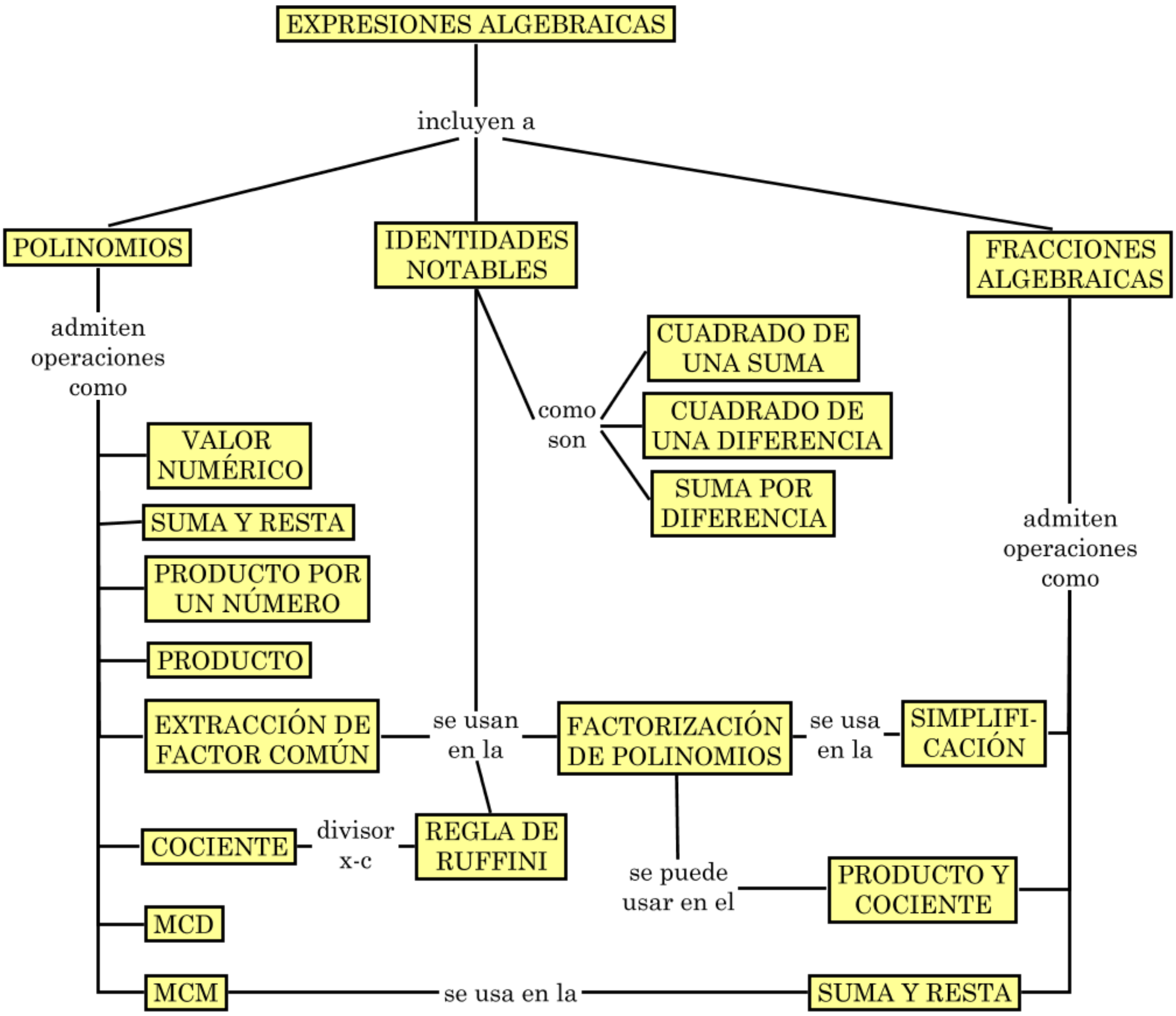
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 3ºESO.

UNIDAD 4. EXPRESIONES ALGEBRAICAS.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Expresiones algebraicas.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras y paréntesis ligados entre sí por los signos de las operaciones: suma, resta, producto, división, potencia, raíz,…

Si entre una letra y una cifra o bien entre dos letras no aparece ningún signo, se entiende que entre ellas hay un signo de multiplicar.

Por ejemplo, $2 \cdot x$ se suele escribir 2x $a \cdot b$ se suele escribir ab

Ejemplos de expresiones algebraicas son:

$2x \qquad a-7 \qquad \pi \cdot r^2 \qquad 4z-5 \qquad m^2+3m-2 \qquad \dfrac{2n-3}{n-1}$

Las expresiones algebraicas surgen de **traducir** al lenguaje matemático, frases o enunciados en los que aparecen **datos desconocidos que se representan por letras**.

Ejemplos:

Frase	Expresión algebraica	Frase	Expresión algebraica
El doble de m	$2m$	El triple de m	$3m$
Un número x disminuido en 2	$x-2$	Un número x aumentado en 3	$x+3$
La mitad de n	$\dfrac{n}{2}$	La tercera parte de n	$\dfrac{n}{3}$
El cuadrado de x	x^2	El cubo de x	x^3
La suma de a y b	$a+b$	La diferencia entre x e y	$x-y$
El producto de m por n	$m \cdot n$	El cociente entre p y q	$\dfrac{p}{q}$
El siguiente de x	$x+1$	El anterior de x	$x-1$
El doble de x más el triple de y	$2x+3y$	La mitad de n es igual al triple de z	$\dfrac{n}{2}=3z$
Tres números consecutivos	$x,\ x+1,\ x+2$	La raíz cuadrada de la suma de c y d	$\sqrt{c+d}$
Propiedad conmutativa de la suma	$a+b=b+a$	Propiedad conmutativa del producto	$a \cdot b = b \cdot a$

Nota: si entre una letra y un número, entre dos letras, entre una letra y un paréntesis, o entre un número y un paréntesis no aparece escrito ningún signo, hay que interpretar que hay un signo de multiplicar. Por ejemplo, la expresión $4 \cdot (3 \cdot x + 5)$ se suele escribir así: $4\,(3x+5)$

Valor numérico de una expresión algebraica

En una expresión algebraica, el valor de una letra es variable ya que puede representar a más de un número. Se llama **valor numérico de una expresión algebraica** al resultado de sustituir las letras de la expresión por los números propuestos y realizar las operaciones.

Ejemplo 1: el valor numérico de $3x+2y$ para $x=0,\ y=-1$ es $3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0 - 2 = -2$

Ejemplo 2: el valor numérico de x^3+2xy para $x=-2,\ y=1$ es $(-2)^3 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -8-4 = -12$

Ejemplo 3: el valor numérico de $\dfrac{2x-4}{y+1}$ para $x=-2,\ y=1$ es $\dfrac{2 \cdot (-2) - 4}{1+1} = \dfrac{-8}{2} = -4$

2. Polinomios.

Entre las expresiones algebraicas, se encuentra un relevante caso particular llamado polinomio. Se llama **polinomio a la suma o resta indicada de dos o más monomios**.

Si el polinomio consta de una sola letra x, se suele representar por P(x), Q(x), ...

Términos de un polinomio son todos y cada uno de los monomios que lo forman.

Si consta de **dos** términos, se suele llamar **binomio**. Por ejemplo, 4x+3 5x+2y x–8y

Si consta de **tres** términos, se suele llamar **trinomio**. Por ejemplo, 3x–y+1 x+7y–z

Ejemplos: $P(x)=3x^2-4x+2$, $P(x,y)=3x^2-y^2+2y$, $Q(x,y)=5xy-3x^2$ son polinomios

Los **coeficientes** del polinomio son los coeficientes de los monomios que lo forman.

Se llama **término independiente** (TI) del polinomio al monomio que no tiene parte literal, es decir, al monomio de grado cero, que es un número.

Si en un polinomio existen monomios semejantes, hay que operar con ellos dejando un solo monomio de cada tipo, quedando el polinomio expresado en su forma reducida. En la forma reducida, el **grado** de un polinomio es el grado del monomio de mayor grado.

Ejemplo 1: x^3-x^2-3x-1 es un polinomio de grado 3, coeficientes 1, –1, –3, –1 y TI = –1

Ejemplo 2: $5x^4+x^3-x$ es un polinomio de grado 4, coeficientes 5, 1, 0, –1, 0 y sin TI

Ejemplo 3: $3x-5$ es un polinomio de grado 1, coeficientes 3, –5 y TI = –5

Dado $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, se llama **valor numérico del polinomio P(x) en x = c** al número real que resulta de sustituir la letra **x** por **c** y realizar las operaciones. Se representa por P(c).

Ejemplo 1: el valor numérico de $P(x)=x^2+4x-1$ en $x=-2$ es

$P(-2)=(-2)^2+4\cdot(-2)-1=4-8-1=-5$

Ejemplo 2: el valor numérico de $P(x)=-x^2+5x-4$ en $x=3$ es

$P(3)=-3^2+5\cdot 3-4=-9+15-4=+2$

Operaciones con polinomios

a) **Suma de polinomios**: se suman los monomios semejantes.

Ejemplo: si $P(x)=x^3-3x^2+7x+1$ y $Q(x)=x^4+2x^3-5x+2$, entonces

$$P(x)+Q(x)=x^3-3x^2+7x+1+x^4+2x^3-5x+2=x^4+3x^3-3x^2+2x+3$$

b) **Resta de polinomios**: se suma al minuendo el opuesto del sustraendo:

P(x) – Q(x) = P(x) + (–Q(x))

Ejemplo: si $P(x)=x^4-3x^2+7x+1$ y $Q(x)=x^3+2x^2-5x+2$, entonces

$$P(x)-Q(x)=x^4-3x^2+7x+1-(x^3+2x^2-5x+2)=$$
$$x^4-3x^2+7x+1-x^3-2x^2+5x-2=x^4-x^3-5x^2+12x-1$$

c) **Producto/cociente de un polinomio por un número**: se multiplican/dividen todos y cada uno de los coeficientes del polinomio por el número.

Producto/cociente de un polinomio por un monomio: se multiplican/dividen todos y cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

<u>Ejemplo</u>: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$, entonces $5 \cdot P(x) = 5x^3 - 15x^2 + 35x + 5$

<u>Ejemplo</u>: si $P(x) = 5x^3 + 7x + 1$, entonces

$$3x^2 \cdot P(x) = 3x^2 \cdot 5x^3 + 3x^2 \cdot 7x + 3x^2 \cdot 1 = 15x^5 + 21x^3 + 3x^2$$

d) **Producto de polinomios**: se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos y cada uno de los monomios del segundo polinomio y después se suman los monomios semejantes obtenidos. Obsérvese que grado (P(x) · Q(x)) = grado (P(x)) + grado (Q(x))

<u>Ejemplo</u>: si $P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ y $Q(x) = 5x^2 + 3x - 2$, entonces

		x^3	$-6x^2$	$+2x$	$+4$
			$5x^2$	$+3x$	-2
		$-2x^3$	$+12x^2$	$-4x$	-8
	$+3x^4$	$-18x^3$	$+6x^2$	$+12x$	
$+5x^5$	$-30x^4$	$+10x^3$	$+20x^2$		
$5x^5$	$-27x^4$	$-10x^3$	$+38x^2$	$+8x$	-8

Obsérvese que el grado (P(x) · Q(x)) = grado (P(x)) + grado (Q(x))

e) **Extracción de factor común**: consiste en escribir una expresión algebraica como producto de un número o monomio por otra expresión, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: CA + CB = C (A+B)

El factor común, si existe, es un monomio de coeficiente el m.c.d. de los coeficientes y de parte literal, las letras comunes elevadas al menor exponente.

<u>Ejemplo 1</u>: $3x^4 - 6x^3 + 9x^2 = 3x^2 \cdot (x^2 - 2x + 3)$

<u>Ejemplo 2</u>: $5x^2y + 10xy^2 = 5xy \cdot (x + 2y)$

<u>Ejemplo 3</u>: $3x^4y^2 - 2x^3y^3 = x^3y^2 \cdot (3x - 2y)$

<u>Ejemplo 4</u>: $6x^2y - 8xy^2 = 2xy \cdot (3x - 4y)$

<u>3. División de polinomios.</u>

Dada una división de polinomios D(x) : d(x), al polinomio **D(x)** se le llama **dividendo** y al polinomio **d(x)** se le llama **divisor**. El resultado de la división es un polinomio llamado **cociente c(x)** y otro polinomio llamado **resto r(x)**.

En toda división de polinomios se cumple que: $D(x) = d(x) \cdot c(x) + r(x)$

Para que se pueda realizar la división, el grado del polinomio D(x) tiene que ser mayor o igual que el grado del polinomio d(x). Se procede del siguiente modo:

Paso 1. Se escribe el polinomio D(x) a la izquierda de forma ordenada y dejando huecos en los términos cuyo coeficiente sea cero. Se escribe el polinomio d(x) a la derecha también ordenado.

Paso 2. Se divide el primer término de D(x) entre el primer término de d(x), obteniéndose el primer término de c(x).

Paso 3. Se multiplica el primer término de c(x) obtenido por todos los términos de d(x), obteniéndose un polinomio que hay que restar a D(x).

Paso 4. Tras aplicar el paso anterior se obtiene un polinomio resto parcial. Tomando éste como nuevo dividendo y con el mismo divisor d(x) se vuelven a repetir los pasos 2 y 3.

Paso 5. La división finaliza cuando se llega a un polinomio resto parcial de grado menor que el grado de d(x). El último resto parcial es el polinomio resto r(x) de la división.

<u>Ejemplo</u>: para dividir $D(x) = x^5 + 2x^3 - x - 8$ entre $d(x) = x^2 - 2x + 1$, se hace

$$
\begin{array}{rrrrrr|l}
x^5 & & +2x^3 & & -x & -8 & x^2-2x+1 \\ \cline{7-7}
-x^5 & +2x^4 & -x^3 & & & & x^3+2x^2+5x+8 \\ \cline{1-3}
 & +2x^4 & +x^3 & & -x & & \\
 & -2x^4 & +4x^3 & -2x^2 & & & \\ \cline{2-4}
 & & +5x^3 & -2x^2 & -x & -8 & \\
 & & -5x^3 & +10x^2 & -5x & & \\ \cline{3-6}
 & & & +8x^2 & -6x & -8 & \\
 & & & -8x^2 & +16x & -8 & \\ \cline{4-6}
 & & & & 10x & -16 &
\end{array}
$$

obteniéndose como cociente $c(x) = x^3 + 2x^2 + 5x + 8$ y como resto $r(x) = 10x - 16$

División exacta

Si al realizar la división de un polinomio P(x) entre otro polinomio Q(x), se obtiene resto cero, entonces se dice que la **división** es **exacta** y que **P(x) es divisible por Q(x)**.

<u>Ejemplo</u>: para saber si $P(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ es divisible por $Q(x) = x^2 - x - 2$, se hace

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & +4x^2 & -7x & -10 & x^2-x-2 \\ \cline{5-5}
-x^3 & +x^2 & +2x & & x+5 \\ \cline{1-3}
 & +5x^2 & -5x & -10 & \\
 & -5x^2 & +5x & +10 & \\ \cline{2-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Como el resto de la división es 0, se dice que P(x) es divisible entre Q(x).

Regla de Ruffini

Si el polinomio divisor es de la forma $d(x) = x - c$, siendo $\mathbf{c} \in \mathbb{Q}$, la división se puede hacer de forma más sencilla usando la llamada **Regla de Ruffini**, que sólo necesita de los coeficientes de D(x) y del número **c**.

Paso 1. Se escriben los coeficientes de D(x) de forma ordenada, rellenando con ceros los huecos correspondientes a los términos que no existan.

Paso 2. Se escribe el número **c** una línea más abajo y a la izquierda de los coeficientes de D(x).

Paso 3. Dos líneas más abajo se copia el primer coeficiente de D(x).

Paso 4. Se multiplica este coeficiente por **c** y se suma el resultado al siguiente coeficiente de D(x). El resultado obtenido se anota a la derecha del primer coeficiente de D(x). Con este resultado se vuelve a aplicar el paso 4 y así sucesivamente hasta llegar a la última columna.

Paso 5. El número obtenido al aplicar por última vez el paso anterior es el resto de la división. Los demás números obtenidos previos al resto, son los coeficientes ordenados del cociente c(x), teniendo en cuenta que el grado de c(x) es una unidad menor que el grado de D(x).

Ejemplo 1: para dividir $D(x)=x^4-3x^2+2$ entre $d(x)=x-2$ por la regla de Ruffini, se hace

$$\begin{array}{r|rrrr|r} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 2 & & 2 & 4 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 2 & 1 & 2 & \boxed{6} \end{array} \Rightarrow \text{ El cociente es } c(x)=x^3+2x^2+x+2 \text{ y el resto es } r=6$$

Ejemplo 2: para dividir $D(x)=x^3+2x+7$ entre $d(x)=x+1$ por la regla de Ruffini, se hace

$$\begin{array}{r|rrr|r} & 1 & 0 & 2 & 7 \\ -1 & & -1 & 1 & -3 \\ \hline & 1 & -1 & 3 & \boxed{4} \end{array} \Rightarrow \text{ El cociente es } c(x)=x^2-x+3 \text{ y el resto es } r=4$$

4. Identidades notables.

Una **identidad** es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que en ella intervienen.
El cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia y suma por diferencia son casos particulares de identidades y se les nombra como **identidades notables**.

1. Cuadrado de una suma: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$$\begin{array}{r} A+B \\ A+B \\ \hline AB+B^2 \\ A^2+AB \quad\;\; \\ \hline A^2+2AB+B^2 \end{array}$$

Ejemplo 1: $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2+2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$

Ejemplo 2: $(x^3+3xy)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot 3xy+(3xy)^2=x^6+6x^4y+9x^2y^2$

Ejemplo 3: $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=2+2\sqrt{6}+3=5+2\sqrt{6}$

2. Cuadrado de una diferencia: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$\begin{array}{r} A-B \\ A-B \\ \hline -AB+B^2 \\ A^2-AB \quad\;\; \\ \hline A^2-2AB+B^2 \end{array}$$

Ejemplo 1: $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}$

Ejemplo 2: $(x^2-4y)^2=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot 4y+(4y)^2=x^4-8x^2y+16y^2$

Ejemplo 3: $(3\sqrt{2}-2\sqrt{3})^2=(3\sqrt{2})^2+2\cdot 3\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{3}+(2\sqrt{3})^2=18+12\sqrt{6}+12=30+12\sqrt{6}$

3. Suma por diferencia: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

$$\begin{array}{r} A+B \\ A-B \\ \hline -\cancel{AB}-B^2 \\ A^2+\cancel{AB} \quad\;\; \\ \hline A^2 \qquad -B^2 \end{array}$$

Ejemplo 1: $\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{x}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{x^2}{25}-\frac{1}{49}$

Ejemplo 2: $(xy^2+5)\cdot(xy^2-5)=(xy^2)^2-5^2=x^2y^4-25$

Ejemplo 3: $(\sqrt{3}+3\sqrt{2})\cdot(\sqrt{3}-3\sqrt{2})=(\sqrt{3})^2-(3\sqrt{2})^2=3-18=-15$

5. Factorización de un polinomio.

La descomposición factorial o **factorización** de un polinomio consiste en expresarlo como producto de polinomios con el menor grado posible cada uno de ellos. Si no es posible descomponer un polinomio en factores, dicho polinomio se dice que es **irreducible**.

A) Factorización de polinomios usando factor común e identidades notables

Extrayendo factor común primero, si es posible o/y usando alguna de las identidades notables se pueden **factorizar algunos polinomios**:

Ejemplo 1: $x^2+2x+1=(x)^2+2\cdot x\cdot 1+(1)^2=(x+1)^2$

Ejemplo 2: $4x^2+12x+9=(2x)^2+2\cdot 2x\cdot 3+(3)^2=(2x+3)^2$

Ejemplo 3: $x^3-2x^2+x=x\cdot(x^2-2x+1)=x\cdot(x-1)^2$

Ejemplo 4: $4x^2-12x+9=(2x)^2-2\cdot 2x\cdot 3+(3)^2=(2x-3)^2$

Ejemplo 5: $x^2-1=(x)^2-(1)^2=(x+1)\cdot(x-1)$

Ejemplo 6: $4x^3-9x=x\cdot(4x^2-9)=x\cdot(2x+3)\cdot(2x-3)$

Ejemplo 7: $5x^3+20x^2+20x=5x\cdot(x^2+4x+4)=5x\cdot(x+2)^2$

Ejemplo 8: $3x^4-6x^3+3x^2=3x^2\cdot(x^2-2x+1)=3x^2\cdot(x-1)^2$

Ejemplo 9: $7x^4-63x^2=7x^2\cdot(x^2-9)=7x^2\cdot(x-3)\cdot(x+3)$

B) Factorización de polinomios aplicando la regla de Ruffini

Paso 1. Se aplica la regla de Ruffini al polinomio probando sólo con los divisores del término independiente, hasta encontrar uno con el que se obtenga resto igual a cero. En ese caso, el número probado **c** es raíz entera de $P(x)$ y el binomio $x-c$ es un factor de $P(x)$.

Paso 2. Se aplica el paso anterior ahora con el polinomio cociente parcial resultante de la división exacta anterior, obteniéndose, si se da el caso, una nueva raíz entera y un nuevo factor de $P(x)$ que habrá que añadir a su factorización.

Paso 3. El proceso se detiene al quedar un cociente final con un único coeficiente, número que habrá que añadirse a la factorización de $P(x)$ en el caso de que sea distinto de 1.

Ejemplo 1: para factorizar $P(x)=x^4-x^3-7x^2+x+6$, se aplica la regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -1 & -7 & 1 & 6 \\
1 & & 1 & 0 & -7 & -6 \\
\hline
 & 1 & 0 & -7 & -6 & \boxed{0} \\
-1 & & -1 & 1 & 6 & \\
\hline
 & 1 & -1 & -6 & \boxed{0} & \\
-2 & & -2 & 6 & & \\
\hline
 & 1 & -3 & \boxed{0} & & \\
3 & & 3 & & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ La factorización es $P(x)=(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x-3)$ y sus raíces enteras son los números $1, -1, -2$ y 3

Ejemplo 2: para factorizar $P(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$, se se aplica la regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 1 & 1 & -5 & 3 \\
1 & & 1 & 2 & -3 \\
\hline
 & 1 & 2 & -3 & \boxed{0} \\
1 & & 1 & 3 & \\
\hline
 & 1 & 3 & \boxed{0} & \\
-3 & & -3 & & \\
\hline
 & 1 & \boxed{0} & &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ La factorización es $P(x) = (x-1)^2 \cdot (x+3)$ y sus raíces enteras son los números 1 (doble) y -3

Ejemplo 3: para factorizar $P(x) = 3x^2 - 3x - 6$, se se aplica la regla de Ruffini

$$
\begin{array}{r|rrr}
 & 3 & -3 & -6 \\
-1 & & -3 & 6 \\
\hline
 & 3 & -6 & \boxed{0} \\
2 & & 6 & \\
\hline
 & 3 & \boxed{0} &
\end{array}
$$

$\Rightarrow$ La descomposición en factores de P(x) es $P(x) = 3 \cdot (x+1) \cdot (x-2)$ y sus raíces enteras son los números -1 y 2

6. Fracciones algebraicas.

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo de dos o más polinomios

Para hallar el m.c.d. o el m.c.m. de dos o más polinomios, hay que factorizar cada uno de ellos.

El m.c.d. es el producto de los factores comunes elevados al menor exponente.

El m.c.m. es el producto de los factores comunes y no comunes elevados al mayor exponente.

Ejemplo 1: para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $x^2 - 1$ y $x^2 + 2x + 1$, se factorizan cada uno de ellos:

$x^2 - 1 = (x+1) \cdot (x-1)$ $\qquad$ $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$

$\Rightarrow$ m.c.d.$(x^2 - 1,\ x^2 + 2x + 1) = x + 1$ $\qquad$ m.c.m.$(x^2 - 1,\ x^2 + 2x + 1) = (x+1)^2 \cdot (x-1)$

Ejemplo 2: para hallar el m.c.d. y el m.c.m. de los polinomios $x^3 - x$, $x^3 + 2x^2 + x$ y x^2, se factorizan cada uno de ellos:

$x^3 - x = x \cdot (x+1) \cdot (x-1)$ $\qquad$ $x^3 + 2x^2 + x = x \cdot (x+1)^2$ $\qquad$ $x^2 = x^2$

$\Rightarrow$ m.c.d.$(x^3 - x,\ x^2 + 2x + 1,\ x^2) = x$ $\qquad$ m.c.m.$(x^3 - x,\ x^2 + 2x + 1,\ x^2) = x^2 \cdot (x+1)^2 \cdot (x-1)$

Fracciones algebraicas

Una **fracción algebraica** es el cociente indicado de dos polinomios, siendo el denominador distinto de cero.

Ejemplos: $\dfrac{3x}{x^2 - 1}$ $\qquad$ $\dfrac{5x^3 + 2x}{x - 2}$ $\qquad$ $\dfrac{6x^2y + 3x + 2}{7x - y}$ son fracciones algebraicas.

Dos fracciones algebraicas son **equivalentes** si coinciden sus productos cruzados. Al **simplificar** una fracción algebraica, la fracción que se obtiene es equivalente a la primera.

Para **simplificar una fracción algebraica:**

Paso 1. Se descomponen en factores tanto el polinomio numerador como el polinomio denominador.

Paso 2. Se eliminan los factores comunes a ambos. Si no hay factores comunes, entonces la fracción algebraica dada es irreducible: no se puede simplificar.

Ejemplo 1: para simplificar $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$, se hace $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-1}{x+1}$

Ejemplo 2: para simplificar $\frac{x^2-4}{2x-4}$, se hace $\frac{x^2-4}{2x-4}=\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2\cdot(x-2)}=\frac{x+2}{2}$

Ejemplo 3: para simplificar $\frac{81-x^2}{9x+x^2}$, se hace $\frac{81-x^2}{9x+x^2}=\frac{(9-x)\cdot(9+x)}{x\cdot(9+x)}=\frac{9-x}{x}$

Para **operar con fracciones algebraicas** se siguen exactamente las mismas reglas que con las fracciones numéricas: todo es igual salvo que se opera con polinomios en lugar de con números.

Ejemplo 1: para calcular $\frac{5}{3x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{2x^2}$, se averigua m.c.m.$(3x\ ,\ x^2,\ 2x^2)$

$\Rightarrow$ m.c.m.$(3x\ ,\ x^2,\ 2x^2)=6x^2$

$$\frac{5}{3x}-\frac{3}{x^2}+\frac{7}{2x^2}=\frac{10x}{6x^2}-\frac{18}{6x^2}+\frac{21}{6x^2}=\frac{10x-18+21}{6x^2}=\frac{10x+3}{6x^2}$$

Ejemplo 2: para calcular $\frac{-2x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{5}{x-1}$, se averigua m.c.m.$(x^2-1\ ,\ x-1\ ,\ x+1)$

$x^2-1=(x+1)\cdot(x-1)$ $\qquad x-1=(x-1)$ $\qquad x+1=(x+1)$

$\Rightarrow$ m.c.m.$(x^2-1\ ,\ x-1\ ,\ x+1)=(x+1)\cdot(x-1)$

$$\frac{-2x}{x^2-1}+\frac{x}{x+1}-\frac{5}{x-1}=\frac{-2x\cdot 1}{(x-1)\cdot(x+1)}+\frac{x\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x+1)}-\frac{5\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=$$

$$=\frac{-2x+x\cdot(x-1)-5\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{-2x+x^2-x-5x-5}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-8x-5}{(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x^2-8x-5}{x^2-1}$$

Ejemplo 3: $\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x^2-4}{x^2-1}=\frac{(x-1)\cdot(x^2-4)}{(x+2)\cdot(x^2-1)}=\frac{(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x-1)\cdot(x+1)}=\frac{x-2}{x+1}$

Ejemplo 4: $\frac{x-3}{x-2}:\frac{x^2-9}{3x-6}=\frac{(x-3)\cdot(3x-6)}{(x-2)\cdot(x^2-9)}=\frac{(x-3)\cdot 3\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x+3)}=\frac{3}{x+3}$

Ejemplo 5: $\frac{x^2-2x+1}{x^2-1}:\frac{3x-3}{x^2+x}=\frac{(x^2-2x+1)\cdot(x^2+x)}{(x^2-1)\cdot(3x-3)}=\frac{(x-1)^2\cdot x\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)\cdot 3\cdot(x-1)}=\frac{x}{3}$