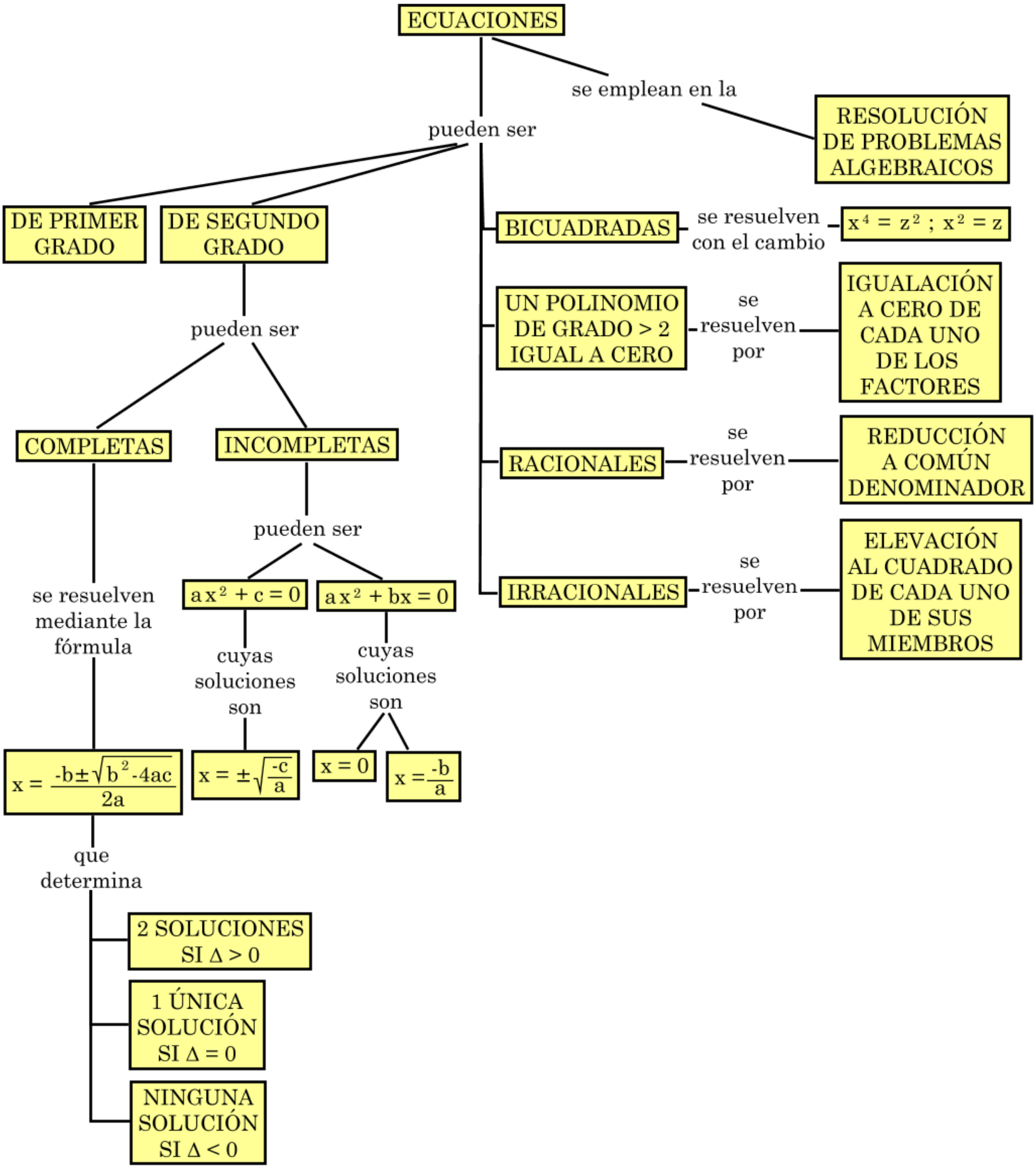
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

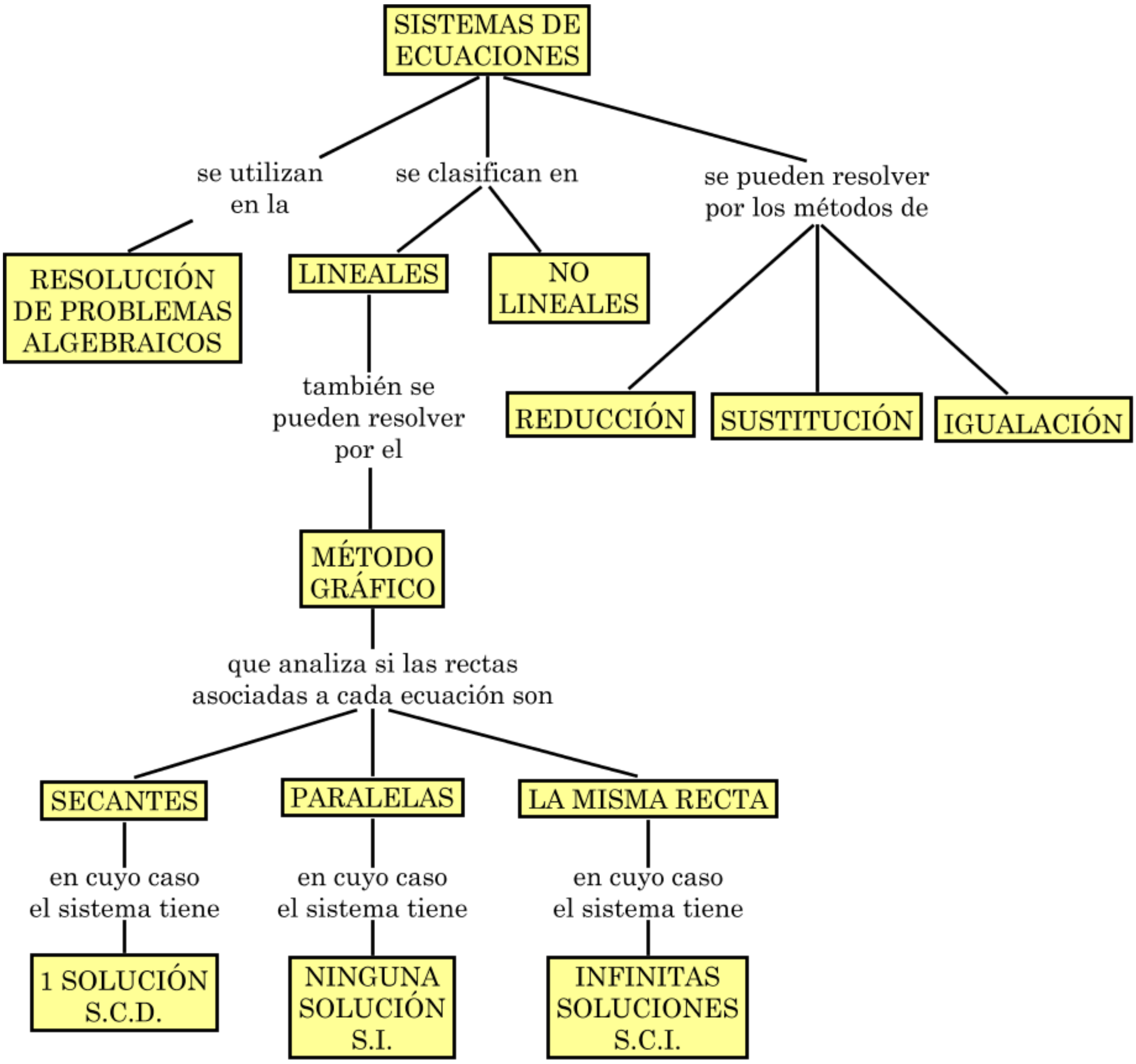
**MATEMÁTICAS DE 3ºESO.**

**UNIDAD 5. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.**

IES LA BAHIA

## MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD




SISTEMAS DE ECUACIONES
se utilizan en la
RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ALGEBRAICOS
se clasifican en
LINEALES
NO LINEALES
se pueden resolver por los métodos de
REDUCCIÓN
SUSTITUCIÓN
IGUALACIÓN
también se pueden resolver por el
MÉTODO GRÁFICO
que analiza si las rectas asociadas a cada ecuación son
SECANTES
PARALELAS
LA MISMA RECTA
en cuyo caso el sistema tiene
1 SOLUCIÓN S.C.D.
en cuyo caso el sistema tiene
NINGUNA SOLUCIÓN S.I.
en cuyo caso el sistema tiene
INFINITAS SOLUCIONES S.C.I.

## 1. Ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica en la que interviene una sola letra llamada **incógnita**, elevada a dos.

La expresión reducida de una ecuación de segundo grado con una incógnita es

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{, donde a, b, c} \in \mathbb{R}\text{, siendo } a \neq 0$$

Se llama **solución** de la ecuación a cualquier número que sustituido en el lugar de la incógnita, verifica la igualdad.

Ejemplo 1: $x = -1$ es solución de la ecuación $\frac{1}{x} - x^2 - 2x = 0$ porque

$$\frac{1}{-1} - (-1)^2 - 2\cdot(-1) = -1 - 1 + 2 = 0$$

Ejemplo 2: $x = 4$ **no** es solución de la ecuación $x^2 - 3x = 5$ porque

$$4^2 - 3\cdot 4 = 16 - 12 = 4 \neq 5$$

Las posibles soluciones se obtienen aplicando la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Pueden darse tres casos:

1. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
2. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces la ecuación tiene una única solución (doble).
3. Si el discriminante $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, entonces la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $x - \frac{1+x^2}{2} = \frac{2(x^2-1)}{3}$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $x - \frac{1+x^2}{2} = \frac{2x^2-2}{3}$

Paso 2. m.c.m. (2, 3) = 6; $\frac{6x}{6} - \frac{3+3x^2}{6} = \frac{4x^2-4}{6}$; $6x - 3 - 3x^2 = 4x^2 - 4$

Paso 3. $0 = -6x + 3 + 3x^2 + 4x^2 - 4$

Paso 4. $7x^2 - 6x - 1 = 0$

Los coeficientes de esta ecuación son $a = 7$, $b = -6$, $c = -1$. Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4\cdot 7\cdot(-1)}}{2\cdot 7} = \frac{+6 \pm \sqrt{36+28}}{14} = \frac{+6 \pm \sqrt{64}}{14} = \frac{+6 \pm 8}{14} =$$

$$= \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{+6+8}{14} = \frac{14}{14} = 1 \\ \\ x_2 = \frac{+6-8}{14} = \frac{-2}{14} = \frac{-1}{7} \end{array} \right.$$

Por lo tanto, **hay dos soluciones**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta = 64 > 0$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $\frac{x}{2}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-(1-x)}{3}$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x}{2}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-1+x}{3}$

Paso 2. m.c.m.(2, 12, 3) = 12 ; $\frac{6x}{12}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-4+4x}{12}$ ; $6x-x^2-5=-4+4x$

Paso 3. $0=-6x+x^2+5-4+4x$

Paso 4. $x^2-2x+1=0$

Los coeficientes de esta ecuación son a = 1, b = −2, c = 1. Se aplica la fórmula:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por lo tanto, **hay una única solución**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta=0$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $\frac{x^2}{2}-\frac{3(x+2)}{2}=\frac{x-20}{4}$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x^2}{2}-\frac{3x+6}{2}=\frac{x-20}{4}$

Paso 2. m.c.m.(2, 4) = 4 ; $\frac{2x^2}{4}-\frac{6x+12}{4}=\frac{x-20}{4}$ ; $2x^2-6x-12=x-20$

Paso 3. $2x^2-6x-12-x+20=0$

Paso 4. $2x^2-7x+8=0$

Los coeficientes de esta ecuación son a = 2, b = −7, c = 8. Se aplica la fórmula:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{49-64}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{-15}}{4}$$

Como no existen las raíces cuadradas de números negativos, **la ecuación no tiene solución**.

Obsérvese que el discriminante es $\Delta=-15<0$

**Ecuaciones de segundo grado incompletas**

Se denomina **incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que falta el término de primer grado o el término independiente: $ax^2+c=0$ ó $ax^2+bx=0$

Aunque las ecuaciones incompletas se pueden resolver aplicando la fórmula para el caso general, existen métodos más cortos para resolver cada una de ellas.

**a) Ecuaciones del tipo** $ax^2+c=0$

$ax^2+c=0 \Rightarrow ax^2=-c \Rightarrow x^2=\frac{-c}{a} \Rightarrow$ las soluciones son $x_1=+\sqrt{\frac{-c}{a}}$ y $x_2=-\sqrt{\frac{-c}{a}}$

La ecuación tiene **dos soluciones** si $\frac{-c}{a}\geq 0$ y **ninguna solución** si $\frac{-c}{a}<0$

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $2x^2 - 50 = 0$, se hace lo siguiente:

$$2x^2 = 50 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{50}{2} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{25} \quad \Rightarrow \text{ las soluciones son } x_1 = +5 \text{ y } x_2 = -5$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $3x^2 + 9 = 0$, se hace lo siguiente:

$$3x^2 = -9 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-9}{3} \quad \Rightarrow \quad x^2 = -3 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{-3} \quad \Rightarrow \quad \text{la ecuación no tiene solución.}$$

**b) Ecuaciones del tipo** $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (ax + b) = 0 \quad \begin{cases} \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \Rightarrow \quad ax + b = 0 \quad \Rightarrow \quad ax = -b \quad \Rightarrow \quad x_2 = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

La ecuación tiene **dos soluciones**. Una de ellas siempre es x = 0.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $2x^2 - 18x = 0$, se hace lo siguiente:

$$2x^2 - 18x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (2x - 18) = 0 \quad \begin{cases} \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \Rightarrow \quad 2x - 18 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x = 18 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{18}{2} \quad \Rightarrow \quad x_2 = 9 \end{cases}$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $3x^2 + 6x = 0$, se hace lo siguiente:

$$3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x \cdot (3x + 6) = 0 \quad \begin{cases} \Rightarrow \quad x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0 \\ \Rightarrow \quad 3x + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x = -6 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{-6}{3} \quad \Rightarrow \quad x_2 = -2 \end{cases}$$

## 2. Ecuaciones bicuadradas.

Una ecuación bicuadrada es aquella del tipo $ax^4 + bx^2 + c = 0$, donde a, b, c $\in \mathbb{R}$, siendo $a \neq 0$

Una ecuación bicuadrada puede tener **4 soluciones** (opuestas dos a dos); **3 soluciones** (dos opuestas y cero); **2 soluciones** (opuestas); **1 solución** (cero) o **ninguna solución**.

Para resolver una ecuación de este tipo se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1**. Con el cambio $x^2 = z, \quad x^4 = z^2$ se reescribe la ecuación como $az^2 + bz + c = 0$.

**Paso 2**. Se resuelve la ecuación resultante $az^2 + bz + c = 0$ para la letra **z**.

**Paso 3**. Aplicando $x^2 = z$ en cada una de las soluciones obtenidas para **z**, se escriben las correspondientes ecuaciones para la letra **x**. Al resolver por separado cada una de estas ecuaciones, se obtienen todas las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$, se hace lo siguiente:

**Paso 1**. Con el cambio $x^2 = z$, $x^4 = z^2$ la ecuación queda así: $z^2 - 13z + 36 = 0$

**Paso 2**. Los coeficientes de esta ecuación son a = 1, b = −13, c = 36. Se aplica la fórmula:

$$z = \frac{13 \pm \sqrt{(-13)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} = \frac{13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{13 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{13 \pm 5}{2} \left\langle \begin{array}{l} z = \frac{13+5}{2} = \frac{18}{2} = 9 \\ z = \frac{13-5}{2} = \frac{8}{2} = 4 \end{array} \right.$$

**Paso 3**. La ecuación inicial **tiene 4 soluciones** ya que:

– Si $z = 9$, entonces $x^2 = 9$ y por lo tanto, $x_1 = +3$ y $x_2 = -3$

– Si $z = 4$, entonces $x^2 = 4$ y por lo tanto, $x_3 = +2$ y $x_4 = -2$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $x^4 + 2x^2 - 3 = 0$, se hace lo siguiente:

**Paso 1**. Con el cambio $x^2 = z$, $x^4 = z^2$ la ecuación queda así: $z^2 + 2z - 3 = 0$

**Paso 2**. Los coeficientes de esta ecuación son a = 1, b = 2, c = −3. Se aplica la fórmula:

$$z = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{-2 \pm 4}{2} \left\langle \begin{array}{l} z = \frac{-2+4}{2} = \frac{2}{2} = 1 \\ z = \frac{-2-4}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

**Paso 3**. La ecuación inicial **tiene 2 soluciones** ya que:

– Si $z = 1$, entonces $x^2 = 1$ y por lo tanto, $x_1 = +1$ y $x_2 = -1$

– Si $z = -3$, entonces $x^2 = -3$ y por lo tanto, esta parte no aporta ninguna solución.

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $x^4 + 4x^2 + 3 = 0$, se hace lo siguiente:

**Paso 1**. Con el cambio $x^2 = z$, $x^4 = z^2$ la ecuación queda así: $z^2 + 4z + 3 = 0$

**Paso 2**. Los coeficientes de esta ecuación son a = 1, b = 4, c = 3. Se aplica la fórmula:

$$z = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{-4 \pm 2}{2} \left\langle \begin{array}{l} z = \frac{-4+2}{2} = \frac{-2}{2} = -1 \\ z = \frac{-4-2}{2} = \frac{-6}{2} = -3 \end{array} \right.$$

**Paso 3**. La ecuación inicial **no tiene solución** ya que:

– Si $z = -1$, entonces $x^2 = -1$ y por lo tanto, esta parte no aporta ninguna solución.

– Si $z = -3$, entonces $x^2 = -3$ y por lo tanto, esta parte tampoco aporta ninguna solución.

## 3. Otros tipos de ecuaciones.

### A) Ecuaciones por descomposición factorial

Para resolver una ecuación del tipo $F_1(x)\cdot F_2(x)\cdot F_3(x)...=0$, donde $F_1(x)$, $F_2(x)$, $F_3(x)\ldots$ son expresiones algebraicas, se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1**. Se igualan a cero todos y cada uno de los factores, obteniéndose así tantas ecuaciones como factores hay.
**Paso 2**. Se resuelven todas y cada una de las ecuaciones por separado. Las soluciones obtenidas son todas las soluciones de la ecuación inicial.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0$, se hace lo siguiente:

$$(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x+3)=0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x+1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=-1 \\ \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=2 \\ \Rightarrow \quad x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=-3 \end{array} \right.$$

La ecuación **tiene tres soluciones**.

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $(x+1)\cdot(x-2)\cdot(2x-3)=0$, se hace lo siguiente:

$$x\cdot(x-2)\cdot(2x-3)=0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \\ \Rightarrow \quad x-2=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=2 \\ \Rightarrow \quad 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x_3=\dfrac{3}{2} \end{array} \right.$$

La ecuación **tiene tres soluciones**.

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $(x-1)\cdot(x^2+x+5)=0$, se hace lo siguiente:

$$(x-1)\cdot(x^2+x+5)=0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=1 \\ \Rightarrow \quad x^2+x+5=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{-1\pm\sqrt{-19}}{2} \end{array} \right.$$

La ecuación **tiene una solución**.

### B). Ecuaciones racionales

Una **ecuación racional** es aquella en la que la incógnita se encuentra en algún denominador. Su resolución se basa en la aplicación correcta de las operaciones con fracciones algebraicas. Hay que comprobar todas las soluciones ya que a veces se pueden introducir soluciones falsas.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $\dfrac{2x-1}{x^2+3x}=0$, se hace directamente $2x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=\dfrac{1}{2}$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $\dfrac{3}{x}=\dfrac{4x+5}{x+2}$, se hace lo siguiente:

$$3\cdot(x+2)=x\cdot(4x+5) \quad \Rightarrow \quad 3x+6=4x^2+5x \quad \Rightarrow \quad 0=4x^2+5x-3x-6 \quad \Rightarrow \quad 4x^2+2x-6=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot4\cdot(-6)}}{2\cdot4}=\frac{-2\pm\sqrt{4+96}}{8}=\frac{-2\pm10}{8} \left\langle \begin{array}{l} x_1=\dfrac{-2+10}{8}=\dfrac{8}{8}=1 \\ x_2=\dfrac{-2-10}{8}=\dfrac{-12}{8}=\dfrac{-3}{2} \end{array} \right.$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $\frac{x-1}{x+1}-\frac{3+x}{x-1}=2$, primero se calcula

m.c.m.(x+1, x–1) = (x+1) · (x–1)

$$\frac{(x-1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)}-\frac{(3+x)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x-1)}=\frac{2\cdot(x+1)\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot(x-1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (x-1)\cdot(x-1)-(3+x)\cdot(x+1)=2\cdot(x+1)\cdot(x-1) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1-(x^2+4x+3)=2\cdot(x^2-1) \quad \Rightarrow \quad x^2-2x+1-x^2-4x-3=2x^2-2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2-2x+1-x^2-4x-3=2x^2-2 \quad \Rightarrow \quad 0=2x^2-2-x^2+2x-1+x^2+4x+3 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+6x=0 \quad \Rightarrow \quad x\cdot(2x+6)=0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow \quad x=0 \quad \Rightarrow \quad x_1=0 \\ \Rightarrow \quad 2x+6=0 \quad \Rightarrow \quad x_2=-3 \end{array} \right.$$

**C) Ecuaciones irracionales**

Una **ecuación irracional** es aquella en la que la incógnita se encuentra bajo la influencia de alguna raíz. Para resolver una ecuación irracional se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1**. Se aísla la raíz cuadrada a un lado del signo igual, pasando todo lo que no tenga raíz cuadrada al lado contrario.

**Paso 2**. Se reducen términos, si fuera necesario, en el lado donde no se encuentra la raíz.

**Paso 3**. Se eleva al cuadrado a la izquierda y a la derecha del signo igual.

**Paso 4**. Se resuelve la ecuación resultante. Hay que comprobar todas las soluciones ya que en el paso anterior pudieron introducirse soluciones falsas.

Ejemplo: para resolver la ecuación $4+\sqrt{25-x^2}=x+3$, se hace lo siguiente:

$$\sqrt{25-x^2}=x+3-4 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{25-x^2}=x-1 \quad \Rightarrow \quad (\sqrt{25-x^2})^2=(x-1)^2 \quad \Rightarrow \quad 25-x^2=x^2-2x+1$$

$$\Rightarrow \quad 0=-25+x^2+x^2-2x+1 \quad \Rightarrow \quad 2x^2-2x-24=0 \quad \Rightarrow \quad x^2-x-12=0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x=\frac{+1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot1\cdot(-12)}}{2\cdot1}=\frac{1\pm\sqrt{1+48}}{2}=\frac{1\pm7}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1=\frac{1+7}{2}=4 \\ x_2=\frac{1-7}{2}=-3 \end{array} \right.$$

Comprobación: x = 4 sí es solución ya que $4+\sqrt{25-4^2}=4+3$

Comprobación: x = –3 no es solución ya que $4+\sqrt{25-(-3)^2}\neq-3+3$

## 4. Sistemas de ecuaciones lineales.

Una **ecuación lineal de primer grado con dos incógnitas** es una expresión algebraica del tipo $ax + by = c$, donde **a**, **b**, **c** $\in \mathbb{R}$.

Las letras **x**, **y** se llaman **incógnitas** y los números representados por las letras **a**, **b** se llaman **coeficientes**. El número representado por la letra **c** se llama término independiente.

Ejemplo: $3x - 7y = 1$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Se llama **solución** de la ecuación a una pareja de números que sustituidos en el lugar de las incógnitas, satisfacen la igualdad.

Ejemplo 1: $\{ x = 2, y = 1 \}$ es solución de la ecuación $2x + y = 5$ porque $2 \cdot 2 + 1 = 5$

Ejemplo 2: $\{ x = -1, y = 7 \}$ es otra solución de la ecuación $2x + y = 5$ porque $2 \cdot (-1) + 7 = 5$

Ejemplo 3: $\{ x = 3, y = 2 \}$ **no** es solución de la ecuación $2x + y = 5$ porque $2 \cdot 3 + 2 = \mathbf{8}$

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es una pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases} \quad \text{donde } \mathbf{a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2} \in \mathbb{R}.$$

Las letras **x**, **y** se llaman **incógnitas** y los números representados por las letras $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{b_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{b_2}$, se llaman **coeficientes**. Los números representados por las letras $\mathbf{c_1}$, $\mathbf{c_2}$ se llaman términos independientes.

Se llama **solución del sistema** a cualquier pareja de números que sustituidos de forma ordenada en el lugar de cada incógnita, satisfacen simultaneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1: $\{ x = 2, y = 1 \}$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$

Ejemplo 2: $\{ x = -1, y = 7 \}$ **no** es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 7 = 5 \\ -1 - 2 \cdot 7 = -15 \neq 0 \end{cases}$

**Resolver un sistema** significa hallar todas las soluciones posibles. Los métodos algebraicos de resolución de sistemas son tres: sustitución, igualación y reducción.

### a) Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y a continuación sustituir, entre paréntesis, la expresión resultante en la otra ecuación.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ por sustitución:

1º) Se despeja la incógnita **y** de la primera ecuación $\Rightarrow$ $y = 8 - 5x$

2º) Se sustituye $y = 8 - 5x$ en la segunda ecuación $\Rightarrow$ $3x + 2 \cdot (8 - 5x) = 11$

3º) Se resuelve la ecuación $3x + 2 \cdot (8 - 5x) = 11$ $\Rightarrow$ $x = 2$

4º) Se sustituye el valor obtenido $x = 2$ en $y = 8 - 5x$ $\Rightarrow$ $y = 8 - 5 \cdot 2 = 8 - 10 = -2$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 2, y = –2 }**

Nota: el método de sustitución es adecuado si alguno de los coeficientes del sistema es 1 ó –1.

**b) Método de igualación**

Consiste en despejar la misma incógnita de cada una de las dos ecuaciones y a continuación, igualar las expresiones resultantes.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} 5x + y = 8 \\ 3x - 2y = 10 \end{cases}$ por igualación:

1º) Se despeja la incógnita **x** de la primera ecuación $\Rightarrow \quad x = \dfrac{8-y}{5}$

2º) Se despeja la incógnita **x** de la segunda ecuación $\Rightarrow \quad x = \dfrac{10+2y}{3}$

3º) Se igualan las expresiones obtenidas $\Rightarrow \quad \dfrac{8-y}{5} = \dfrac{10+2y}{3}$

4º) Se resuelve la ecuación $\dfrac{8-y}{5} = \dfrac{10+2y}{3} \quad \Rightarrow \quad y = -2$

5º) Se sustituye el valor obtenido $y = -2$ en la expresión $x = \dfrac{8-y}{5} \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{8-(-2)}{5} = \dfrac{10}{5} = 2$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 2, y = –2 }**

**c) Método de reducción**

Consiste en multiplicar cada una de las dos ecuaciones por los números adecuados para que las ecuaciones resultantes tengan en común alguno de los dos términos y a continuación, restar ambas ecuaciones.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ por reducción:

1º) Se multiplica la primera ecuación por 4 $\Rightarrow \quad 20x - 12y = 200$

2º) Se multiplica la segunda ecuación por 5 $\Rightarrow \quad 20x + 5y = 115$

3º) Se restan las ecuaciones resultantes $\Rightarrow \quad -17y = 85$

4º) Se resuelve la ecuación $-17y = 85 \quad \Rightarrow \quad y = -5$

5º) Se sustituye el valor obtenido $y = -5$ en $5x - 3y = 50 \quad \Rightarrow \quad 5x + 15 = 50$ y $\Rightarrow \quad x = 7$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 7, y = –5 }**

## 5. Resolución gráfica de sistemas lineales.

Para resolver graficamente un sistema se aplican los siguientes pasos:

**Paso 1**. En un mismo sistema de coordenadas cartesianas en el plano, se representan graficamente las rectas asociadas respectivamente a cada una de las ecuaciones.

**Paso 2**. Una vez realizado el paso anterior, se pueden dar tres casos:

Caso 1. **Si las dos rectas se cortan en un punto** de coordenadas (a, b), entonces el sistema tiene solución única (S.C.D.) y ésta es { x = a, y = b }.

Caso 2. **Si las dos rectas son paralelas**, entonces el sistema no tiene solución (S.I.).

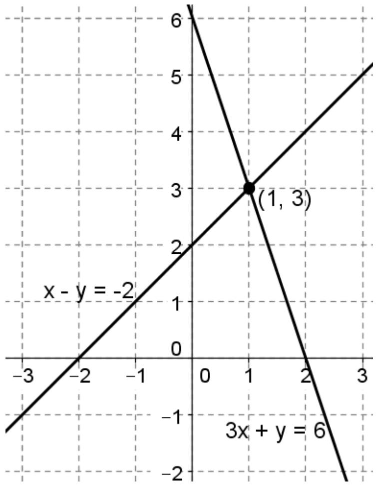
Caso 3. **Si las dos rectas coinciden**, entonces el sistema tiene infinitas soluciones (S.C.I.).

Ejemplo 1: para resolver graficamente el sistema $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$ se representan en un mismo sistema de coordenadas las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones, respectivamente.

Para representar la recta asociada a la ecuación $3x + y = 6$, se construye una tabla de valores:

Para $y = 0 \;\Rightarrow\; 3x + 0 = 6 \;\Rightarrow\; x = 2$
Para $x = 0 \;\Rightarrow\; 3 \cdot 0 + y = 6 \;\Rightarrow\; y = 6$

| x | y |
|---|---|
| 2 | 0 |
| 0 | 6 |




Para representar la recta asociada a la ecuación $x - y = -2$, se construye una tabla de valores:

Para $y = 0 \;\Rightarrow\; x - 0 = -2 \;\Rightarrow\; x = -2$
Para $x = 0 \;\Rightarrow\; 0 - y = -2 \;\Rightarrow\; y = 2$

| x | y |
|---|---|
| −2 | 0 |
| 0 | 2 |

Como las rectas se cortan en el punto de coordenadas (1, 3), la solución del sistema es **{ x = 1, y = 3 }**

Nota: a priori, un estudio de los coeficientes del sistema permite averiguar si el sistema tiene una sola solución (**sistema compatible determinado**). S.C.D. $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

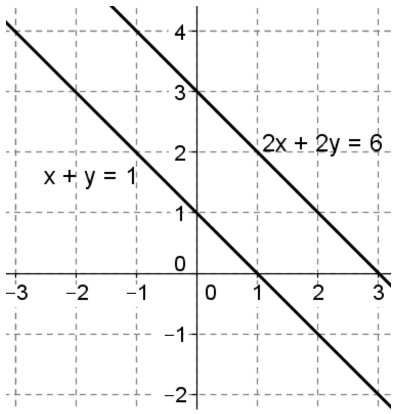
Ejemplo: el sistema $\begin{cases} 3x + y = 6 \\ x - y = -2 \end{cases}$ tiene una sola solución (S.C.D.) porque $\dfrac{3}{1} \neq \dfrac{1}{-1}$

Ejemplo 2: para resolver graficamente el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ se representan en un mismo sistema de coordenadas las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones, respectivamente.

Para representar la recta asociada a la ecuación $x + y = 1$, se construye una tabla de valores:

Para $y = 0 \;\Rightarrow\; x + 0 = 1 \;\Rightarrow\; x = 1$
Para $x = 0 \;\Rightarrow\; 0 + y = 1 \;\Rightarrow\; y = 1$

| x | y |
|---|---|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |




Para representar la recta asociada a la ecuación $2x + 2y = 6$, se construye una tabla de valores:

Para $y = 0 \;\Rightarrow\; 2x + 2 \cdot 0 = 6 \;\Rightarrow\; x = 3$
Para $x = 0 \;\Rightarrow\; 2 \cdot 0 + 2y = 6 \;\Rightarrow\; y = 3$

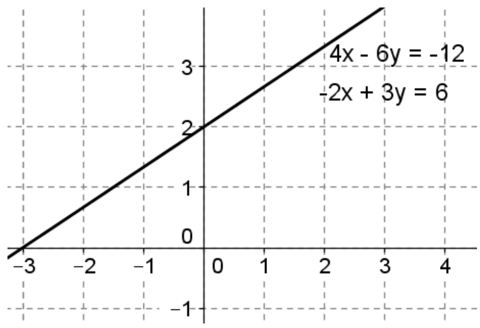
| x | y |
|---|---|
| 3 | 0 |
| 0 | 3 |

Como las dos rectas son paralelas, el sistema **no tiene solución**.

Nota: a priori, un estudio de los coeficientes del sistema permite averiguar si el sistema no tiene solución (**sistema incompatible**). S.I. $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

Ejemplo: el sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases}$ no tiene solución (S.I.) porque $\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \neq \dfrac{1}{6}$

Ejemplo 3: para resolver graficamente el sistema $\begin{cases} -2x+3y=6 \\ 4x-6y=-12 \end{cases}$ se representan en un mismo sistema de coordenadas las rectas asociadas a cada una de las ecuaciones, respectivamente.




Para representar la recta asociada a la ecuación $-2x+3y=6$, se construye una tabla de valores:

Para y = 0 $\Rightarrow$ $-2x+3\cdot 0=6$ $\Rightarrow$ $x=-3$
Para x = 0 $\Rightarrow$ $-2\cdot 0+3y=6$ $\Rightarrow$ $y=2$

| x | y |
|---|---|
| −3 | 0 |
| 0 | 2 |

Para representar la recta asociada a la ecuación $4x-6y=-12$, se construye una tabla de valores:

Para y = 0 $\Rightarrow$ $4x-6\cdot 0=-12$ $\Rightarrow$ $x=-3$
Para x = 0 $\Rightarrow$ $4\cdot 0-6y=-12$ $\Rightarrow$ $y=2$

| x | y |
|---|---|
| −3 | 0 |
| 0 | 2 |

Como las dos rectas coinciden, el sistema tiene **infinitas soluciones**. Las infinitas soluciones del sistema son todos los puntos que forman la recta.

Nota: a priori, un estudio de los coeficientes del sistema permite averiguar si el sistema tiene infinitas soluciones (**compatible indeterminado**). S.C.I. $\Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}$

Ejemplo: el sistema $\begin{cases} -2x+3y=6 \\ 4x-6y=-12 \end{cases}$ tiene infinitas soluciones (S.C.I.) porque $\frac{-2}{4}=\frac{3}{-6}=\frac{6}{-12}$

## 6. Resolución de problemas.

**Problema 1. La suma de dos números es 16 y su diferencia es 4. Hallarlos.**

Se llaman **x** e **y** a los números que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x+y=16 \\ x-y=4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ { x = 10, y = 6 }

Respuesta: los números son 10 y 6.

**Problema 2. Descomponer 33 en dos sumandos de modo que dos quintos del primero más un tercio del segundo sea igual a 12.**

Se llaman **x** e **y** a los dos sumandos de la descomposición de 33 que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=33 \\ \frac{2x}{5}+\frac{1y}{3}=12 \end{cases}$

Se resuelve el sistema equivalente $\begin{cases} x+y=33 \\ 6x+5y=180 \end{cases}$ $\Rightarrow$ { x = 15, y = 18 }

Respuesta: los dos sumandos son 15 y 18.

**Problema 3. En un corral hay conejos y gallinas. En total, hay 25 cabezas y 80 patas. Calcula el número de animales de cada clase.**

Se llaman **x** al número de conejos e **y** al número de gallinas.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x + y = 25 \\ 4x + 2y = 80 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 15, y = 10 \}$

Respuesta: 15 conejos y 10 gallinas.

**Problema 4. Dos artículos valen juntos 376 €. Uno de ellos cuesta 124 € más que el otro. ¿Cuánto vale cada artículo?**

Se llaman **x** al precio de un artículo e **y** al precio del otro.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x + y = 376 \\ x = y + 124 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 250, y = 126 \}$

Respuesta: un artículo cuesta 250 € y el otro 126 €.

**Problema 5. Un comerciante tiene garbanzos de dos clases: la clase A a 0,5 €/kg y la clase B a 0,4 €/kg. Quiere vender 100 kg de mezcla a 0,48 €/kg. ¿Cuántos kg tiene que tomar de cada clase?**

Se llaman **x** al número de kg de la clase A e **y** al número de kg de la clase B.

Se traduce el enunciado a un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}5x + 0{,}4y = 48 \end{cases}$

| | |
|---|---|
| Coste de **x** kg de la clase A | $0{,}5 \cdot x$ (en €) |
| Coste de **y** kg de la clase B | $0{,}4 \cdot y$ (en €) |
| Coste de 100 kg de mezcla | $0{,}48 \cdot 100 = 48$ € |

Se resuelve el sistema $\begin{cases} x + y = 100 \\ 0{,}5x + 0{,}4y = 48 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 80, y = 20 \}$

Respuesta: 80 kg de la clase A y 20 kg de la clase B.

## 7. Sistemas no lineales.

Un **sistema de ecuaciones es no lineal** si al menos una de las ecuaciones no es de la forma ax + by = c.

Ejemplo 1: para resolver el sistema $\begin{cases} 3x^2 - 2y = 9 \\ 5x - y = -2 \end{cases}$ se procede de la manera siguiente:

1º) Se despeja $y = 5x + 2$ de la 2ª ecuación

2º) Se sustituye $y = 5x + 2$ en la 1ª ecuación:

$$3x^2 - 2\cdot(5x+2) = 9 \quad\Rightarrow\quad 3x^2 - 10x - 4 = 9 \quad\Rightarrow\quad 3x^2 - 10x - 13 = 0 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{10 \pm \sqrt{10^2 - 4\cdot 3\cdot(-13)}}{2\cdot 3} = \frac{10 \pm \sqrt{100+156}}{6} = \frac{10 \pm 16}{6} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{10+16}{6} = \frac{13}{3} \\ \\ x_2 = \frac{10-16}{6} = -1 \end{array} \right.$$

3º) Si $x_1 = \frac{13}{3}$, entonces $y_1 = 5\cdot\frac{13}{3} + 2 = \frac{71}{3}$

Si $x_2 = -1$, entonces $y_2 = 5\cdot(-1) + 2 = -3$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{x_1 = \frac{13}{3},\ y_1 = \frac{71}{3}\}$ ; $\{x_2 = -1,\ y_2 = -3\}$

Ejemplo 2: para resolver el sistema $\begin{cases} 2x - y = 9 \\ \sqrt{x+y} + y = x \end{cases}$ se procede de la manera siguiente:

1º) Se despeja $y = 2x - 9$ de la 1ª ecuación

2º) Se sustituye $y = 2x - 9$ en la 2ª ecuación:

$$\sqrt{x + 2x - 9} + 2x - 9 = x \quad\Rightarrow\quad \sqrt{x+2x-9} = x - 2x + 9 \quad\Rightarrow\quad \sqrt{3x-9} = -x + 9 \quad\Rightarrow$$

$$(\sqrt{3x-9})^2 = (-x+9)^2 \quad\Rightarrow\quad 3x - 9 = x^2 - 18x + 81 \quad\Rightarrow\quad 0 = x^2 - 21x + 90 \quad\Rightarrow$$

$$x = \frac{21 \pm \sqrt{(-21)^2 - 4\cdot 1\cdot 90}}{2\cdot 1} = \frac{21 \pm \sqrt{441-360}}{2} = \frac{21 \pm 9}{2} \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{21+9}{2} = \frac{30}{2} = 15 \\ \\ x_2 = \frac{21-9}{2} = \frac{12}{2} = 6 \end{array} \right.$$

3º) Si $x_1 = 15$, entonces $y_1 = 2\cdot 15 - 9 = 21$

Si $x_2 = 6$, entonces $y_2 = 2\cdot 6 - 9 = 3$

Por lo tanto, las soluciones del sistema son $\{x_1 = 15,\ y_1 = 21\}$ ; $\{x_2 = 6,\ y_2 = 3\}$

Ejemplo 3: para resolver el sistema $\begin{cases} 3x \cdot y = -6 \\ x - 2y = 4 \end{cases}$ se procede de la manera siguiente:

1º) Se despeja $x = 4 + 2y$ de la 2ª ecuación

2º) Se sustituye $x = 4 + 2y$ en la 1ª ecuación:

$$3 \cdot (4 + 2y) \cdot y = -6 \quad \Rightarrow \quad 6y^2 + 12y + 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad y^2 + 2y + 1 = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad y = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4}}{2} = \frac{-2 \pm 0}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

3º) Si $y = -1$, entonces $x = 4 + 2 \cdot (-1) = 2$

Por lo tanto, la única solución del sistema es $\{x = 2,\ y = -1\}$

## 8. Resolución de problemas.

**Problema 1. Hallar dos números cuya diferencia sea 8 y cuyo producto sea 105.**

Se llaman **x** e **y** a los números que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x - y = 8 \\ x \cdot y = 105 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 15,\ y = 7 \}$

Respuesta: los números son 15 y 7.

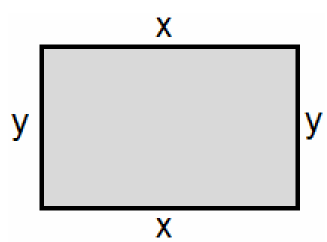
**Problema 2. La suma de los cuadrados de dos números naturales es 117 y la diferencia de sus cuadrados es 45. ¿Cuáles son los números?**

Se llaman **x** e **y** a los números que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x^2 + y^2 = 117 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 9,\ y = 6 \}$

Respuesta: los números son 9 y 6.

**Problema 3. Un jardín de forma rectangular tiene 600 m² de superficie y su perímetro mide 100 m. ¿Cuáles son sus lados?**




Se llaman **x** e **y** al largo y ancho, respectivamente del jardín.

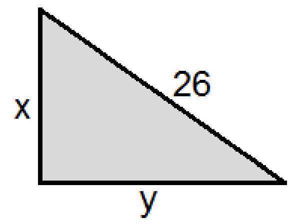
Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve:

$\begin{cases} x \cdot y = 600 \\ x + y = 50 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 30,\ y = 20 \}$

Respuesta: 30 m de largo por 20 m de ancho.

**Problema 4. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 26 m y la suma de los catetos es 34 m. Hallar la longitud de los catetos.**

Se llaman **x** e **y** a cada uno de los catetos del triángulo rectángulo.



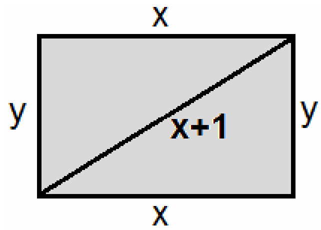

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 26^2 \\ x + y = 34 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 24,\ y = 10 \}$$

Respuesta: los catetos miden 24 m y 10 m respectivamente.

**Problema 5. La diagonal de un rectángulo mide 1 cm más que uno de los lados. Calcula las dimensiones del rectángulo sabiendo que su perímetro es 34 cm.**

Se llaman **x** e **y** al largo y ancho, respectivamente, del rectángulo.




En consecuencia, la diagonal del rectángulo sería **x+1** (ó **y+1**)

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (x+1)^2 \\ x + y = 17 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 12,\ y = 5 \}$$

Respuesta: 12 m de largo por 5 m de ancho.

**Problema 6. Una madre reparte entre sus hijos 24 monedas de euro en partes iguales. Si fuesen 2 hijos menos, recibiría cada uno 2 monedas más. ¿Cuál es el número de hijos?**

Se llaman **x** al número de hijos e **y** al número de monedas que recibe cada uno.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x \cdot y = 24 \\ (x-2)\cdot(y+2) = 24 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 6,\ y = 4 \}$

Respuesta: son 6 hijos y reciben 4 monedas de euro cada uno.