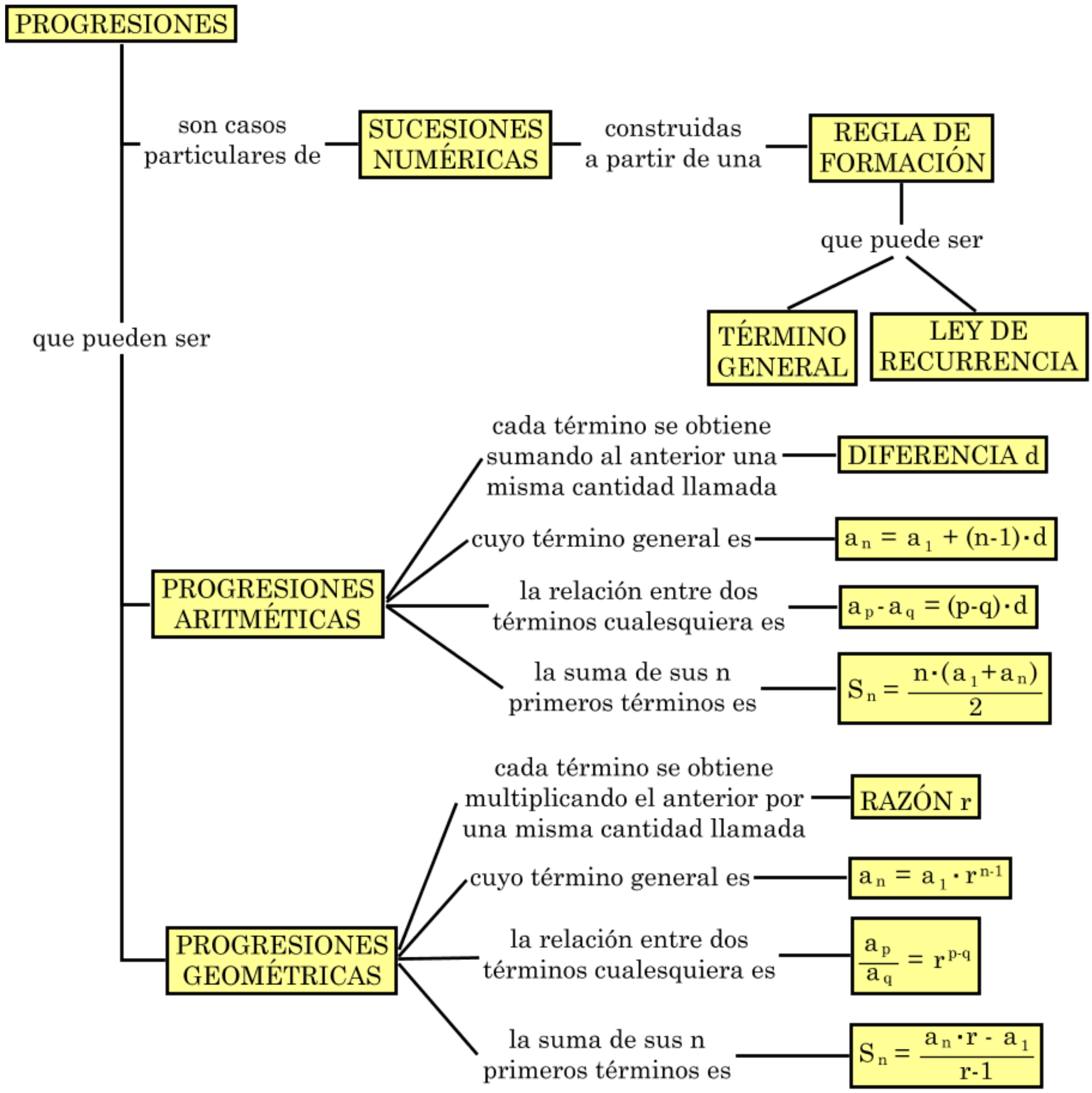
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 3ºESO.

UNIDAD 3. PROGRESIONES.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Sucesión numérica. Regla de formación.

Se llama **sucesión numérica** a una lista de números dispuestos uno a continuación de otro.

Los números que forman una sucesión se pueden determinar a partir de un cierto criterio llamado **regla de formación**. Hay sucesiones numéricas de muchos tipos, dependiendo de la regla con la que se formen.

Ejemplo 1: 2, 4, 6, 8, 10 ... es la sucesión de los números naturales pares.

Ejemplo 2: 1, 3, 5, 7, 9 … es la sucesión de los números naturales impares.

Ejemplo 3: 1, 4, 9, 16, 25,... es la sucesión de los cuadrados de los números naturales.

Ejemplo 4: 3, 7, 11, 15, 19, ... es la sucesión que empieza en el número tres y cada uno de los términos siguientes se obtiene sumándole 4 al anterior.

Ejemplo 5: 4, 2, 1, 0.5, 0.25, ... es la sucesión que empieza en el número cuatro y cada uno de los términos siguientes se obtiene dividiendo por 2 el anterior.

Ejemplo 6: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23,... es la sucesión de los números primos.

Los números que forman la sucesión se llaman **términos** y se representan por

$$a_1 ,\ a_2 ,\ a_3 ,\ \ldots,\ a_n$$

El subíndice indica la posición que el término ocupa en la sucesión.

El término a_n se llama **término general** y es la fórmula que expresa la regla de formación de la sucesión. Con el término general se puede calcular cualquier término de la sucesión.

Ejemplo 1: los cuatro primeros términos de la sucesión $a_n = 2n - 1$ son:

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$ $\quad a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$ $\quad a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$ $\quad a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$

Por lo tanto, a_n es la sucesión 1, 3, 5, 7, ...

Ejemplo 2: los cinco primeros términos de la sucesión $a_n = \dfrac{n-2}{3}$ son:

$a_1 = \dfrac{1-2}{3} = \dfrac{-1}{3}$ $\quad a_2 = \dfrac{2-2}{3} = 0$ $\quad a_3 = \dfrac{3-2}{3} = \dfrac{1}{3}$ $\quad a_4 = \dfrac{4-2}{3} = \dfrac{2}{3}$ $\quad a_5 = \dfrac{5-2}{3} = 1$

Por lo tanto, a_n es la sucesión $\dfrac{-1}{3}, 0, \dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, 1, \ldots$

Ejemplo 3: el término general de la sucesión 2, 4, 6, 8 ... es $a_n = 2n$

Ejemplo 4: el término general de la sucesión 1, 3, 5, 7 … es $a_n = 2n - 1$

Ejemplo 5: el término general de la sucesión $1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{4} \ldots$ es $a_n = \dfrac{1}{n}$

Ejemplo 6: el término general de la sucesión 1, 4, 9, 16, 25 ... es $a_n = n^2$

Ejemplo 7: el término general de la sucesión 10, 100, 1000, 10 000 ... es $a_n = 10^n$

No todas las sucesiones tienen término general. A veces la regla de formación es una **ley de recurrencia**, en la que un término cualquiera de la sucesión se obtiene a partir de los términos inmediatamente anteriores. A las sucesiones que se construyen de esta forma se les llama **sucesiones recurrentes**.

Ejemplo 1: los cuatro primeros términos de la sucesión dada por la ley de recurrencia

$$a_1 = 2,\ a_n = (a_{n-1})^2$$

serían: $a_1 = 2$ $\quad a_2 = (a_1)^2 = 2^2 = 4$ $\quad a_3 = (a_2)^2 = 4^2 = 16$ $\quad a_4 = (a_3)^2 = 16^2 = 256$

Por lo tanto, a_n es la sucesión 2, 4, 16, 256, ...

Ejemplo 2: los cuatro primeros términos de la sucesión dada por la ley de recurrencia

$$a_1 = 3,\ a_n = 3 \cdot a_{n-1} - 2$$

serían: $a_1 = 3$ $\quad a_2 = 3 \cdot a_1 - 2 = 7$ $\quad a_3 = 3 \cdot a_2 - 2 = 19$ $\quad a_4 = 3 \cdot a_3 - 2 = 55$

Por lo tanto, a_n es la sucesión 3, 7, 19, 55, ...

Ejemplo 3: los cinco primeros términos de la sucesión dada por la ley de recurrencia

$$a_1 = 1,\ a_2 = 1,\ a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$$

serían: $a_1 = 3$ $\quad a_2 = 1$ $\quad a_3 = a_1 + a_2 = 2$ $\quad a_4 = a_2 + a_3 = 3$ $\quad a_5 = a_3 + a_4 = 5$

Por lo tanto, a_n es la sucesión 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233... Esta sucesión recibe el nombre de **sucesión de Fibonacci**.

Dentro del conjunto de las sucesiones, hay dos casos particulares que requieren un estudio más detallado: las **progresiones aritméticas** (PA) y las **progresiones geométricas** (PG).

2. Progresiones aritméticas.

Una **progresión aritmética** (PA) es una sucesión de números en la que cada término se obtiene sumando una misma cantidad **d** al término anterior, donde **d** $\in \mathbb{R}$, $d \neq 0$.

La cantidad fija **d** que se va sumando se llama **diferencia.** Para obtenerla, basta con restar dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión.

Si **d > 0**, entonces la progresión queda ordenada en sentido **creciente** (de menor a mayor).

Si **d < 0**, entonces la progresión queda ordenada en sentido **decreciente** (de mayor a menor).

El término general de una PA de primer término a_1 **y de diferencia d es**

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$$

Demostración: como el primer término es a_1 y la diferencia es **d**, entonces $a_2 = a_1 + d$

a_3 se obtiene sumando **d** al término a_2 $\quad a_3 = a_2 + d \Rightarrow a_3 = a_1 + d + d \Rightarrow a_3 = a_1 + 2d$

a_4 se obtiene sumando **d** al término a_3 $\quad a_4 = a_3 + d \Rightarrow a_4 = a_1 + 2d + d \Rightarrow a_4 = a_1 + 3d$

a_5 se obtiene sumando **d** al término a_4 $\quad a_5 = a_4 + d \Rightarrow a_5 = a_1 + 3d + d \Rightarrow a_5 = a_1 + 4d$

Por lo tanto, el término general es $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

Ejemplo 1: la sucesión 2, 5, 8, 11, 14 ... es una PA en la que $a_1 = 2$ y $d = 3$.

Su término general es $a_n = 2 + (n-1) \cdot 3 = 2 + 3n - 3 = 3n - 1 \Rightarrow a_n = 3n - 1$

Si se desea averiguar un término cualquiera de la progresión, basta sustituir **n** por el número correspondiente a su posición.
Por ejemplo, para averiguar a_{85} se hace $a_{85} = 3 \cdot 85 - 1 = 254 \Rightarrow a_{85} = 254$

Ejemplo 2: la sucesión 18, 13, 8, 3, –2, –7, –12 ... es una PA en la que $a_1 = 18$ y $d = -5$.

Su término general es $a_n = 18 + (n-1) \cdot (-5) = 18 - 5n + 5 = -5n + 23 \Rightarrow a_n = -5n + 23$

Ejemplo 3: el término general de una PA en la que $a_1 = 2$ y $d = \frac{1}{3}$, es

$$a_n = 2 + (n-1) \cdot \frac{1}{3} = 2 + \frac{1}{3}n - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n + 2 - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3} \Rightarrow a_n = \frac{1}{3}n + \frac{5}{3}$$

Ejemplo 4: ¿es la sucesión 2, 5, 8, 13 …una PA? La respuesta es no, ya que la diferencia entre dos términos consecutivos no es la misma: 5 – 2 = 3 8 – 5 = 3 13 – 8 = 5

Ejemplo 5: si de una PA se conocen un término cualquiera, por ejemplo $a_{15} = 52$ y la diferencia d = 3, se puede averiguar su término general de la siguiente forma:

Primero se averigua a_1 sustituyendo n = 15, d = 3 en la expresión $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$

$a_{15} = a_1 + (15-1) \cdot 3 \Rightarrow 52 = a_1 + 14 \cdot 3 \Rightarrow 52 = a_1 + 42 \Rightarrow a_1 = 10$

Y ahora que ya se tienen $a_1 = 10$ y d = 3, el término general es

$a_n = 10 + (n-1) \cdot 3 = 10 + 3n - 3 = 3n + 7 \Rightarrow a_n = 3n + 7$

3. Relación entre dos términos cualesquiera de una progresión aritmética.

La relación entre dos términos cualesquiera a_p y a_q de una PA viene dada por la expresión:

$$a_p - a_q = (p-q) \cdot d$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} a_p = a_1 + (p-1) \cdot d = a_1 + pd - d \\ a_q = a_1 + (q-1) \cdot d = a_1 + qd - d \end{array}\right\} \Rightarrow a_p - a_q = pd - qd = (p-q) \cdot d \Rightarrow a_p - a_q = (p-q) \cdot d$$

Ejemplo: si de una PA se conocen dos términos cualesquiera, por ejemplo, $a_4 = 10$ y $a_9 = 25$, se puede averiguar su término general de la siguiente forma:

Primero se averigua la diferencia d **con la expresión** $a_p - a_q = (p-q)\cdot d$

$a_9 - a_4 = (9-4)\cdot d \quad \Rightarrow \quad 25 - 10 = 5\cdot d \quad \Rightarrow \quad 15 = 5\cdot d \quad \Rightarrow \quad d = 3$

Después se averigua a_1 sustituyendo d = 3, n = 4 en la expresión $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$a_4 = a_1 + (4-1)\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 10 = a_1 + 3\cdot 3 \quad \Rightarrow \quad 10 = a_1 + 9 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$

Y ahora que ya se tienen $a_1 = 1$ **y d = 3, el término general es**

$a_n = 1 + (n-1)\cdot 3 = 1 + 3n - 3 = 3n - 2 \quad \Rightarrow \quad a_n = 3n - 2$

4. Suma de los n primeros términos de una progresión aritmética.

La suma de los n primeros términos $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ **de una PA viene dada por la expresión:**

$$S_n = \frac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$$

Demostración:

$$\begin{array}{l} S_n = a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \\ S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1 \\ \hline 2\cdot S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1) \end{array}$$

Como en una PA se cumple que $a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = ... = a_{n-1} + a_2 = a_n + a_1$

$\Rightarrow \quad 2\cdot S_n = n\cdot(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad 2\cdot S_n = n\cdot(a_1 + a_n) \quad \Rightarrow \quad S_n = \dfrac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$

Ejemplo 1: para hallar la suma de los 50 primeros términos de la progresión 2, 5, 8, 11, 14, ... se necesitan los términos a_1 y a_{50}. El dato $a_1 = 2$ es un dato conocido.

Para hallar el término a_{50} se sustituyen n = 50, d = 3, $a_1 = 2$ en $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$$a_{50} = 2 + (50-1)\cdot 3 = 2 + 49\cdot 3 = 2 + 147 = 149 \quad \Rightarrow \quad a_{50} = 149$$

Ahora se sustituyen n = 50, $a_1 = 2$, $a_{50} = 149$ en la expresión $S_n = \dfrac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$

$$S_{50} = \frac{50\cdot(a_1 + a_{50})}{2} = \frac{50\cdot(2 + 149)}{2} = \frac{50\cdot 151}{2} = 3775 \quad \Rightarrow \quad S_{50} = 3775$$

Ejemplo 2: para hallar la suma de los 40 primeros términos de la progresión 50, 47, 44, 41, ... se necesitan los términos a_1 y a_{40}. El dato $a_1 = 50$ es un dato conocido.

Para hallar el término a_{40} se sustituyen n = 40, d = –3, $a_1 = 50$ en $a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$

$$a_{40} = 50 + (40-1)\cdot(-3) = 50 + 39\cdot(-3) = 50 - 117 = -67 \quad \Rightarrow \quad a_{40} = -67$$

Ahora se sustituyen n = 40, $a_1 = 50$, $a_{40} = -67$ en la expresión $S_n = \dfrac{n\cdot(a_1 + a_n)}{2}$

$$S_{40} = \frac{40\cdot(a_1 + a_{40})}{2} = \frac{40\cdot(50 - 67)}{2} = \frac{40\cdot(-17)}{2} = -340 \quad \Rightarrow \quad S_{40} = -340$$

5. Progresiones geométricas.

Una **progresión geométrica** (PG) es una sucesión en la que cada término se obtiene multiplicando por una misma cantidad **r** al término anterior, donde **r** $\in \mathbb{R}$, $r \neq 0$, $r \neq 1$.

La cantidad fija **r** por la que se va multiplicando se llama **razón**. Para obtenerla, basta con dividir dos términos consecutivos cualesquiera de la sucesión.

Si **r > 1**, entonces la progresión queda ordenada en sentido **creciente** (de menor a mayor).

Si **0 < r < 1**, entonces la progresión queda ordenada en sentido **decreciente** (de mayor a menor).

El término general de una PG de primer término a_1 **y de razón r es**

$$a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

Demostración: como el primer término es a_1 y la razón es **r**, entonces $a_2 = a_1 \cdot r$

a_3 se obtiene multiplicando a_2 por **r** $\quad a_3 = a_2 \cdot r \;\Rightarrow\; a_3 = a_1 \cdot r \cdot r \;\Rightarrow\; a_3 = a_1 \cdot r^2$

a_4 se obtiene multiplicando a_3 por **r** $\quad a_4 = a_3 \cdot r \;\Rightarrow\; a_4 = a_1 \cdot r^2 \cdot r \;\Rightarrow\; a_4 = a_1 \cdot r^3$

a_5 se obtiene multiplicando a_4 por **r** $\quad a_5 = a_4 \cdot r \;\Rightarrow\; a_5 = a_1 \cdot r^3 \cdot r \;\Rightarrow\; a_5 = a_1 \cdot r^4$

Por lo tanto, el término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

Ejemplo 1: la sucesión 3, 6, 12, 24, 48 ... es una PG en la que $a_1 = 3$ y $r = 2$.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 3 \cdot 2^{n-1} \;\Rightarrow\; a_n = 3 \cdot 2^{n-1}$

Si se desea averiguar un término cualquiera de la progresión, basta sustituir n por el número correspondiente a su posición. Por ejemplo, para calcular a_{13} se hace

$a_{13} = 3 \cdot 2^{13-1} = 3 \cdot 2^{12} = 3 \cdot 4096 = 12288 \;\Rightarrow\; a_{13} = 12288$

Ejemplo 2: la sucesión 32, 16, 8, 4, 2, 1, 0.5, ... es una PG en la que $a_1 = 32$ y $r = \frac{1}{2}$.

Su término general es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 32 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 32 \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{32}{2^{n-1}} \;\Rightarrow\; a_n = \frac{32}{2^{n-1}}$

Ejemplo 3: ¿es la sucesión 1, 3, 9, 18, ... una PG? La respuesta es no, ya que el cociente entre dos términos consecutivos no es el mismo: 3 : 1 = 3 $\quad$ 9 : 3 = 3 $\quad$ 18 : 9 = 2

Ejemplo 4: si de una PG se conocen la razón r = 2 y un término cualquiera, por ejemplo $a_8 = 640$, se puede averiguar su término general de la siguiente forma:

Primero se averigua a_1 sustituyendo n = 8, r = 2 en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$a_8 = a_1 \cdot 2^{8-1} \;\Rightarrow\; 640 = a_1 \cdot 2^7 \;\Rightarrow\; 640 = a_1 \cdot 128 \;\Rightarrow\; a_1 = 5$

Y ahora que ya se tienen $a_1 = 5$ **y r = 2, el término general es** $a_n = 5 \cdot 2^{n-1}$

6. Relación entre dos términos cualesquiera de una progresión geométrica.

La relación entre dos términos cualesquiera a_p y a_q de una PG viene dada por la expresión:

$$\frac{a_p}{a_q} = r^{p-q}$$

Demostración:

$$\left.\begin{array}{l} a_p = a_1 \cdot r^{p-1} = a_1 \cdot r^p \cdot r^{-1} \\ a_q = a_1 \cdot r^{q-1} = a_1 \cdot r^q \cdot r^{-1} \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{a_p}{a_q} = \frac{a_1 \cdot r^p \cdot r^{-1}}{a_1 \cdot r^q \cdot r^{-1}} = \frac{r^p}{r^q} = r^{p-q} \quad \Rightarrow \quad a_p - a_q = r^{p-q}$$

Ejemplo: si de una PG se conocen dos términos cualesquiera, por ejemplo, $a_3 = 18$ y $a_5 = 162$, se puede averiguar su término general de la siguiente forma:

Primero se averigua la razón r con la expresión $\frac{a_p}{a_q} = r^{p-q}$

$$\frac{a_5}{a_3} = r^{5-3} = r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{162}{18} = r^2 \quad \Rightarrow \quad r^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = 3$$

Después se averigua a_1 sustituyendo r = 3, n = 3 en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_3 = a_1 \cdot r^{3-1} \quad \Rightarrow \quad 18 = a_1 \cdot 3^2 \quad \Rightarrow \quad 18 = a_1 \cdot 9 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 2$$

Y ahora que ya se tienen $a_1 = 2$ y r = 3, el término general es $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

7. Suma de los n primeros términos de una progresión geométrica.

La suma de los n primeros términos $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ de una PG viene dada por la expresión:

$$S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$$

Ejemplo 1: para calcular la suma de los 10 primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24, ... se necesitan los términos a_1 y a_{10}. El dato $a_1 = 3$ es un dato conocido.

Para averiguar el término a_{10} se sustituyen n = 10, r = 2, $a_1 = 3$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_{10} = 3 \cdot 2^{10-1} = 3 \cdot 2^9 = 3 \cdot 512 = 1536 \quad \Rightarrow \quad a_{10} = 1536$$

Ahora se sustituyen n = 10, r = 2, $a_1 = 3$, $a_{10} = 1536$ en la expresión $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r - 1}$

$$S_{10} = \frac{a_{10} \cdot r - a_1}{r - 1} = \frac{1536 \cdot 2 - 3}{2 - 1} = \frac{3072 - 3}{1} = 3069 \quad \Rightarrow \quad S_{10} = 3069$$

Ejemplo 2: para calcular la suma de los 6 primeros términos de la progresión
$8, 4, 2, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4} \ldots$ se necesitan los términos a_1 y a_6. El dato $a_1 = 8$ es un dato conocido.

Para averiguar el término a_6 se sustituyen $n = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = 8$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{6-1} = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 8 \cdot \frac{1}{32} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad a_6 = \frac{1}{4}$$

Ahora se sustituyen $n = 6$, $r = \frac{1}{2}$, $a_1 = 8$, $a_6 = \frac{1}{4}$ en la expresión $S_n = \frac{a_n \cdot r - a_1}{r-1}$

$$S_6 = \frac{a_6 \cdot r - a_1}{r-1} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{\frac{1}{8} - 8}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-\frac{63}{8}}{-\frac{1}{2}} = \frac{-126}{-8} = \frac{63}{4} \quad \Rightarrow \quad S_6 = \frac{63}{4}$$

8. Producto de los n primeros términos de una progresión geométrica.

El producto de los n primeros términos $P_n = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$ de una PG viene dado por la expresión:

$$P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$$

Ejemplo 1: para hallar el producto de los 5 primeros términos de la progresión 3, 6, 12, 24, ... se necesitan los términos a_1 y a_5. El dato $a_1 = 3$ es un dato conocido.

Para averiguar el término a_5 se sustituyen $n = 5$, $r = 2$, $a_1 = 3$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_5 = 3 \cdot 2^{5-1} = 3 \cdot 2^4 = 3 \cdot 16 = 48 \quad \Rightarrow \quad a_5 = 48$$

Ahora se sustituyen $n = 5$, $a_1 = 3$, $a_5 = 48$ en la expresión $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

$$P_5 = \sqrt{(a_1 \cdot a_5)^5} = \sqrt{(3 \cdot 48)^5} = \sqrt{144^5} = 248832 \quad \Rightarrow \quad P_{10} = 248832$$

Ejemplo 2: para hallar el producto de los siete primeros términos de la progresión
$2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2} \ldots$ se necesitan los términos a_1 y a_7. El dato $a_1 = 2$ es un dato conocido.

Para averiguar el término a_7 se sustituyen $n = 7$, $r = \sqrt{2}$, $a_1 = 2$ en la expresión $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

$$a_7 = 2 \cdot (\sqrt{2})^{7-1} = 2 \cdot \sqrt{2^6} = 2 \cdot 8 = 16 \quad \Rightarrow \quad a_7 = 16$$

Ahora se sustituyen $n = 7$, $a_1 = 2$, $a_7 = 16$ en la expresión $P_n = \sqrt{(a_1 \cdot a_n)^n}$

$$P_7 = \sqrt{(a_1 \cdot a_7)^7} = \sqrt{(2 \cdot 16)^7} = \sqrt{32^7} = \sqrt{(2^5)^7} = \sqrt{2^{35}} = 2^{17}\sqrt{2} = 131072\sqrt{2} \quad \Rightarrow \quad P_7 = 131072\sqrt{2}$$