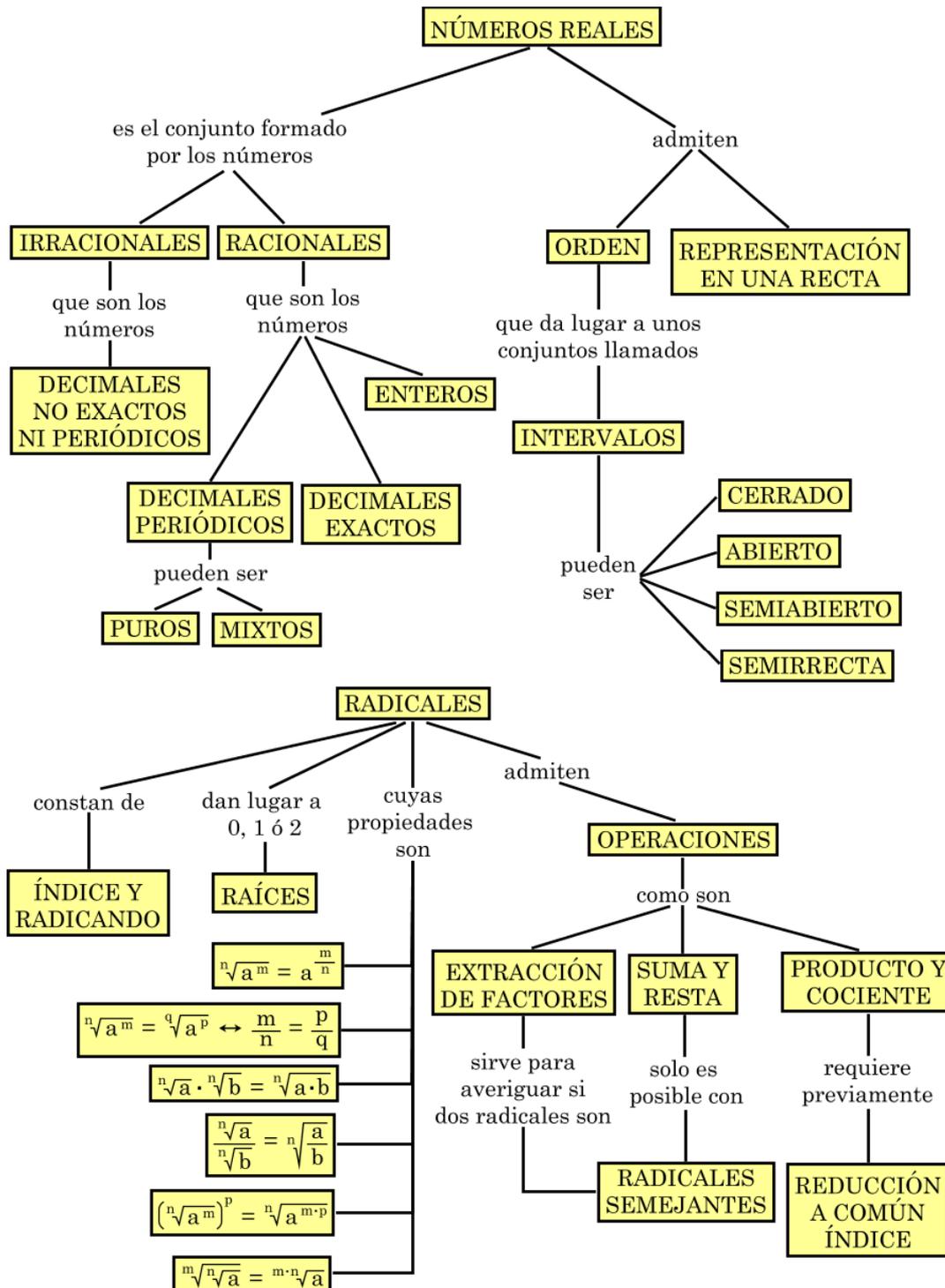




MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Números irracionales. Números reales.

Un **número irracional** es aquel que tiene infinitas cifras decimales no periódicas. No puede expresarse en forma de fracción. El conjunto de los números irracionales se representa por \mathbb{I} .

Ejemplos: $\pi = 3,14159265\dots$ $\sqrt{2} = 1,41421356\dots$ $\sqrt[3]{7} = 1,9129311827\dots$

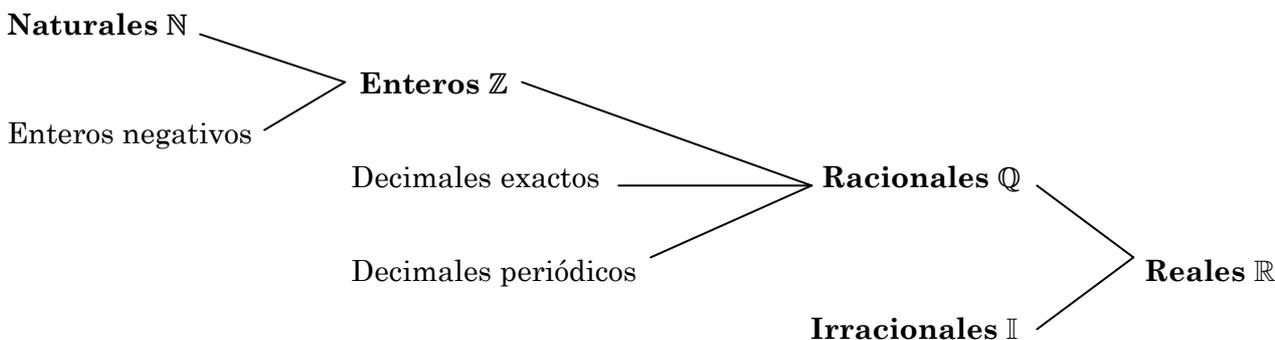
Nota: números como $\sqrt{16}$ ó $\sqrt{\frac{4}{9}}$ **no son irracionales** ya que $\sqrt{16} = 4$ y $\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3}$

Al conjunto que resulta de unir el conjunto de los números racionales con el de los números irracionales se le llama conjunto de los **números reales** y se representa por \mathbb{R} .

$$\mathbb{Q} \cup \mathbb{I} = \mathbb{R}$$

Relación de inclusión entre los conjuntos de números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$



Ejemplo: indicar cuáles de los siguientes números pertenecen a \mathbb{N} , cuáles a \mathbb{Z} , cuáles a \mathbb{Q} y cuáles a \mathbb{I} : 7 -4 2,31 -3,555... 5,2888... $\sqrt{2}$

En \mathbb{N} está 7 En \mathbb{Z} están 7 y -4 En \mathbb{Q} están 7 -4 2,31 -3,555... 5,2888... En \mathbb{I} está $\sqrt{2}$

2. Intervalos y semirrectas.

Orden en \mathbb{R} : las relaciones de orden entre $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}$, se expresan de las siguientes formas:

(1) $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ se lee "**a** es menor que **b**" (2) $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ se lee "**a** es menor o igual que **b**"

(3) $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ se lee "**a** es mayor que **b**" (4) $\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ se lee "**a** es mayor o igual que **b**"

Intervalo cerrado de extremos a y b: es el conjunto de números reales mayores o iguales que **a** y menores o iguales que **b**. Se representa por $[a, b]$. $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$

Ejemplo: $[-3, 2] = \{x \in \mathbb{R} / -3 \leq x \leq 2\}$

Intervalo abierto de extremos a y b: es el conjunto de números reales mayores que **a** y menores que **b**. Se representa por (a, b) . $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$

Ejemplo: $(1, 5) = \{x \in \mathbb{R} / 1 < x < 5\}$

Intervalo semiabierto de extremos a y b: puede ser el conjunto de números reales mayores o iguales que **a** y menores que **b** que se representa por $[a, b)$; o puede ser el conjunto de números reales mayores que **a** y menores o iguales que **b**, que se representa por $(a, b]$.

$$[a, b) = \{ x \in \mathbb{R} / a \leq x < b \} \qquad (a, b] = \{ x \in \mathbb{R} / a < x \leq b \}$$

Ejemplos: $[-2, 5) = \{ x \in \mathbb{R} / -2 \leq x < 5 \}$ $(-5, -1] = \{ x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq -1 \}$

Una **semirrecta de números reales** es alguno de los siguientes tipos de conjuntos:

– El conjunto de números reales mayores o iguales que **a**, que se expresa $[a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq a \}$

Ejemplo: $[-1, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x \geq -1 \}$

– El conjunto de números reales mayores que **a**, que se expresa $(a, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x > a \}$

Ejemplo: $(2, +\infty) = \{ x \in \mathbb{R} / x > 2 \}$

– El conjunto de números reales menores o iguales que **b**, que se expresa $(-\infty, b] = \{ x \in \mathbb{R} / x \leq b \}$

Ejemplo: $(-\infty, -1] = \{ x \in \mathbb{R} / x \leq -1 \}$

– El conjunto de números reales menores que **b**, que se expresa $(-\infty, b) = \{ x \in \mathbb{R} / x < b \}$

Ejemplo: $(-\infty, 4) = \{ x \in \mathbb{R} / x < 4 \}$

3. Radical. Raíz enésima de un número.

Dados $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$, $a \in \mathbb{R}$, un **radical de índice n** y **radicando a** es una expresión del tipo $\sqrt[n]{a}$

Raíz enésima de a es un número $r \in \mathbb{R}$ tal que $r^n = a$, es decir $\sqrt[n]{a} = r \Leftrightarrow r^n = a$

De la definición se deduce que un número puede tener 0, 1 ó 2 raíces enésimas, dependiendo de **su signo** y de la **paridad del índice n**.

	Si n es par	Si n es impar
Si a es positivo	El número a tiene dos raíces enésimas opuestas	El número a tiene una raíz enésima
Si a es negativo	El número a no tiene raíces enésimas	El número a tiene una raíz enésima

Ejemplo 1: 16 tiene dos raíces cuartas, los números 2 y -2 porque $2^4 = 16$ y $(-2)^4 = 16$
 $x^4 = 16 \Rightarrow x = \pm \sqrt[4]{16} = \pm 2$

Ejemplo 2: -16 no tiene raíces cuartas porque ningún número elevado a 4 es igual a -16
 $x^4 = -16 \Rightarrow \nexists \sqrt[4]{-16}$

Ejemplo 3: 32 tiene una raíz quinta, el número 2 porque $2^5 = 32$
 $x^5 = 32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$

Ejemplo 4: -32 tiene una raíz quinta, el número -2 porque $(-2)^5 = -32$
 $x^5 = -32 \Rightarrow x = \sqrt[5]{-32} = -2$

Nota: **una raíz enésima es un número real:** no tiene por qué ser un número entero. Por ejemplo, $\sqrt[5]{12}$ no se puede hallar con la definición. Con ayuda de una calculadora, se obtiene $\sqrt[5]{12} = 1,6437\dots$ en este caso, un número irracional.

4. Propiedades de los radicales.

P1. Un radical de índice **n** y radicando a^m es igual a una potencia de base **a** y exponente $\frac{m}{n}$

$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Ejemplo 1: $\sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^{\frac{10}{5}} = 2^2 = 4$ Ejemplo 2: $\left(\frac{25}{9}\right)^{-\frac{1}{2}} = \left(\frac{9}{25}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$

Obsérvese que si $m = 1$, entonces $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ Ejemplos: $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$ $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

P2. Dos **radicales** son **equivalentes** si lo son sus fracciones asociadas.

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[q]{a^p} \Leftrightarrow \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$$

En consecuencia, **simplificar un radical** equivale a simplificar su fracción asociada.

Ejemplos: $\sqrt[8]{5^4} = \sqrt{5}$ porque $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$ $\sqrt[12]{3^4} = \sqrt[3]{3}$ porque $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$ $\sqrt[6]{7^2} = \sqrt[3]{7}$ porque $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

P3. $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{10}$ $\sqrt[12]{x^5} \cdot \sqrt[12]{x} = \sqrt[12]{x^6} = \sqrt{x}$

P4. $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ Ejemplos: $\frac{\sqrt[5]{6}}{\sqrt[5]{2}} = \sqrt[5]{\frac{6}{2}} = \sqrt[5]{3}$ $\frac{\sqrt[15]{x^7}}{\sqrt[15]{x^2}} = \sqrt[15]{x^5} = \sqrt[3]{x}$

P5. $(\sqrt[n]{a^m})^p = \sqrt[n]{a^{m \cdot p}}$ Ejemplos: $(\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = 2^2 = 4$ $(\sqrt[3]{x^2})^6 = \sqrt[3]{x^{12}} = x^4$

P6. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ Ejemplos: $\sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$ $\sqrt[3]{\sqrt[7]{x^6}} = \sqrt[21]{x^6} = \sqrt[7]{x^2}$

5. Extracción de factores fuera del radical.

Para extraer factores fuera del radical, se procede como sigue:

Paso 1. Se descompone el radicando en factores primos y se escribe el radical como producto de tantos radicales como factores primos haya.

Paso 2. Cada uno de los radicales $\sqrt[n]{a^m}$ anteriores en los que sea $m \geq n$, se descompone así:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[n]{a^{c \cdot n + r}} = \sqrt[n]{a^{c \cdot n} \cdot a^r} = a^c \cdot \sqrt[n]{a^r}, \text{ siendo } c \text{ el cociente y } r \text{ el resto de la división } m : n$$

Obsérvese que si $r = 0$, entonces $\sqrt[n]{a^m} = a^c$

Paso 3. Finalmente, se multiplican todos los factores extraídos por un lado y todos los radicales sobrantes por otro, y se escribe el producto indicado de los resultados.

Ejemplos: extraer factores fuera de los siguientes radicales:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \sqrt[5]{x^{32}y^{23}z^{40}} &= \sqrt[5]{x^{30}x^2y^{20}y^3z^{40}} = x^6y^4z^8 \sqrt[5]{x^2y^3} & \text{b) } \sqrt[4]{\frac{x^{25}y^{15}}{z^6}} &= \sqrt[4]{\frac{x^{24}x y^{12}y^3}{z^4z^2}} = \frac{x^6y^3}{z} \sqrt[4]{\frac{xy^3}{z^2}} \\
 \text{c) } \sqrt[3]{128} &= \sqrt[3]{2^7} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 2} = 2^2 \sqrt[3]{2} = 4 \sqrt[3]{2} & \text{d) } \sqrt[3]{3125} &= \sqrt[3]{5^5} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5^2} = 5 \sqrt[3]{5^2} = 5 \sqrt[3]{25} \\
 \text{e) } \sqrt{40} &= \sqrt{2^3 \cdot 5} = \sqrt{2^2 \cdot 2 \cdot 5} = 2 \sqrt{2} \sqrt{5} = 2\sqrt{10} & \text{f) } \sqrt{96} &= \sqrt{2^5 \cdot 3} = \sqrt{2^4 \cdot 2 \cdot 3} = 2^2 \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{6}
 \end{aligned}$$

6. Radicales semejantes. Suma y resta de radicales.

Dos radicales son **semejantes** si, una vez extraídos factores fuera del radical, tienen el mismo índice y el mismo radicando.

Ejemplo 1: $4\sqrt{5}$ y $-3\sqrt{5}$ son semejantes porque ambos tienen índice 2 y radicando 5.

Ejemplo 2: $4\sqrt[3]{5}$ y $-3\sqrt{5}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo índice.

Ejemplo 3: $4\sqrt[3]{5}$ y $4\sqrt[3]{6}$ **no** son semejantes porque no tienen el mismo radicando.

Ejemplo 4: $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$ son semejantes porque $\sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ y $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Para **sumar o restar radicales**, es necesario que los **radicales sean semejantes**. Si los radicales no son semejantes, hay que dejar la operación indicada.

Se aplica la siguiente propiedad: $p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} = (p \pm q)\sqrt[n]{a}$

Ejemplo 1: $5\sqrt{8} + \sqrt{18} - 3\sqrt{32} = 5 \cdot 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 3 \cdot 4\sqrt{2} = 10\sqrt{2} + 3\sqrt{2} - 12\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Ejemplo 2: $\sqrt{245} - \sqrt{320} - 6\sqrt{5} + \sqrt{125} = 7\sqrt{5} - 8\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 5\sqrt{5} = -2\sqrt{5}$

Ejemplo 3: $2\sqrt[3]{16} - 5\sqrt[3]{2} + 3\sqrt[3]{250} = 2 \cdot 2\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 3 \cdot 5\sqrt[3]{2} = 4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} = 14\sqrt[3]{2}$

Ejemplo 4: $8\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{24} - 5\sqrt[3]{375} = 8\sqrt[3]{3} + 5 \cdot 2\sqrt[3]{3} - 5 \cdot 5\sqrt[3]{3} = 8\sqrt[3]{3} + 10\sqrt[3]{3} - 25\sqrt[3]{3} = -7\sqrt[3]{3}$

7. Reducción de radicales a común índice. Producto y cociente de radicales.

Reducir radicales a común índice equivale a encontrar otros tantos radicales equivalentes a los primeros y que tengan todos ellos el mismo índice.

Este índice común es el mínimo común múltiplo de los índices de todos los radicales. Luego, en cada uno de los radicales, se divide el índice común entre su índice y el resultado se multiplica por el exponente del radicando.

Ejemplo: para reducir los radicales $\sqrt[3]{2^2}$, $\sqrt{3^3}$, $\sqrt[4]{5}$ a radicales con el mismo índice, se calcula IC = m.c.m.(3, 2, 4) = 12

Para el índice 3, se hace $12 : 3 = 4$ ____ $4 \cdot 2 = 8$ $\Rightarrow \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[12]{2^8}$

Para el índice 2, se hace $12 : 2 = 6$ ____ $6 \cdot 3 = 18$ $\Rightarrow \sqrt{3^3} = \sqrt[12]{3^{18}}$

Para el índice 4, se hace $12 : 4 = 3$ ____ $3 \cdot 1 = 3$ $\Rightarrow \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$

Para multiplicar o dividir radicales de distinto índice, primero hay que reducirlos a **común índice** y después aplicar el producto o cociente de radicales del mismo índice:

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b} \qquad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Ejemplo 1: $\frac{\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt{2^5}}{\sqrt[4]{2^7}} = \frac{12\sqrt[2]{2^8} \cdot 12\sqrt[2]{2^{30}}}{12\sqrt[2]{2^{21}}} = 12\sqrt{\frac{2^{38}}{2^{21}}} = 12\sqrt{2^{17}} = 12\sqrt{2^{12} \cdot 2^5} = 2 \cdot 12\sqrt{2^5} = 2 \cdot 12\sqrt[3]{32}$

Ejemplo 2: $\sqrt[5]{x^2} \cdot \sqrt[3]{x^4} \cdot \sqrt{x^7} \cdot \sqrt{x} = \sqrt[30]{x^{12}} \cdot \sqrt[30]{x^{40}} \cdot \sqrt[30]{x^{105}} \cdot \sqrt[30]{x^2} = \sqrt[30]{x^{159}} = \sqrt[30]{x^{150} \cdot x^9} = x^5 \sqrt[30]{x^9}$

Ejemplo 3: $\sqrt[3]{a^2b} \sqrt{ab} \sqrt{a} = \sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{ab} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^8b^4} \cdot \sqrt[12]{a^2b^2} \cdot \sqrt[12]{a} = \sqrt[12]{a^{11}b^6}$

Ejemplo 4: $\frac{\sqrt[3]{a^2b} \sqrt{2ab}}{\sqrt{2a^2b} \sqrt[3]{b}} = \frac{\sqrt[3]{a^2b} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt{2a^2b} \cdot \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{2ab}}{\sqrt[6]{2^3a^6b^3} \cdot \sqrt[6]{b}} = \frac{\sqrt[6]{2a^5b^3}}{\sqrt[6]{2^3a^6b^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{2^2ab}} = \sqrt[6]{\frac{1}{4ab}}$