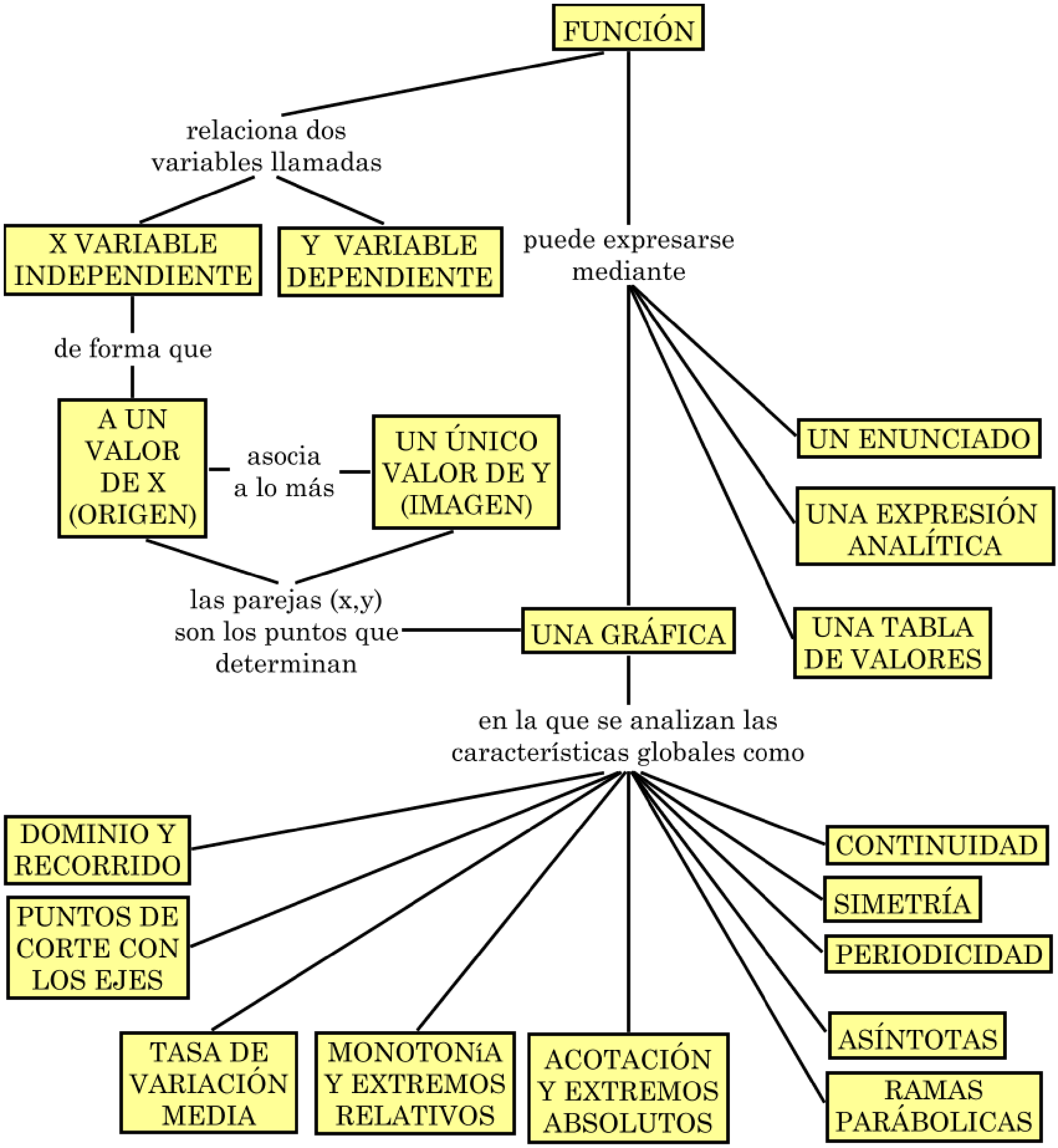
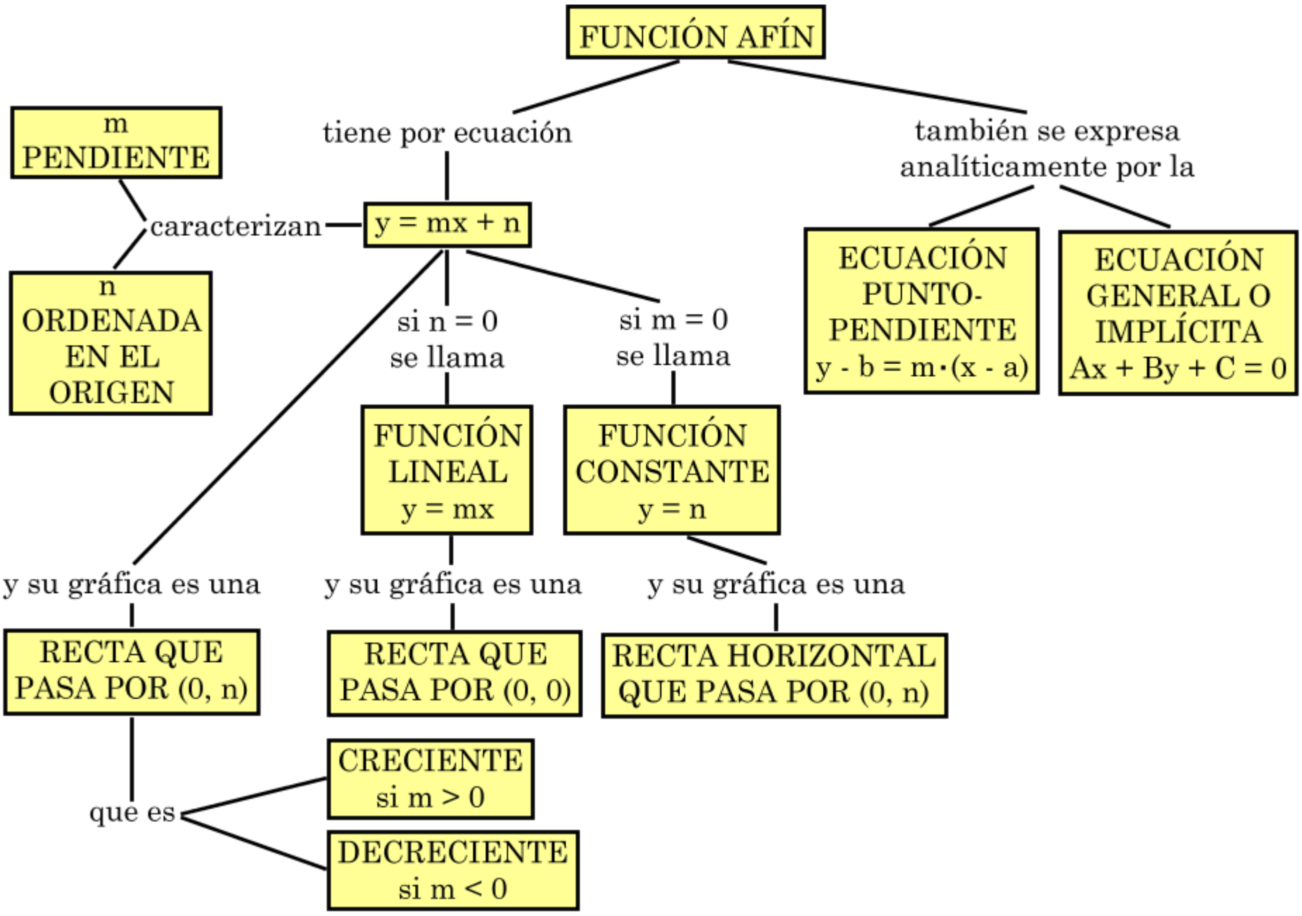
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

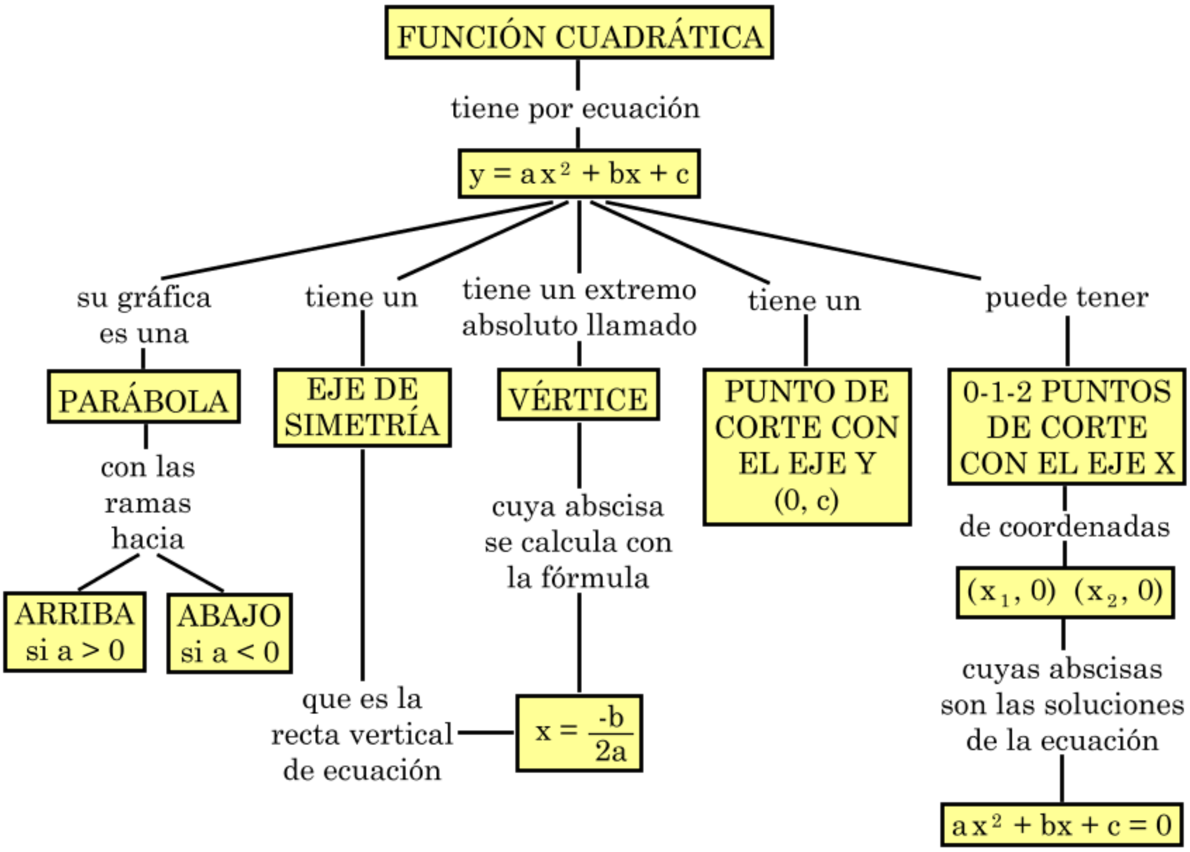
MATEMÁTICAS DE 3ºESO.

UNIDAD 6. FUNCIONES.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD




FUNCIÓN AFÍN
tiene por ecuación
y = mx + n
m PENDIENTE
n ORDENADA EN EL ORIGEN
caracterizan
también se expresa analíticamente por la
ECUACIÓN PUNTO-PENDIENTE y - b = m·(x - a)
ECUACIÓN GENERAL O IMPLÍCITA Ax + By + C = 0
si n = 0 se llama
FUNCIÓN LINEAL y = mx
si m = 0 se llama
FUNCIÓN CONSTANTE y = n
y su gráfica es una
RECTA QUE PASA POR (0, n)
y su gráfica es una
RECTA QUE PASA POR (0, 0)
y su gráfica es una
RECTA HORIZONTAL QUE PASA POR (0, n)
que es
CRECIENTE si m > 0
DECRECIENTE si m < 0

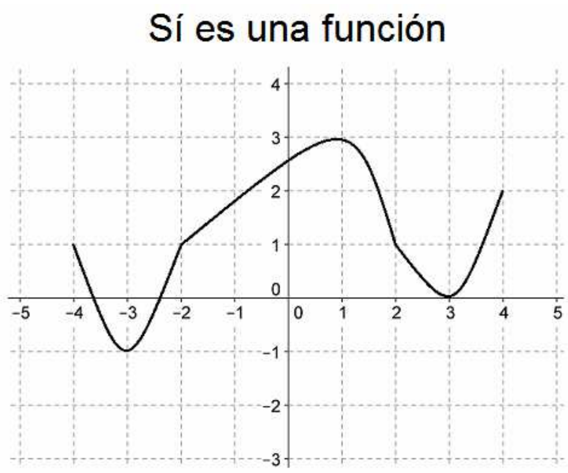

FUNCIÓN CUADRÁTICA
tiene por ecuación
y = ax² + bx + c
su gráfica es una
PARÁBOLA
con las ramas hacia
ARRIBA si a > 0
ABAJO si a < 0
tiene un
EJE DE SIMETRÍA
que es la recta vertical de ecuación
tiene un extremo absoluto llamado
VÉRTICE
cuya abscisa se calcula con la fórmula
x = -b/2a
tiene un
PUNTO DE CORTE CON EL EJE Y (0, c)
puede tener
0-1-2 PUNTOS DE CORTE CON EL EJE X
de coordenadas
(x1, 0) (x2, 0)
cuyas abscisas son las soluciones de la ecuación
ax² + bx + c = 0

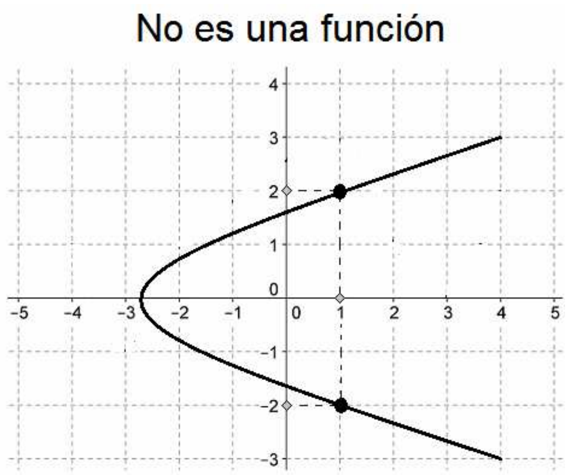
1. Concepto de función.

Una **función** es una relación de dependencia entre dos magnitudes variables **x** e **y**, de tal forma que a cada valor de la variable **x** le corresponde **a lo más**, **un único valor** de la variable **y**.

La variable **x** se llama **variable independiente.**
La variable **y** se llama **variable dependiente**.

Una función f se representa por **y = f(x)**.
Se dice que **y** depende de **x**, o que **y** está en función de **x**.

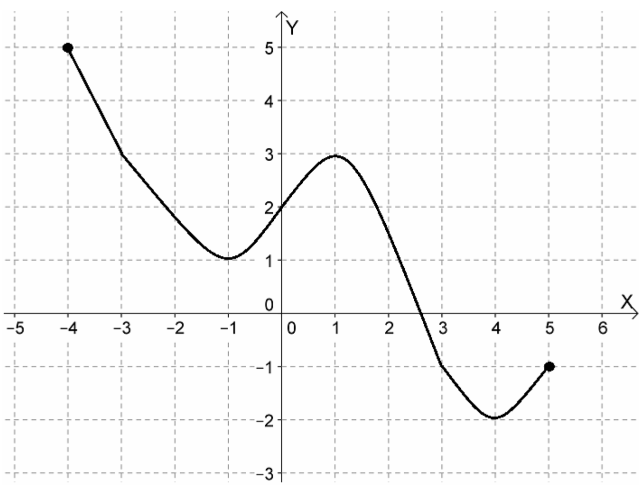




Se llama **imagen** de un valor de la variable **x** al único valor de la variable **y** asociado mediante la función. Si el número **b** es la imagen del número **a**, se escribe **f(a) = b**

Se llama **origen** de un valor de la variable **y** al valor o valores de la variable **x** asociado(s) mediante la función. Si el número **a** es origen del número **b,** se escribe $f^{-1}(b) = a$

Ejemplo:



La imagen de –3 es 3. Se escribe f(–3) = 3
El origen de 3 es –3. Se escribe $f^{-1}(3) = -3$

La imagen de 0 es 2. Se escribe f(0) = 2
El origen de 2 es 0. Se escribe $f^{-1}(2) = 0$

La imagen de 3 es –1. Se escribe f(3) = –1
Los orígenes de –1 son 3 y 5.
Se escribe $f^{-1}(-1) = \{3, 5\}$

La imagen de 4 es –2. Se escribe f(4) = –2
El origen de –2 es 4. Se escribe $f^{-1}(-2) = 4$

Hay valores de **x** que no tienen imagen: por ejemplo, el 6 no tiene imagen.

Hay valores de **y** que no tienen origen: por ejemplo, el –3 no tiene origen.

Expresión analítica de una función

La **expresión analítica** de una función es la ecuación que expresa algebraicamente la dependencia entre las variables **x** e **y**.

Ejemplos: $y = x^2$ $\quad y = 5x + 30$ $\quad f(x) = 2x^3 - 4x + 5$ $\quad g(x) = x^2 - x$

La expresión analítica no siempre se ofrece como dato. En ocasiones, tiene que ser deducida a partir de la información contenida en el enunciado.

Con la expresión analítica se puede construir una **tabla de valores** de la función, calculando las imágenes de valores cualesquiera de la variable independiente **x**.

Ejemplo: en la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$, la imagen de 2 es –1 ya que $f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	15	8	3	0	–1	0	3

Con la expresión analítica también se puede **averiguar el origen de** cualquier valor **b** de la variable dependiente, planteando y resolviendo la ecuación $f(x) = b$

Ejemplo: en la función $f(x) = -3x + 1$, para hallar el origen de 7 hay que encontrar un número cuya imagen sea 7, es decir, averiguar el valor de x en la ecuación $f(x) = 7$

$$f(x) = 7 \quad \Rightarrow \quad -3x + 1 = 7 \quad \Rightarrow \quad -3x = 7 - 1 \quad \Rightarrow \quad -3x = 6 \quad \Rightarrow \quad x = -2$$

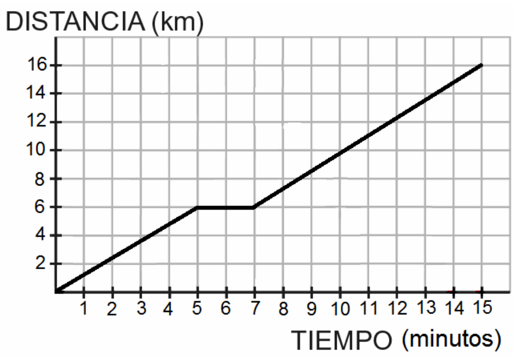
Por lo tanto, el origen de 7 es –2. Se escribe $f^{-1}(7) = -2$

2. Dominio y recorrido de una función.

Dominio de una función f es el conjunto de valores de **x** que tienen imagen. Se representa por **Dom(f)**. Graficamente, **Dom(f)** es la **proyección de su gráfica sobre el eje X**.

Recorrido de una función f es el conjunto de valores de **y** que son imágenes de algún valor del dominio. Se representa por **Rec(f)**. Graficamente, **Rec(f)** es la **proyección de su gráfica sobre el eje Y**.
Al recorrido también se le llama **conjunto imagen**. En este caso se representa por **Im(f)**.

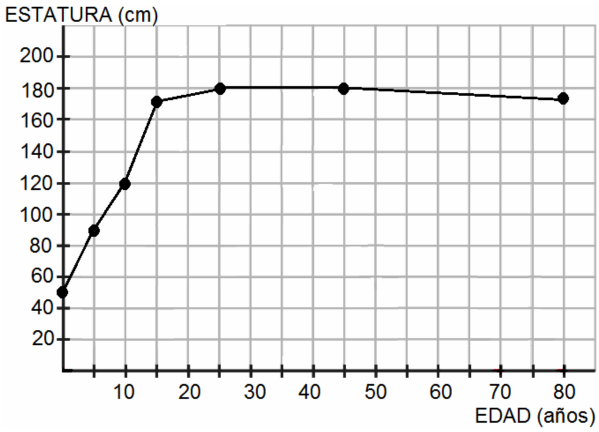
Ejemplo 1:



Tiempo x	0	5	6	7	10	12	15
Distancia y	0	6	6	6	10	12	16

Dom(f) = [0, 15] Rec(f) = [0, 16]

Ejemplo 2:



Edad x	Estatura y
0	50
5	90
10	120
15	175
20	178
25	180
80	175

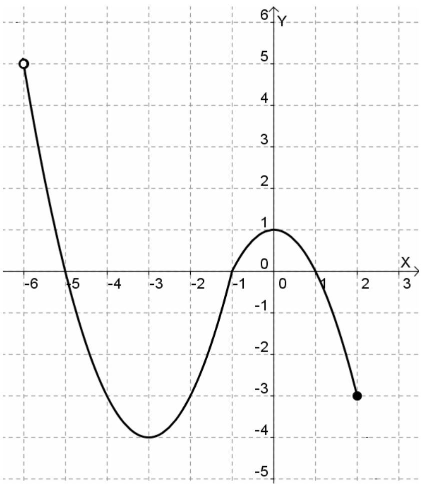
Dom(f) = [0, 80]   Rec(f) = [50, 180]

3. Puntos de corte de una gráfica con los ejes.

Los **puntos de corte con el eje X**, si existen, son los puntos de la gráfica cuya segunda coordenada (ordenada) es cero, es decir, los puntos de la forma **(x, 0)**

El **punto de corte con el eje Y**, si existe, es el punto de la gráfica cuya primera coordenada (abscisa) es cero, es decir, el punto de la forma **(0, y)**

Ejemplo 1:



x	–6	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2
y		0	–3	–4	–3	0	1	0	–3

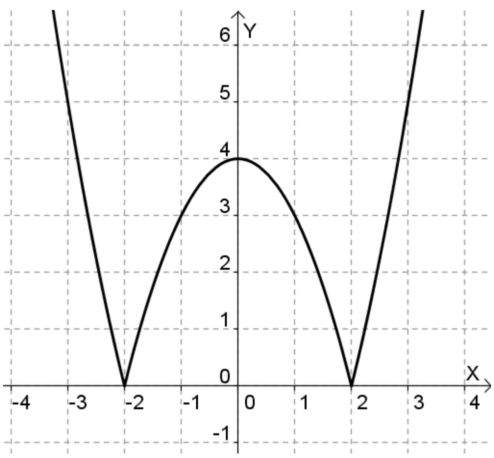
Dom(f) = (–6, 2]

Rec(f) = [–4, 5)

Puntos de corte con el eje X: (–5, 0), (–1, 0), (1, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 1)

Ejemplo 2:



x	–3	–2	–1	0	1	2	3
y	5	0	3	4	3	0	5

Dom(f) = (–∞, +∞) = ℝ

Rec(f) = [0, +∞)

Puntos de corte con el eje X: (–2, 0), (2, 0)

Punto de corte con el eje Y: (0, 4)

4. Monotonía. Extremos. Acotación.

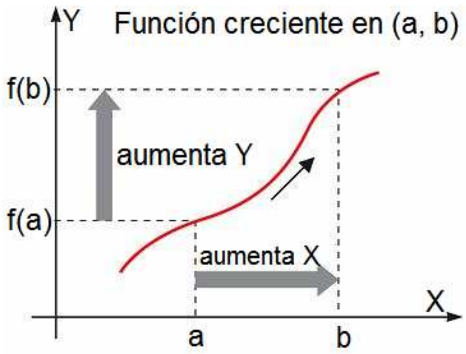
Monotonía y extremos relativos

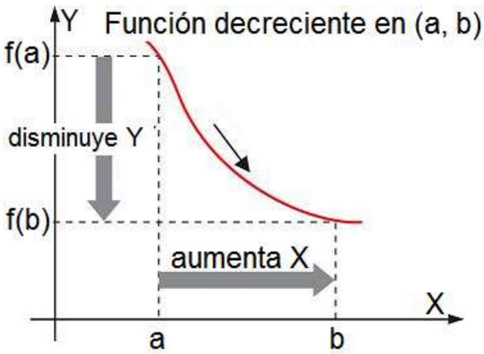
Analizar la **monotonía** de una función equivale a indicar los **intervalos del eje X** en los que la función es creciente, decreciente o constante.

– Si al aumentar la variable **x** en un intervalo I, también **aumenta** la variable **y**, entonces la función es **creciente** en el intervalo I.

– Si al aumentar la variable **x** en un intervalo I, **disminuye** la variable **y**, entonces la función es **decreciente** en el intervalo I.

– Si al aumentar la variable **x** en un intervalo I, **no aumenta ni disminuye** la variable **y**, entonces la función es **constante** en el intervalo I.

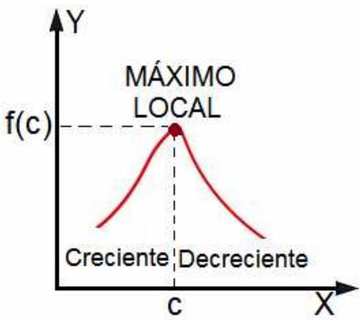


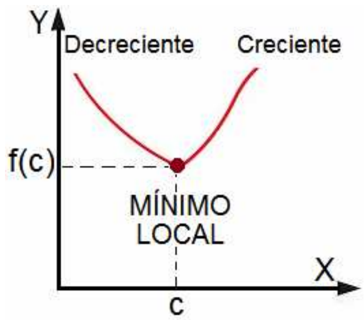


Analizar los **extremos relativos** de una función equivale a indicar los **puntos de su gráfica** que son máximos o mínimos relativos.

– Una función tiene en un punto (c, f(c)) **un máximo relativo si f(c) > f(x)** para todo valor de x perteneciente a un entorno de c.

– Una función tiene en un punto (c, f(c)) **un mínimo relativo si f(c) < f(x)** para todo valor de x perteneciente a un entorno de c.





Extremos absolutos y acotación

Analizar los **extremos absolutos** de una función equivale a indicar los **puntos de su gráfica** que son máximos o mínimos absolutos.

– Una función alcanza en un punto (c, f(c)) **un máximo absoluto si f(c) > f(x)** para todo valor de x perteneciente al dominio de f.

– Una función alcanza en un punto (c, f(c)) **un mínimo absoluto si f(c) < f(x)** para todo valor de x perteneciente al dominio de f.

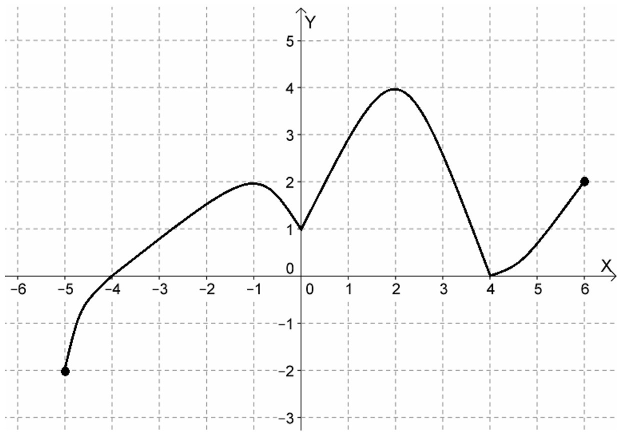
– Una función f está **acotada inferiormente** si $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \geq k$, $\forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$

Al número real **k** se le llama **cota inferior** de la función. Si una función alcanza el **mínimo absoluto**, está acotada inferiormente por dicho valor.

– Una función f está **acotada superiormente** si $\exists\, k \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) \leq k$, $\forall\, x \in \mathrm{Dom}(f)$

Al número real **k** se le llama **cota superior** de la función. Si una función alcanza el **máximo absoluto**, está acotada superiormente por dicho valor.

Ejemplo 1:



Dom(f) = [–5, 6]   Rec(f) = [–2, 4]

f es creciente en (–5, –1), en (0, 2) y en (4, 6)

f es decreciente en (–1, 0) y en (2, 4)

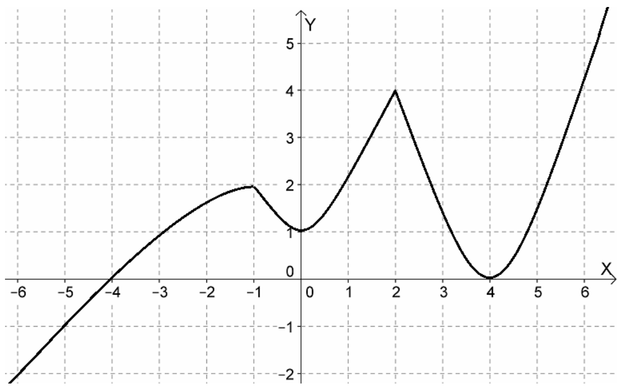
Máximos relativos: los puntos (–1, 2) y (2, 4)

Mínimos relativos: los puntos (0, 1) y (4, 0)

Máximo absoluto: el punto (2, 4)

Mínimo absoluto: el punto (–5, –2)

Ejemplo 2:



Dom(f) = (–∞,+∞)   Rec(f) = (–∞,+∞)

f es creciente en (–∞, –1), en (0, 2) y en (4, +∞)

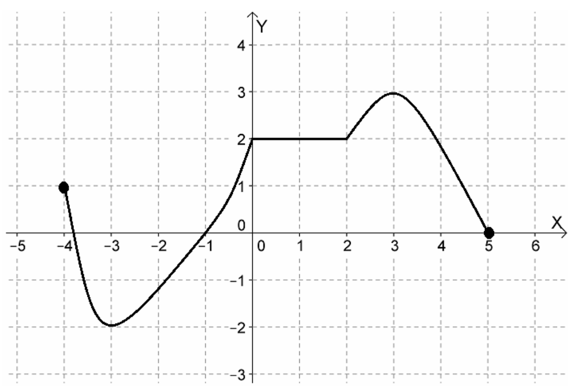
f es decreciente en (–1, 0) y en (2, 4)

Máximos relativos: los puntos (–1, 2) y (2, 4)

Mínimos relativos: los puntos (0, 1) y (4, 0)

f no tiene extremos absolutos

Ejemplo 3:



Dom(f) = [–4, 5]   Rec(f) = [–2, 3]

f es creciente en (–3, 0) y en (2, 3)

f es constante en (0, 2)

f es decreciente en (–4, –3) y en (3, 5)

Máximos relativos: los puntos (0, 2) y (3, 3)

Mínimos relativos: los puntos (–3, –2) y (2, 2)

Máximo absoluto: el punto (3, 3)

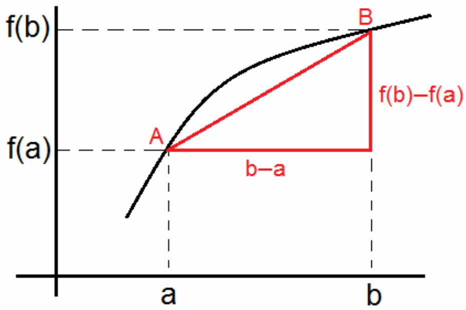
Mínimo absoluto: el punto (–3, –2)

5. Tasa de variación media.

La **Tasa de Variación Media de una función f en un intervalo [a, b]** es el cociente

$$\text{TVM}\,[a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

La TVM de una función en [a, b] es una medida del cambio por término medio experimentado por la función en dicho intervalo.



– Si la TVM de f en [a, b] es **positiva**, entonces f ha aumentado por término medio en (a, b).
– Si la TVM de f en [a, b] es **negativa**, entonces f ha disminuido por término medio en (a, b).

Obsérvese que si la variable **X** es el tiempo y la variable **Y** es el espacio recorrido por un objeto, la TVM es la velocidad media del mismo en un intervalo de tiempo.

Graficamente, la TVM de una función en [a, b] es la pendiente del segmento AB.

Ejemplo: la tasa de variación media de la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [2, 5] es

$$\text{TVM}\,[2, 5] = \frac{f(5) - f(2)}{5 - 2} = \frac{25 - 4}{5 - 2} = \frac{21}{3} = 7$$

Esto significa que, en el intervalo [2, 5], la variable **Y** ha aumentado por término medio (en promedio), siete unidades por cada unidad de **X**.

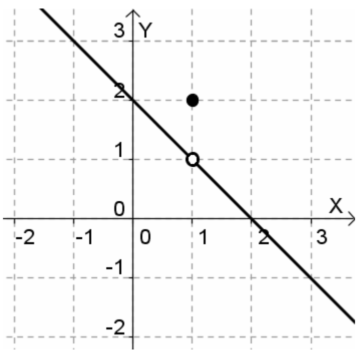
6. Continuidad de una función en un punto.

Se dice que una función es **discontinua en un punto** si su gráfica presenta una interrupción en el trazado por dicho punto. A dicha interrupción se le llama **discontinuidad**.

Una discontinuidad puede ser de tres tipos: discontinuidad **evitable**, discontinuidad **de salto finito** y discontinuidad **de salto infinito**.

Por el contrario, se dice que una función es **continua en un punto** si el trazado de la gráfica en dicho punto no presenta interrupción.

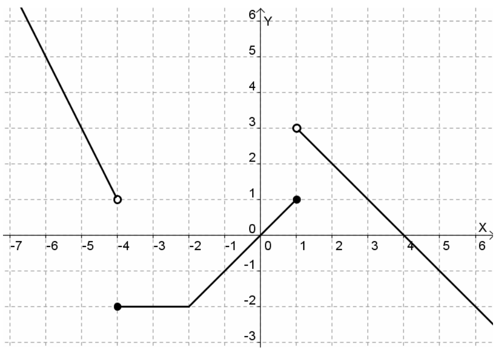
Ejemplo 1:



Esta función tiene una discontinuidad evitable en x = 1

Es continua en (–∞, 1) y en (1, +∞)

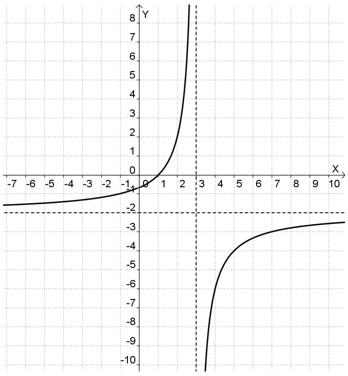
Ejemplo 2:



Esta función tiene dos discontinuidades de salto finito: una en x = –4 y otra en x = 1

Es continua en (–∞, –4), en (–4, 1) y en (1, +∞)

Ejemplo 3:



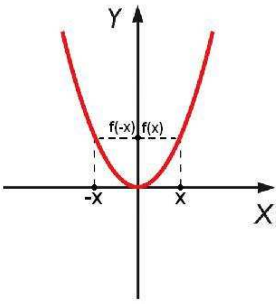
Esta función tiene una discontinuidad de salto infinito en x = 3

Es continua en $(-\infty, 3)$ y en $(3, +\infty)$

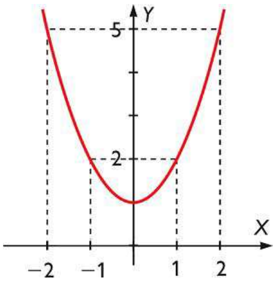
7. Simetría en la gráfica de una función.

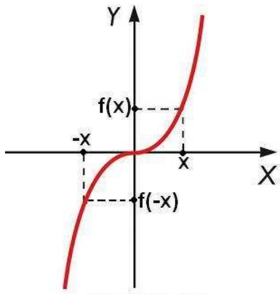
Si la gráfica de una función es **simétrica respecto del eje Y**, se dice que es una función **par**.

Si la gráfica de una función es **simétrica respecto del origen de coordenadas**, se dice que es un función **impar**.

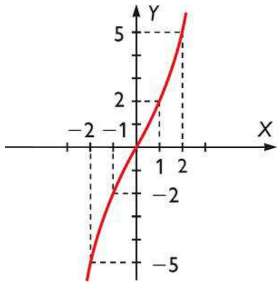


Función par





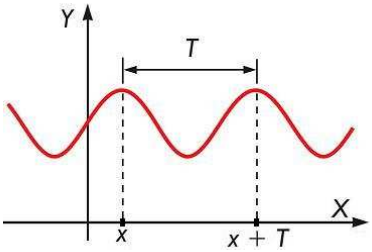
Función impar



Ejemplo: las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = x^4, \ldots$ son ejemplos de funciones pares. Por otro lado, las funciones $f(x) = x^3$, $g(x) = x^5, \ldots$ son ejemplos de funciones impares.

8. Funciones periódicas.

Una función se dice que es **periódica de periodo T** si $f(x) = f(x + k \cdot T), \forall x \in Dom(f), \forall k \in \mathbb{Z}$

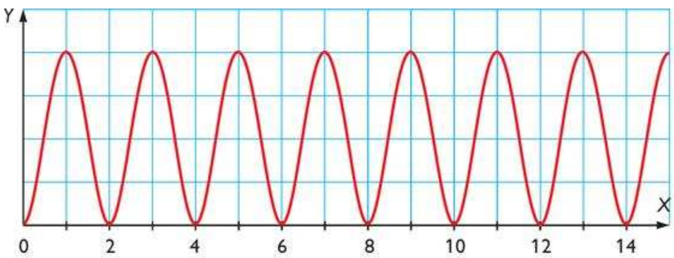


En la gráfica de una función periódica hay un patrón que se repite cada vez que la variable independiente **x** recorre un intervalo de amplitud T.

Por ello, conocido el valor de la función en un intervalo de amplitud T, se puede dibujar el resto de la gráfica trasladándola a derecha e izquierda por todo el dominio de la función.

Ejemplo: esta función es periódica de periodo 2 ya que

$f(x) = f(x + 2k), \forall x \in Dom(f), \forall k \in \mathbb{Z}$



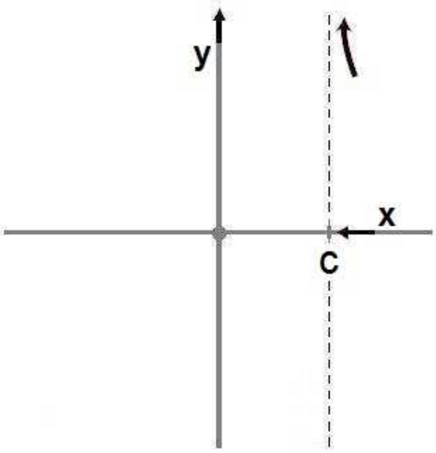
9. Tendencias de una función.

NOTACIÓN	CÓMO SE LEE	SIGNIFICADO
$x \to +\infty$	**x** tiende a más infinito	**La variable x** toma valores cada vez mayores con signo **positivo**, superando a cualquier valor por grande que sea.
$x \to -\infty$	**x** tiende a menos infinito	**La variable x** toma valores cada vez menores con signo **negativo**, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea.
$x \to c^+$	**x** tiende al número **c** por la derecha	**La variable x** toma valores **mayores que c**, cada vez más próximos al número real **c**.
$x \to c^-$	**x** tiende al número **c** por la izquierda	**La variable x** toma valores **menores que c**, cada vez más próximos al número real **c**.

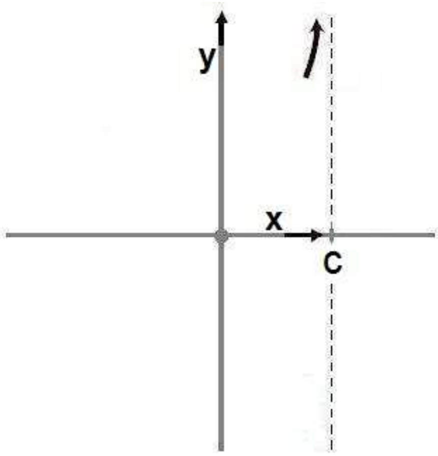
$y \to +\infty$	**y** tiende a más infinito	**La variable y** (imagen de x) toma valores cada vez mayores con signo **positivo**, superando a cualquier valor por grande que sea.
$y \to -\infty$	**y** tiende a menos infinito	**La variable y** (imagen de x) toma valores cada vez menores con signo **negativo**, superando a cualquier valor por pequeño (negativo) que sea.
$y \to k$	**y** tiende al número **k**	**La variable y** (imagen de x) toma valores cada vez más próximos al número real **k**.

1) Se dice que **la recta x = c es asíntota vertical de una función** y = f(x) si ocurre alguna de las cuatro situaciones siguientes:

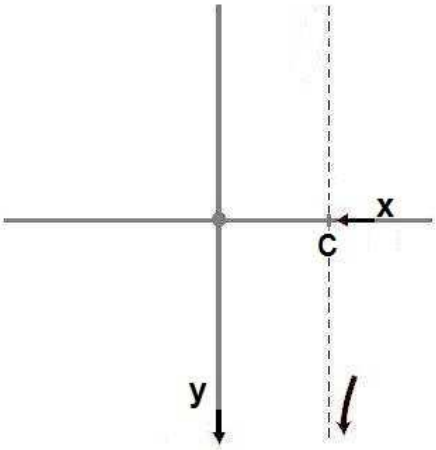
1.1) **Si $x \to c^+$, entonces $y \to +\infty$**



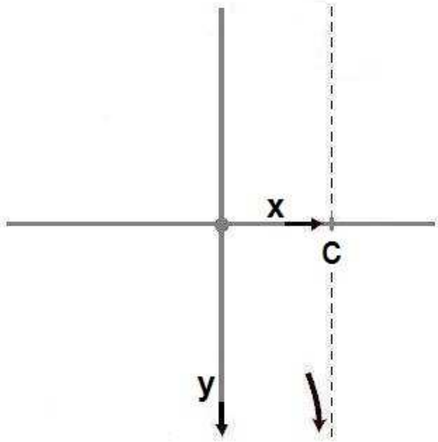
1.2) **Si $x \to c^-$, entonces $y \to +\infty$**



1.3) **Si $x \to c^+$, entonces $y \to -\infty$**

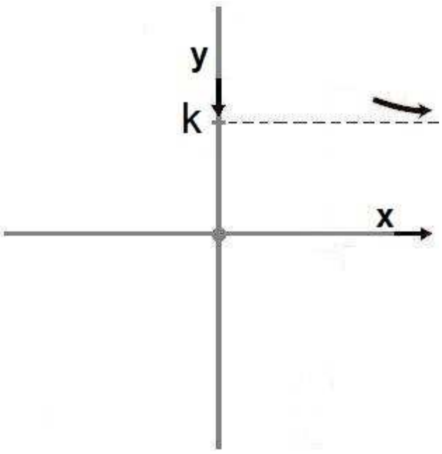


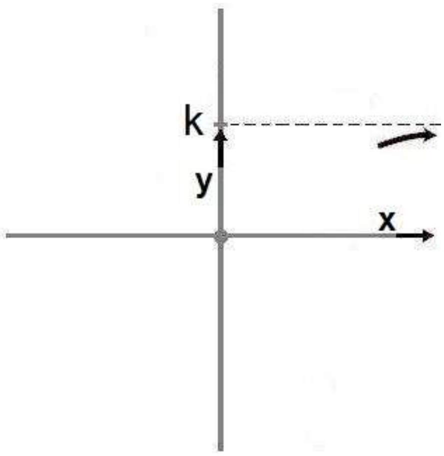
1.4) **Si $x \to c^-$, entonces $y \to -\infty$**



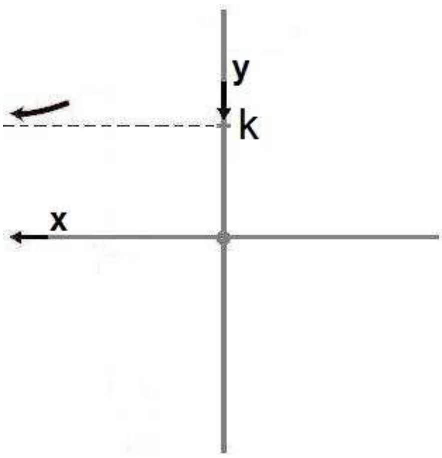
2) Se dice que **la recta $y = k$ es asíntota horizontal de una función** $y = f(x)$ si ocurre alguna de las cuatro situaciones siguientes:

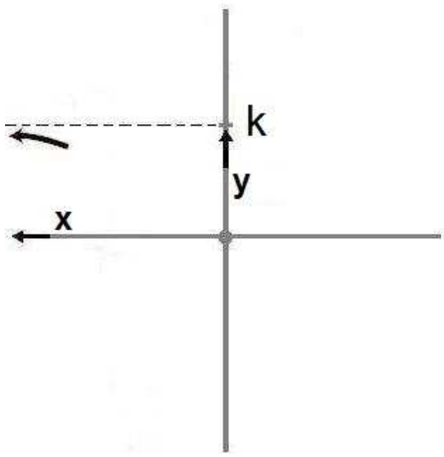
2.1) **Si $x \to +\infty$, entonces $y \to k$**



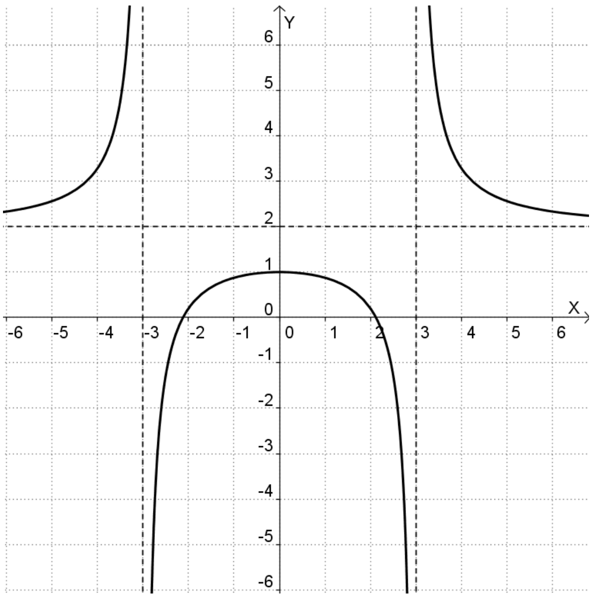


2.2) **Si $x \to -\infty$, entonces $y \to k$**





Ejemplo:



La recta $x = 3$ es asíntota vertical ya que:

Si $x \to 3^+$, entonces $y \to +\infty$

Si $x \to 3^-$, entonces $y \to -\infty$

La recta $x = -3$ es asíntota vertical ya que:

Si $x \to -3^+$, entonces $y \to -\infty$

Si $x \to -3^-$, entonces $y \to +\infty$

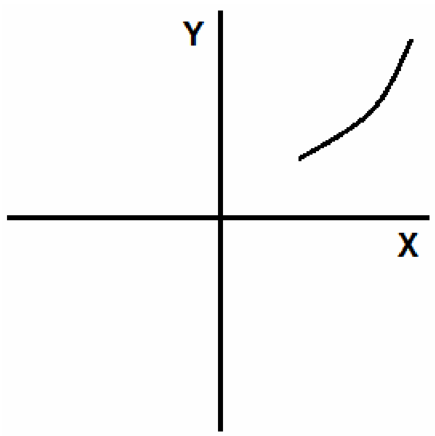
La recta $y = 2$ es asíntota horizontal ya que:

Si $x \to +\infty$, entonces $y \to 2$

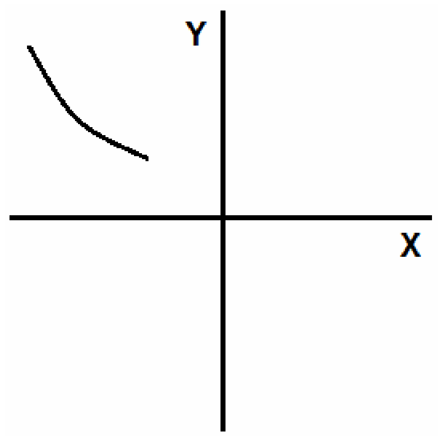
Si $x \to -\infty$, entonces $y \to 2$

3) Se dice que una función $y = f(x)$ tiene una **rama parabólica (no asintótica)** si ocurre alguna de las cuatro situaciones siguientes:

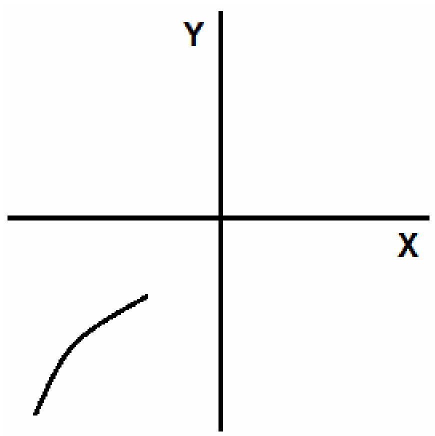
3.1) **Si $x \to +\infty$, entonces $y \to +\infty$**



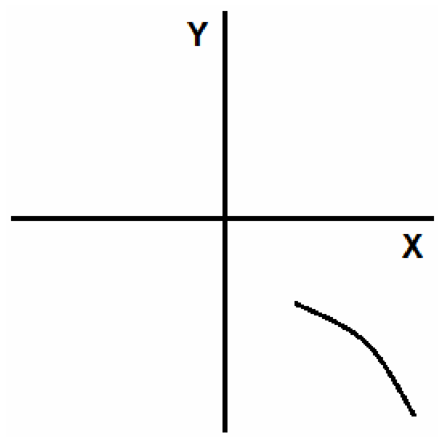
3.2) **Si $x \to -\infty$, entonces $y \to +\infty$**



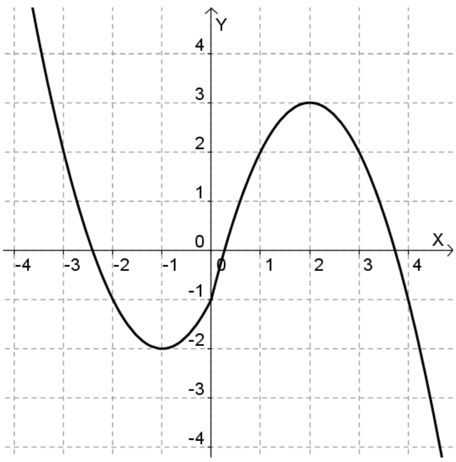
3.3) **Si $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$**



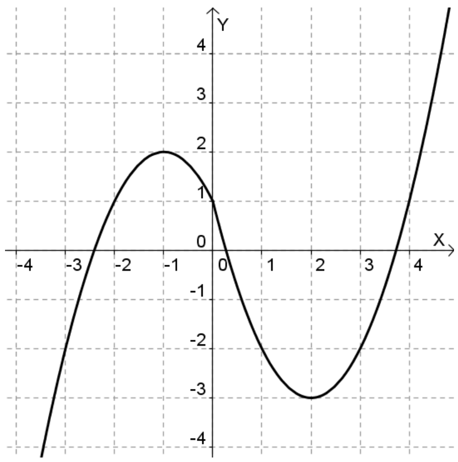
3.4) **Si $x \to +\infty$, entonces $y \to -\infty$**



Ejemplo 1:



Ejemplo 2:



Esta función tiene dos ramas parabólicas:

En el IIC: si $x \to -\infty$, entonces $y \to +\infty$

En el IVC: si $x \to +\infty$, entonces $y \to -\infty$

Esta función tiene dos ramas parabólicas:

En el IC: si $x \to +\infty$, entonces $y \to +\infty$

En el IIIC: si $x \to -\infty$, entonces $y \to -\infty$

10. Función afín. Función lineal.

Función afín

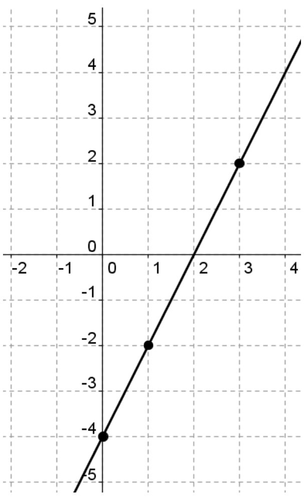
Se llama **función afín o polinómica de primer grado** a la que tiene por expresión analítica $y = mx + n$, donde m, n $\in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

La gráfica de toda función afín es una **línea recta que pasa por el punto (0, n)** y cuya inclinación viene determinada por el número **m**, llamado **pendiente**. El número **n** se llama **ordenada en el origen** e indica el punto de corte de la recta con el eje Y.

Para averiguar la pendiente **m** de una función afín, hay que elegir dos puntos P(a, b) y Q(c, d) cualesquiera de la recta y calcular $m = \dfrac{d-b}{c-a}$

Para averiguar la ordenada en el origen **n**, basta con obtener el punto de corte de la recta con el eje Y.

Ejemplo 1:



Esta gráfica corresponde a una función afín ya que es una línea recta que no pasa por el punto (0, 0).

Como es creciente, su pendiente tiene signo positivo.

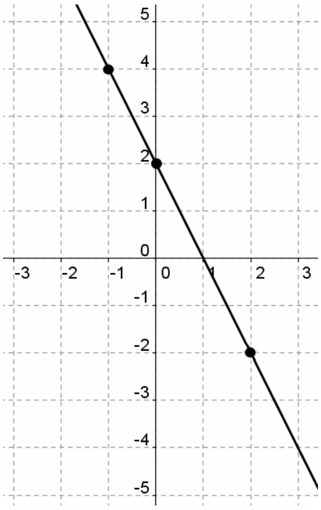
Para averiguar la pendiente m se pueden elegir los puntos P(1, –2) y Q(3, 2)

Se calcula $m = \dfrac{2-(-2)}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$

Como pasa por el punto (0, –4), su ordenada en el origen es –4

Por lo tanto, su expresión analítica es **y = 2x–4**

Ejemplo 2:



Esta gráfica corresponde a una función afín ya que es una línea recta que no pasa por el punto (0, 0).

Como es decreciente, su pendiente tiene signo negativo.

Para averiguar la pendiente m se pueden elegir los puntos P(–1, 4) y Q(2, –2)

Se calcula $m = \dfrac{-2-4}{2-(-1)} = \dfrac{-6}{3} = -2 \quad \Rightarrow \quad m = -2$

Como pasa por el punto (0, 2), su ordenada en el origen es 2

Por lo tanto, su expresión analítica es **y = –2x+2**

Nota: dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

Función lineal

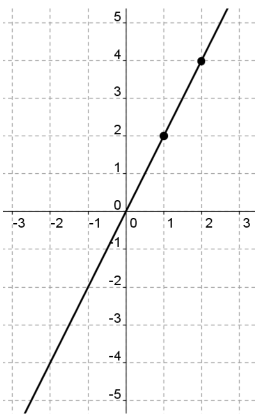
Se llama **función lineal o de proporcionalidad directa** a la que tiene por expresión analítica $y = mx$ donde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, es decir, aquella en la que las variables **x** e **y** son directamente proporcionales.

La gráfica de toda función lineal es una **línea recta que pasa por (0, 0)** y cuya inclinación viene determinada por el número **m**, llamado **pendiente**.

La pendiente **m** indica el número de unidades que sube o baja la variable **y** por cada unidad que la variable **x** se desplaza a la derecha:
– si m > 0 entonces la gráfica es una recta creciente
– si m < 0 entonces la gráfica es una recta decreciente

Para averiguar la pendiente **m** de una función lineal, basta elegir un punto (a, b) cualquiera de la recta (que no sea el punto (0, 0)) y calcular $m = \dfrac{b}{a}$

Ejemplo 1:



Esta gráfica corresponde a una función lineal ya que es una línea recta que pasa por el punto (0, 0)

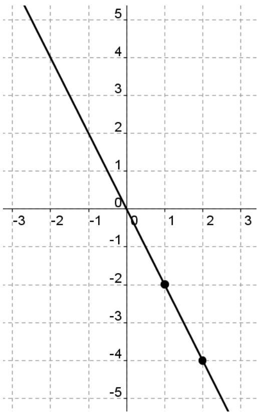
Como es una recta creciente, su pendiente tiene signo positivo.

Para averiguar la pendiente m se puede elegir el punto (2, 4).

Se calcula $m = \dfrac{4}{2} = 2$

Por lo tanto, su expresión analítica es **y = 2x**

Ejemplo 2:



Esta gráfica corresponde a una función lineal ya que es una línea recta que pasa por el punto (0, 0)

Como es una recta decreciente, su pendiente tiene signo negativo.

Para averiguar la pendiente m se puede elegir el punto (2, –4).

Se calcula $m = \frac{-4}{2} = -2$

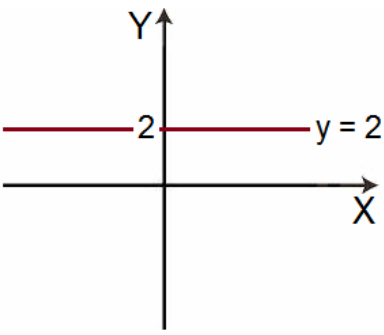
Por lo tanto, su expresión analítica es **y = –2x**

Nota: obsérvese que la función lineal es un caso particular de la función afín en la que n = 0.

Rectas horizontales y rectas verticales

Una expresión de la forma **y = k**, donde k ∈ ℝ, representa el conjunto de todos los puntos cuya segunda coordenada es igual al número k.
Graficamente es una **recta horizontal** que pasa por el punto **(0, k)**.

Por ejemplo, la recta horizontal y = 2 pasa por todos los puntos cuya segunda coordenada es 2.

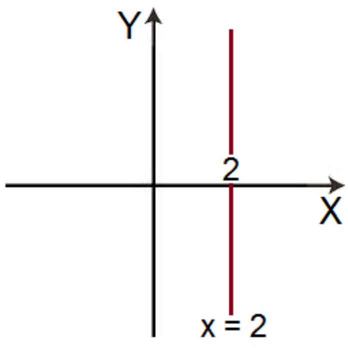


Nota: obsérvese que una recta horizontal es un caso particular de la función lineal en la que la pendiente es m = 0.

Una expresión de la forma **x = k**, donde k ∈ ℝ, representa el conjunto de todos los puntos cuya primera coordenada es igual al número k.
Graficamente es una **recta vertical** que pasa por el punto **(k, 0)**.

Por ejemplo, la recta vertical x = 2 pasa por todos los puntos cuya primera coordenada es 2.

A diferencia de las rectas horizontales, **las rectas verticales no son funciones** ya que al mismo valor de **x** corresponden infinitos valores de **y**.



Los ejes de coordenadas también son rectas del plano

En particular, los ejes de coordenadas, como rectas horizontal y vertical del plano que son, también tienen sus respectivas ecuaciones:

El eje de abscisas (eje X) es la recta horizontal y = 0

El eje de ordenadas (eje Y) es la recta vertical x = 0

11. Ecuaciones de una recta.

Ecuación punto – pendiente de una recta

Dada una recta o función afín de pendiente **m** y que pasa por un punto **(a, b)**, se llama **ecuación punto – pendiente** a la expresión $y - b = m \cdot (x - a)$

Con la ecuación punto – pendiente se puede hallar la expresión analítica de la función.

Ejemplo 1: si una recta o función afín pasa por el punto P(3, 7) y es paralela a otra recta de pendiente 5, entonces su ecuación punto - pendiente es: $y - 7 = 5 \cdot (x - 3)$

$$y - 7 = 5 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 7 = 5x - 15 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 15 + 7 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 8$$

Por lo tanto, su expresión analítica es $y = 5x - 8$

Ejemplo 2: si una recta o función afín pasa por los puntos P(3, –6) y Q(7, 2), se averigua primero su pendiente $m = \frac{2 - (-6)}{7 - 3} = \frac{8}{4} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$

Su ecuación punto – pendiente es: $y - (-6) = 2 \cdot (x - 3)$

$$y - (-6) = 2 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y + 6 = 2x - 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 6 - 6 \quad \Rightarrow \quad y = 2x - 12$$

Por lo tanto, su expresión analítica es $y = 2x - 12$

Ecuación general o implícita de una recta

Si en la expresión analítica de una recta o función afín $y = mx + n$, se pasan todos los términos a un lado del signo igual, se llega a una expresión del tipo

$$\mathbf{A\,x + B\,y + C = 0}, \text{ donde } A, B, C \in \mathbb{R}$$

A esta expresión se le llama **ecuación general o implícita** de la recta.

Ejemplo 1: para obtener la ecuación general de la recta $y = 5x - 8$, se hace

$$y = 5x - 8 \quad \Rightarrow \quad 0 = 5x - 8 - y \quad \Rightarrow \quad 5x - y - 8 = 0$$

Ejemplo 2: para obtener la expresión analítica de la recta $3x - 2y + 5 = 0$, se hace

$$3x - 2y + 5 = 0 \quad \Rightarrow \quad 3x + 5 = 2y \quad \Rightarrow \quad 2y = 3x + 5 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3x + 5}{2} \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

12. Función cuadrática o polinómica de segundo grado.

Se llama **función cuadrática o polinómica de segundo grado** a la que tiene por expresión analítica $y = ax^2 + bx + c$, donde a, b, c ∈ ℝ, a ≠ 0. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, **el dominio de una función polinómica es todo** ℝ.

La **gráfica** de toda función cuadrática es una curva llamada **parábola.** Ésta siempre tiene un extremo relativo (y absoluto) llamado **vértice**, cuya abscisa es $x_v = \frac{-b}{2a}$.
Si **a > 0**, la parábola tiene sus ramas **hacia arriba** y el **vértice** es el **mínimo absoluto**.
Si **a < 0**, la parábola tiene sus ramas **hacia abajo** y el **vértice** es el **máximo absoluto**.

La parábola tiene un **eje de simetría**, que es la recta vertical que pasa por el vértice, es decir, la recta de ecuación $x = \frac{-b}{2a}$.

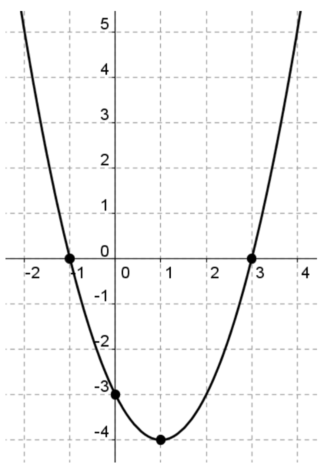
Una parábola **puede cortar al eje X** en **dos puntos** diferentes, tocarlo **en un solo punto** o no tocarlo en **ninguno**. Para averiguarlo, se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$

1) Si tiene dos soluciones x_1, x_2 entonces hay **dos puntos de corte** que son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$
2) Si tiene una única solución x_1, entonces hay **un punto de tangencia** que es $(x_1, 0)$
3) Si no tiene solución, entonces **no hay contacto alguno**.

Una parábola **corta al eje Y** en un único punto, que es **(0, c)**

Además de todo lo dicho, para representar graficamente una parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos por los que pasa, a derecha e izquierda del vértice.

Ejemplo 1: para representar graficamente la función $y = x^2 - 2x - 3$, se hace lo siguiente:



Los coeficientes son: a = 1, b = –2, c = –3

Como a = 1 > 0, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = \frac{2}{2} = 1$

La ordenada del vértice es $y_v = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Así pues, el vértice es el punto (1, –4) y la recta x = 1 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, –3)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$

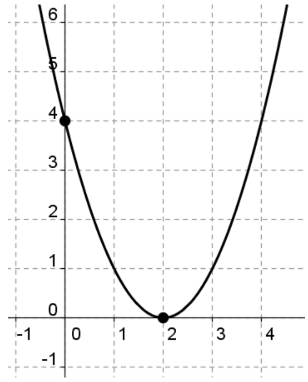
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} = \frac{+2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{+2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{+2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son los puntos (3, 0) y (–1, 0)

Ejemplo 2: para representar graficamente la función $y = x^2 - 4x + 4$, se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: a = 1, b = –4, c = 4

Como a = 1 > 0, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.



La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$

Así pues, el vértice es el punto (2, 0) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 4)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{+4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto, el punto de tangencia con el eje X es el punto (2, 0)

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si x = 1 $\Rightarrow y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 4 = 1 - 4 + 4 = 1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, 1)

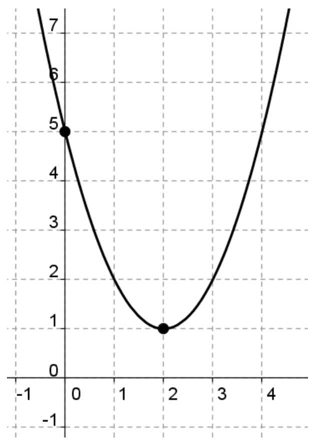
Si x = 3 $\Rightarrow y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, 1)

Si x = 4 $\Rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 4 = 16 - 16 + 4 = 4 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, 4)

Ejemplo 3: para representar graficamente la función $y = x^2 - 4x + 5$, se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: a = 1, b = –4, c = 5

Como a = 1 > 0, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.



La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

Así pues, el vértice es el punto (2, 1) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 5)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Por lo tanto, no hay contacto entre la parábola y el eje X

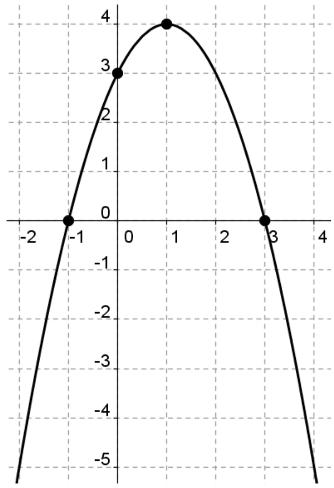
Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si x = 1 $\Rightarrow y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, 2)

Si x = 3 $\Rightarrow y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, 2)

Si x = 4 $\Rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 16 - 16 + 5 = 5 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, 5)

Ejemplo 4: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 2x + 3$, se hace lo siguiente:



Los coeficientes son: a = –1, b = 2, c = 3

Como a = –1 < 0, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \frac{-2}{2\cdot(-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$

La ordenada del vértice es $y_v = -1^2 + 2\cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

Así pues, el vértice es el punto (1, 4) y la recta x = 1 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 3)

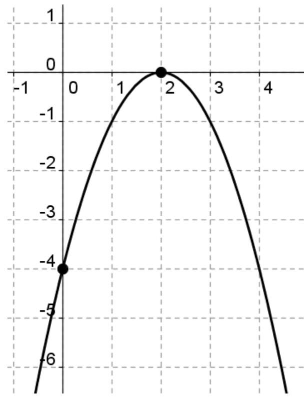
Se resuelve la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4\cdot(-1)\cdot 3}}{2\cdot(-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son los puntos (3, 0) y (–1, 0)

Ejemplo 5: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 4x - 4$, se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: a = –1, b = 4, c = –4



Como a = –1 < 0, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \frac{-4}{2\cdot(-1)} = \frac{-4}{-2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = -2^2 + 4\cdot 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$

Así pues, el vértice es el punto (2, 0) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, –4)

Se resuelve la ecuación $-x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Por lo tanto, el punto de tangencia con el eje X es el punto (2, 0)

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si x = 1 $\Rightarrow y = -1^2 + 4\cdot 1 - 4 = -1 + 4 - 4 = -1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, –1)

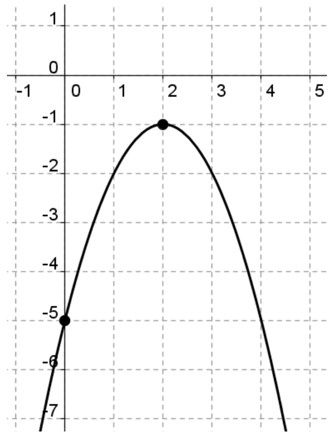
Si x = 3 $\Rightarrow y = -3^2 + 4\cdot 3 - 4 = -9 + 12 - 4 = -1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, –1)

Si x = 4 $\Rightarrow y = -4^2 + 4\cdot 4 - 4 = -16 + 16 - 4 = -4 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, –4)

Ejemplo 6: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 4x - 5$, se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: $a = -1$, $b = 4$, $c = -5$

Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.



La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = -2^2 + 4\cdot 2 - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$

Así pues, el vértice es el punto $(2, -1)$ y la recta $x = 2$ es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto $(0, -5)$

Se resuelve la ecuación $-x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-5)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

Por lo tanto, no hay contacto entre la parábola y el eje X

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1^2 + 4\cdot 1 - 5 = -1 + 4 - 5 = -2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto $(1, -2)$

Si $x = 3 \Rightarrow y = -3^2 + 4\cdot 3 - 5 = -9 + 12 - 5 = -2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto $(3, -2)$

Si $x = 4 \Rightarrow y = -4^2 + 4\cdot 4 - 5 = -16 + 16 - 5 = -5 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto $(4, -5)$