DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 9. NÚMEROS COMPLEJOS.

1. Unidad imaginaria. Número complejo.

Al intentar resolver la ecuación de segundo grado $x^2+1=0$ se obtiene $x^2=-1$. Como no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo, se dice que la ecuación $x^2+1=0$ no tiene soluciones reales o que no tiene solución en $\mathbb{R}$.

Los números complejos aparecen por la necesidad de dar solución a ecuaciones que, como la anterior, no tienen solución dentro del conjunto de los números reales.

Se denomina **unidad imaginaria** a la expresión $\sqrt{-1}$ y se representa por i.

$$i=\sqrt{-1} \qquad i^2=-1$$

Se llama **número complejo** a una expresión de la forma $a+bi$, donde a, b $\in \mathbb{R}$, $i=\sqrt{-1}$
Los números complejos se suelen representar con las letras z, ω, ... Como se verá más adelante, un número complejo puede expresarse de tres formas distintas.

La forma $a+bi$ se llama **forma binómica** del número complejo. En ella, al primer número se le llama **parte real** y al segundo número se le llama **parte imaginaria**.

$$z=a+bi \qquad a = \text{parte real} \qquad b = \text{parte imaginaria} \qquad i = \text{unidad imaginaria}$$

<u>Ejemplo</u>: en la ecuación $x^2-x+1=0$, los coeficientes son a = 1, b = –1, c = 1.

$$x=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{-3}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}}{2}=\frac{1\pm\sqrt{3}\cdot i}{2}=\left\langle\begin{array}{l} x_1=\dfrac{1+\sqrt{3}\cdot i}{2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \\[2ex] x_2=\dfrac{1-\sqrt{3}\cdot i}{2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot i \end{array}\right.$$

Así pues, se dice que esta ecuación tiene dos soluciones, que son los números complejos

$$\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

El **conjunto de los números complejos** se representa por $\mathbb{C}$. $\mathbb{C}=\{\, a+bi \,/\, a, b \in \mathbb{R},\ i=\sqrt{-1}\,\}$

De esta forma, todo número real es un número complejo con parte imaginaria nula. Es decir, si b = 0, entonces el número "solo tiene parte real". De ahí que el conjunto de los números reales esté incluido en el conjunto de los números complejos, es decir, $\mathbb{R}$ **es un subconjunto de** $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$$

Se llama número complejo **imaginario puro** a todo aquel cuya parte real es cero, es decir, los números de la forma 0 + bi.

Dos **números complejos** son **iguales** si y solo si son iguales sus partes reales y sus partes imaginarias, respectivamente: $a + bi = c + di \iff a = c \wedge b = d$

Se llama **opuesto** del número complejo $z = a + bi$ al número $-z = a - bi$

Se llama **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ al número $\overline{z} = a - bi$

2. Operaciones en forma binómica.

Dados los números complejos $z = a + bi$, $\omega = c + di$, se definen las siguientes operaciones:

a) Suma: $z + \omega = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

b) Diferencia: $z - \omega = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

c) Producto: $z \cdot \omega = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

d) Cociente: $\dfrac{z}{\omega} = \dfrac{z \cdot \overline{\omega}}{\omega \cdot \overline{\omega}} = \dfrac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \dfrac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \dfrac{bc - ad}{c^2 + d^2} i$

Ejemplo: $z = 2 - 5i \quad \omega = 1 + 3i$

a) $z + \omega = (2 - 5i) + (1 + 3i) = 3 - 2i$

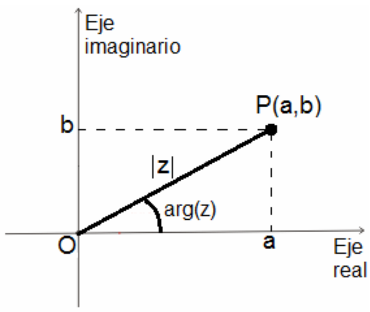
b) $z - \omega = (2 - 5i) - (1 + 3i) = 1 - 8i$

c) $z \cdot \omega = (2 - 5i) \cdot (1 + 3i) = (2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot i^2) + (-5 \cdot 1 + 2 \cdot 3)i = (2 + 15) + (-5 + 6)i = 17 + i$

d) $\dfrac{z}{\omega} = \dfrac{z \cdot \overline{\omega}}{\omega \cdot \overline{\omega}} = \dfrac{(2 - 5i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \dfrac{(2 - 15) + (-5 - 6)i}{1^2 - (3i)^2} = \dfrac{-13 - 11i}{1 - (-9)} = -\dfrac{13}{10} - \dfrac{11}{10} i$

3. Representación gráfica.

Dado un sistema de coordenadas cartesiano en el plano, la representación gráfica de un número complejo $z = a + bi$ consiste en identificarlo con el punto de coordenadas (a, b).



Al punto P(a, b) asociado al número complejo $z = a + bi$ se le llama **afijo** de z.

A los ejes de coordenadas se les llama **eje real** (horizontal) y **eje imaginario** (vertical), respectivamente.

Se llama **módulo** de z al módulo del vector $\overrightarrow{OP}$. Se representa por $|z|$.

Se llama **argumento** de z al ángulo que forma el semieje real positivo con el vector $\overrightarrow{OP}$. Se representa por **arg(z)**.
Un número complejo admite infinitos argumentos ya que si arg(z) es argumento de un número, también lo son todos los ángulos de la forma **arg(z) + 360k**, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}$.

De ahí que al argumento comprendido entre 0º y 360º se le llame **argumento principal**.

4. Forma polar y forma trigonométrica.

Dado un número complejo $z = a + bi$, se llama **forma polar** de z a la expresión $(|z|, \alpha)$ donde:

$|z|$ es el módulo de z $\qquad \alpha$ es un argumento de z

a) Para pasar de la forma binómica a la forma polar, se calculan las coordenadas polares:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \qquad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Nota: si llamamos β al resultado que ofrece la calculadora científica para $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$, se pueden dar dos situaciones:

1) Si $\frac{b}{a}$ es positivo (β positivo), entonces hay que tomar como valor para α:
$\alpha_1 = \beta$, si el afijo de z está en el IC / $\alpha_2 = 180^{\circ} + \beta$, si el afijo de z está en el IIIC

2) Si $\frac{b}{a}$ es negativo (β negativo), entonces hay que tomar como valor para α:
$\alpha_1 = 180^{\circ} + \beta$, si el afijo de z está en el IIC / $\alpha_2 = 360^{\circ} + \beta$, si el afijo de z está en el IVC

Ejemplo: el número $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ en forma polar se expresa como $z = (4, 120^{\circ})$ ya que:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 120^{\circ}$$ porque el afijo de z está en el IIC [180º–60º]

b) Para pasar de la forma polar a la forma binómica, se calculan las partes real e imaginaria:

$$a = r \cdot \cos\alpha \qquad b = r \cdot \operatorname{sen}\alpha$$

Ejemplo: el número $z = (5, 225^{\circ})$ en forma binómica es $z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ ya que:

$$a = 5 \cdot \cos 225^{\circ} = 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad b = 5 \cdot \operatorname{sen} 225^{\circ} = 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Dado un número complejo $z = (|z|, \alpha)$, se llama **forma trigonométrica** de z a la expresión

$$z = |z| \cdot (\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)$$

Ejemplo: la forma trigonométrica del número $z = (5, 225^{\circ})$ es $z = 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

5. Operaciones en forma polar.

Dados los números complejos $z = (|z|, \alpha)$ $\omega = (|\omega|, \beta)$, se definen las siguientes operaciones:

a) Producto: $z \cdot \omega = (|z| \cdot |\omega|, \alpha + \beta)$ Ejemplo: $(2, 30^\circ) \cdot (4, 120^\circ) = (8, 150^\circ)$

b) Cociente: $\dfrac{z}{\omega} = \left(\left(\dfrac{|z|}{|\omega|} \right), \alpha - \beta \right)$ Ejemplo: $(6, 225^\circ) \cdot (2, 90^\circ) = (3, 135^\circ)$

c) Potencia: $z^n = (|z|^n, n \cdot \alpha)$ Ejemplo: $(2, 30^\circ)^8 = (256, 240^\circ)$

Fórmula de De Moivre: $(\cos\alpha + i \cdot \operatorname{sen}\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n\alpha)$

6. Raíces de un número complejo.

Dado un número complejo $z = (|z|, \alpha)$, éste tiene n raíces enésimas ($n \geq 2$), cada una de la cuales tiene módulo $\sqrt[n]{|z|}$ y argumentos:

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{n},\ \beta_2 = \frac{\alpha + 360^\circ}{n},\ \beta_3 = \frac{\alpha + 720^\circ}{n},\ \ldots,\ \beta_n = \frac{\alpha + (n-1) \cdot 360^\circ}{n}$$

Interpretación geométrica

Los afijos de las **n** raíces enésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de **n** lados centrado en el origen de coordenadas.

Ejemplo: para hallar las raíces cuartas del número $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i$, se hace lo siguiente:

Todas tienen módulo $\sqrt[4]{\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{\sqrt{1}} = \sqrt[8]{1} = 1$

Como $\arg(z) = \alpha = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}} \right) = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{1} \right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = 240^\circ$, los argumentos de las raíces cuartas son: $\beta_1 = \frac{240^\circ}{4} = 60^\circ$ $\beta_2 = \frac{600^\circ}{4} = 150^\circ$ $\beta_3 = \frac{960^\circ}{4} = 240^\circ$ $\beta_4 = \frac{1320^\circ}{4} = 330^\circ$

Por lo tanto, las cuatro raíces cuartas de z son los números: $(1, 60^\circ)$ $(1, 150^\circ)$ $(1, 240^\circ)$ $(1, 330^\circ)$

Los afijos de estos cuatro números son los vértices de un cuadrado con centro en el origen.