valor de $k$ para que los siguientes números complejos sean números reales:

a) $(k+1)i - 6$ b) $\frac{k}{10} + \frac{3k}{4}i$ c) $10 - ki - 2i$

## 2. Operaciones en forma binómica.

5. Calcular el número $z = i^{327} - \frac{1}{i} + \frac{i^{125}}{1-i}$, expresando el resultado en forma binómica.

6. Calcular los siguientes números complejos, expresando el resultado en forma binómica:

a) $z = \frac{(1-i)^2 \cdot i}{2+i}$ b) $z = 5 + 3i - \frac{5+i}{3-2i}$ c) $z = \frac{5}{1-2i} + \frac{(3+i)\cdot(1-3i)}{4}$

7. En cada uno de los siguientes casos, calcular el valor de $m$ y $n$ para que:

a) $(2+5i)\cdot(m+3i) = n + 4i$ b) $\frac{3m-9i}{3m+ni} = 5 + 4i$

8. Averiguar dos números complejos $z$ y $\omega$ sabiendo que:

a) $z + \omega = 4 + 2i$ b) La parte real de z es 3 c) $\frac{z}{\omega}$ es imaginario puro

9. Calcular el valor de $x$ para que $\left(\frac{x+i}{2+i}\right) : \left(\frac{2+3i}{1+i}\right) = \frac{4+6i}{1+8i}$

10. Demostrar que si el número $z = \frac{a+bi}{c+di}$ es imaginario puro, entonces $\frac{a}{d} + \frac{b}{c} = 0$

## 3. Representación gráfica.

11. En cada uno de los siguientes casos, representar el afijo del número complejo z, el de su opuesto $-z$ y el de su conjugado $\overline{z}$:

a) $z = 4 + 3i$  b) $z = 3 - 5i$  c) $z = 4i$  d) $z = 4$

12. Dados los siguientes números complejos, representar sus afijos e interpretar el resultado:

a) $z_1 = 1 + i$  b) $z_2 = i \cdot z_1$  c) $z_3 = i \cdot z_2$  d) $z_4 = i \cdot z_3$

## 4. Forma polar y forma trigonométrica.

13. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$  b) $z = \sqrt{3} + i$  c) $z = 1 - \sqrt{3}i$  d) $z = 1 + i$

e) $z = -1 - i$  f) $z = 4i$  g) $z = -2i$  h) $z = 3$

14. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

a) $z = (4, 135^\circ)$  b) $z = (2, 180^\circ)$  c) $z = (2, 225^\circ)$  d) $z = (4, 30^\circ)$

e) $z = (3, 30^\circ)$  f) $z = (4, 60^\circ)$  g) $z = (2, 45^\circ)$  h) $z = (1, 270^\circ)$

15. Dado el número complejo $z = 3 + 4i$, calcular:  a) $\omega = |z| \cdot z + \frac{z}{|z|}$  b) $\omega = \frac{z + \overline{z}}{|\overline{z}|}$

16. Dado el número complejo $z = (5, 30^\circ)$, expresar los números $z$ y $-\overline{z}$ en forma binómica.

17. Dado el número complejo $z = \frac{-x + i}{2 - i}$, calcular el valor de $x$ para que $|z| = 2$

## 5. Operaciones en forma polar.

18. Realizar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

a) $(4, 120^\circ) \cdot (2, 60^\circ)$  b) $(4, 45^\circ) \cdot (1, 15^\circ)$  c) $(1, 30^\circ) \cdot (3, 60^\circ)$

19. Dados los números complejos $z = 1 - i$, $\omega = 6i$, realizar las siguientes operaciones en forma polar: a) $z \cdot \omega$  b) $\frac{z}{\omega}$

20. Expresar en forma polar el número complejo resultado de la operación:

$z = (1, 0^\circ) + (2, 90^\circ) + (3, 180^\circ) + (4, 270^\circ)$

21. Dados los números complejos $z = (3, 30^\circ)$, $\omega = (4, 60^\circ)$, realizar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:  a) $z + \omega$  b) $z \cdot \omega$  c) $\frac{z}{\omega}$

22. Sin calcular el cociente, averiguar el valor de x para que el módulo del cociente $\dfrac{1+3i}{1+xi}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

23. Hallar los valores de los ángulos $\alpha$ y $\beta$ pertenecientes al primer cuadrante, sabiendo que son complementarios y que $\dfrac{(10,\alpha)}{(4,\beta)}=\left(\dfrac{5}{2},20^{o}\right)$

24. En cada uno de los siguientes casos, calcular las siguientes potencias, dando el resultado en forma binómica. Sugerencia: utilizar la forma polar.

a) $(2-2\sqrt{3}i)^5$ b) $(1+i)^6$ c) $\dfrac{(5i)^3}{(1-i)^4}-\left(\dfrac{1}{i}\right)^{-2}$ d) $\dfrac{(\sqrt{3}-\sqrt{3}i)^{-3}}{2i}$

25. Hallar el valor de x para que el módulo de $(x+i)^6$ sea igual a 1 000.

**6. Raíces de un número complejo.**

26. Calcular las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) $z=2-2i$ b) $z=-8+0i$ c) $z=4\sqrt{3}+4i$ d) $z=\dfrac{32}{-i}$ e) $z=\dfrac{1+i}{2-i}$

27. Calcular las raíces cuartas de $z=-4+0i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

28. Calcular las raíces quintas de $z=-7i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

29. Calcular las raíces sextas de $z=-1+0i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

30. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones, dando las soluciones en forma polar:

a) $z^3-8=0$ b) $z^3+7=0$ c) $z^5+32=0$ d) $z^4+1=0$

## SOLUCIONES

1. a) $x_1 = 2+3i$ , $x_2 = 2-3i$ ; b) $x_1 = 4i$ , $x_2 = -4i$

2. a) $\sqrt{3}-7i$ ; b) $3+3i$ ; c) $7+\frac{3}{5}i$ ; d) $3+\sqrt{\pi}i$ ; e) $\frac{5}{2}+4i$

3. a) k = 0; b) $k=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; c) $k=-\frac{5}{32}$

4. a) k = –1; b) k = 0; c) k = –2

5. $z=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$

6. a) $z=\frac{4}{5}-\frac{2}{5}i$ ; b) $z=4+2i$ ; c) $z=\frac{5}{2}$

7. a) $m=-\frac{2}{5}$ , $n=-\frac{79}{5}$ ; b) $m=-\frac{1}{3}$ , $n=-1$

8. Dos soluciones: $\{z=3-i, \omega=1+3i\}$ , $\{z=3+3i, \omega=1-i\}$

9. El valor es x = 5

10.

11.

12. a) $z_1 = 1+i$ ; b) $z_2 = -1+i$ ; c) $z_3 = -1-i$ ; d) $z_4 = 1-i$

13. a) $z=(1, 315^\circ)$ ; b) $z=(2, 30^\circ)$ ; c) $z=(2, 300^\circ)$ ; d) $z=(\sqrt{2}, 45^\circ)$ ; e) $z=(\sqrt{2}, 225^\circ)$ ;
f) $z=(4, 90^\circ)$ ; g) $z=(2, 270^\circ)$ ; h) $z=(3, 0^\circ)$

14. a) $z=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}i$ ; b) $z=-2$ ; c) $z=-\sqrt{2}-\sqrt{2}i$ ; d) $z=2\sqrt{3}+2i$ ; e) $z=\frac{3\sqrt{3}}{2}+\frac{3}{2}i$ ;
f) $z=2+2\sqrt{3}i$ ; g) $z=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$ ; h) $z=-i$

15. a) $\omega=\frac{78}{5}+\frac{104}{5}i$ ; b) $\omega=\frac{6}{5}$

16. $z=\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$ ; b) $-\overline{z}=-\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{5}{2}i$

17. Los valores de x son $x_1=\sqrt{19}$ , $x_2=-\sqrt{19}$

18. a) –8+0i; b) $z=2+2\sqrt{3}i$ ; c) $z=0+3i$

19. a) $z\cdot\omega=(6\sqrt{2}, 45^\circ)$ ; b) $\frac{z}{\omega}=\left(\frac{\sqrt{2}}{6}, 225^\circ\right)$

20. $z=(2\sqrt{2}, 225^\circ)$

21. a) $z+\omega=\frac{4+3\sqrt{3}}{2}+\frac{3+4\sqrt{3}}{2}i$ ; b) $z\cdot\omega=0+12i$ ; c) $\frac{z}{\omega}=\frac{3\sqrt{3}}{8}-\frac{3}{8}i$

22. Los valores de x son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

23. $\alpha = 55^o$, $\beta = 35^o$

24. a) $512 + 512\sqrt{3}i$; b) $-8i$; c) $1 + \frac{125}{4}i$; d) $\frac{\sqrt{3}}{72} + \frac{\sqrt{3}}{72}i$

25. Los valores de x son $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

26. a) $(\sqrt[6]{8}, 105^o)$ $(\sqrt[6]{8}, 225^o)$ $(\sqrt[6]{8}, 345^o)$; b) $(2, 60^o)$ $(2, 180^o)$ $(2, 300^o)$; c) $(2, 10^o)$ $(2, 130^o)$ $(2, 250^o)$; d) $(2\sqrt[3]{4}, 30^o)$ $(2\sqrt[3]{4}, 150^o)$ $(2\sqrt[3]{4}, 270^o)$; e) $(\sqrt[6]{250}, 25^o)$ $(\sqrt[6]{250}, 145^o)$ $(\sqrt[6]{250}, 265^o)$

27. $(\sqrt{2}, 45^o)$ $(\sqrt{2}, 135^o)$ $(\sqrt{2}, 225^o)$ $(\sqrt{2}, 315^o)$

28. $(\sqrt[5]{7}, 54^o)$ $(\sqrt[5]{7}, 126^o)$ $(\sqrt[5]{7}, 198^o)$ $(\sqrt[5]{7}, 270^o)$ $(\sqrt[5]{7}, 342^o)$

29. $(1, 30^o)$ $(1, 90^o)$ $(1, 150^o)$ $(1, 210^o)$ $(1, 270^o)$ $(1, 330^o)$

30. a) $z_1 = (2, 0^o)$, $z_2 = (2, 120^o)$, $z_3 = (2, 240^o)$; b) $z_1 = (\sqrt[3]{7}, 60^o)$, $z_2 = (\sqrt[3]{7}, 180^o)$, $z_3 = (\sqrt[3]{7}, 300^o)$; c) $z_1 = (2, 36^o)$, $z_2 = (2, 108^o)$, $z_3 = (2, 180^o)$, $z_4 = (2, 252^o)$, $z_5 = (2, 324^o)$; d) $z_1 = (1, 45^o)$, $z_2 = (1, 135^o)$, $z_3 = (1, 225^o)$, $z_4 = (1, 315^o)$