DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 2. CÁLCULO DE PRIMITIVAS.

1. Integral indefinida de una función.

Dada una función f, se dice que una función F es una **función primitiva** de f si $F' = f$.

Ejemplo 1: F(x) = lnx es primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ porque $F'(x) = f(x)$

Ejemplo 2: F(x) = senx es primitiva de f(x) = cosx porque $F'(x) = f(x)$

Si una función tiene primitiva, entonces tiene infinitas primitivas, las cuales se diferencian todas ellas solo en una constante.

Demostración: si F es una función primitiva de una función f, entonces F + k, $k \in \mathbb{R}$, también es función primitiva de f ya que $(F+k)' = F' + k' = F' + 0 = F' = f$

Se llama **integral indefinida** de una función f al conjunto de todas sus primitivas.
Se representa por $\int f(x)\, dx$. Se lee "integral indefinida de f(x) respecto a x".
La función f recibe el nombre de **integrando** y la variable x se llama variable de integración.

Si F es una primitiva de f, entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + k$, donde $k \in \mathbb{R}$

Al número $k \in \mathbb{R}$ se le llama **constante de integración**.

Ejemplos: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k \quad k \in \mathbb{R}$ $\qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k \quad k \in \mathbb{R}$

Propiedades de la integral indefinida

P1. La integral del producto de un número real por una función es igual al producto de dicho número por la integral de la función: $\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

P2. La integral de la suma/resta de dos funciones es igual a la suma/resta de las integrales de cada función: $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Ejemplo: $\int (e^x + 3\cos x - 5)\, dx = \int e^x\, dx + 3 \cdot \int \cos x\, dx - \int 5\, dx = e^x + 3\operatorname{sen} x - 5x + k \quad k \in \mathbb{R}$

Nota: **la integral del producto** de funciones, en general, **no es igual al producto de las integrales** de cada función: $\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

2. Integrales inmediatas.

En la siguiente tabla, la letra **u** representa a una función que depende de x, es decir, $u = u(x)$ y el número real k es la constante de integración.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

ELEMENTALES	COMPUESTAS
$\int c\, dx = c \cdot x + k \qquad c \in \mathbb{R}$	
$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k \qquad m \in \mathbb{Q} \quad m \neq -1$	$\int u^m \cdot u'\, dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + k \qquad m \in \mathbb{Q} \quad m \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln\lvert x \rvert + k$	$\int \frac{1}{u} \cdot u'\, dx = \ln\lvert u \rvert + k$
$\int e^x\, dx = e^x + k$	$\int e^u \cdot u'\, dx = e^u + k$
$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \qquad a \in \mathbb{R} \;\; a > 0$	$\int a^u \cdot u'\, dx = \frac{a^u}{\ln a} + k \qquad a \in \mathbb{R} \;\; a > 0$
$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u'\, dx = -\cos(u) + k$
$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \cos u \cdot u'\, dx = \operatorname{sen}(u) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\, dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'\, dx = \operatorname{tg}(u) + k$
$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\, dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u'\, dx = \operatorname{tg}(u) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx = -\operatorname{cotg} x + k$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'\, dx = -\operatorname{cotg}(u) + k$
$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\, dx = -\operatorname{cotg} x + k$	$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 u) \cdot u'\, dx = -\operatorname{cotg}(u) + k$
$\int \frac{1}{1 + x^2}\, dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{1}{1 + u^2} \cdot u'\, dx = \operatorname{arctg}(u) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1 - u^2}} \cdot u'\, dx = \operatorname{arcsen}(u) + k$

3. Integración por cambio de variable.

Consiste en sustituir la variable **x** por otra variable **t**, utilizando alguna relación matemática entre ambas. El éxito final depende de una elección adecuada del cambio de variable.

Nota: al aplicar este método hay que tener en cuenta lo siguiente: $df(x) = f'(x) \cdot dx$

Ejemplo 1: $\int \cos 4x\, dx = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int \cos t\, dt = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} t + k = \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + k$

CV $4x = t \quad \Rightarrow \quad d(4x) = dt \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = (dt/4)$

Ejemplo 2: $\int 6x \cdot (x^2 + 25)^8\, dx = \int 6 \cdot t^8 \frac{dt}{2} = \frac{6}{2} \cdot \int t^8\, dt = 3 \cdot \frac{t^9}{9} + k = \frac{(x^2 + 25)^9}{3} + k$

CV $x^2 + 25 = t \quad \Rightarrow \quad d(x^2 + 25) = dt \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = (dt/2)$

Ejemplo 3: $\int \frac{x^2}{6+x^3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot \ln|t| + k = \frac{\ln|6+x^3|}{3} + k$

CV $6+x^3 = t \Rightarrow d(6+x^3) = dt \Rightarrow 3x^2\cdot dx = dt \Rightarrow x^2\cdot dx = (dt/3)$

Ejemplo 4: $\int 3^{5x+1}\,dx = \int 3^t\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\cdot\int 3^t\,dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{3^t}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x+1}}{5\ln 3} + k$

CV $5x+1 = t \Rightarrow d(5x+1) = dt \Rightarrow 5\cdot dx = dt \Rightarrow dx = (dt/5)$

4. Integración por partes.

Consiste en separar la expresión $f(x)\cdot dx$ en dos partes, u(x) y dv(x), teniendo en cuenta que la parte identificada con **dv(x)** debe incluir (al menos) al término **dx**.

Después se aplica la siguiente fórmula: $\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$

Ejemplo 1:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k \quad k\in\mathbb{R}$$

$u(x) = \ln x \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad dv(x) = x^2\,dx \Rightarrow v(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

Ejemplo 2: $\int x\cdot e^x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = x\cdot e^x - \int e^x\cdot 1\cdot dx = x\cdot e^x - e^x + k \quad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = x \Rightarrow du(x) = 1\cdot dx \qquad dv(x) = e^x\,dx \Rightarrow v(x) = \int e^x\,dx = e^x$

Ejemplo 3: $\int \ln x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot\ln x - x + k \quad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = \ln x \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad dv(x) = dx \Rightarrow v(x) = \int 1\,dx = x$

Ejemplo 4: $\int x^2\cdot \operatorname{sen}x\,dx = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\cdot 2x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,dx =$

$= -x^2\cos x + 2\cdot(x\cdot\operatorname{sen}x + \cos x) + k = -x^2\cos x + 2x\cdot\operatorname{sen}x + 2\cos x + k \qquad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = x^2 \Rightarrow du(x) = 2x\cdot dx \qquad dv(x) = \operatorname{sen}x\,dx \Rightarrow v(x) = \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x$

$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\operatorname{sen}x - \int(\operatorname{sen}x)\cdot 1\,dx = x\cdot\operatorname{sen}x - (-\cos x) = x\cdot\operatorname{sen}x + \cos x$

$u(x) = x \Rightarrow du(x) = 1\cdot dx \qquad dv(x) = \cos x\,dx \Rightarrow v(x) = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x$

5. Integración de funciones racionales.

Dada una integral del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)}\,dx$, donde p(x), q(x) son polinomios, se trata de expresar el integrando como suma de fracciones, cada una de ellas con un polinomio irreducible por denominador. En el último paso de este método, hay que aplicar alguna de estas integrales:

$$\int \frac{1}{x-a}\,dx = \ln|x-a| + k \qquad \int \frac{1}{(x-a)^n}\,dx = \frac{1}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + k \qquad k \in \mathbb{R} \qquad n \neq 1$$

Caso 1. Grado (p(x)) < Grado (q(x))

Caso 1.1. Todas las raíces del polinomio q(x) son reales y simples.

Ejemplo: $\int \frac{5x-1}{x^2-7x+12}\,dx$ Las raíces de q(x) son 3 (simple) y 4 (simple)

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{5x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A\cdot(x-4)}{(x-3)\cdot(x-4)} + \frac{B\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-4)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5x-1 = (A+B)\cdot x - 4A - 3B \quad \Rightarrow \quad A+B=5, \quad -4A-3B=-1 \quad \Rightarrow \quad A=-14, B=19$$

Por lo tanto, $\int \frac{5x-1}{x^2-7x+12}\,dx = \int \frac{-14}{x-3}\,dx + \int \frac{19}{x-4}\,dx = -14\ln|x-3| + 19\ln|x-4| + k \qquad k \in \mathbb{R}$

Caso 1.2. Todas las raíces del polinomio q(x) son reales pero alguna/s son múltiples.

Ejemplo: $\int \frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2}\,dx$ Las raíces de q(x) son 1 (doble) y –2 (simple)

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} = \frac{A\cdot(x+2)}{(x-1)^2\cdot(x+2)} + \frac{B\cdot(x-1)(x+2)}{(x-1)^2\cdot(x+2)} + \frac{C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2x = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-1)(x+2) + C\cdot(x-1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B+C=2, \quad A+B-2C=2, \quad 2A-2B+C=0 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{4}{3}, B=\frac{14}{9}, C=\frac{4}{9}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2}\,dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2}\,dx + \frac{14}{9}\int \frac{1}{x-1}\,dx + \frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2}\,dx = \frac{-4}{3(x-1)} + \frac{14}{9}\ln|x-1| + \frac{4}{9}\ln|x+2| + k$$

Caso 1.3. En la factorización del polinomio q(x) aparece algún polinomio de segundo grado irreducible (equivalentemente, q(x) tiene raíces complejas).

En este caso, la descomposición del radicando como suma de fracciones presenta algún sumando de la forma $\dfrac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el polinomio x^2+bx+c es irreducible.

Si las dos raíces complejas conjugadas del polinomio x^2+bx+c son $u \pm v \cdot i$, entonces la integral de este sumando es de la forma neperiano – arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{Mu+N}{v}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-u}{v}\right)+k$$

<u>Demostración</u>:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{M(x-u)}{(x-u)^2+v^2}\,dx + \int \frac{Mu+N}{(x-u)^2+v^2}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2(x-u)}{(x-u)^2+v^2}\,dx + (Mu+N)\int \frac{1}{(x-u)^2+v^2}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|(x-u)^2+v^2\right| + \frac{Mu+N}{v}\int \frac{1/v}{[(x-u)/v]^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{Mu+N}{v}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-u}{v}\right)+k$$

<u>Ejemplo 1</u>: $\displaystyle\int \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1}dx$ $\qquad x^3-x^2+x-1=(x-1)\cdot(x^2+1)$ $\qquad x^2+1$ es irreducible

Las raíces de q(x) son 1 (simple) y las complejas $\pm i$

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \quad\Rightarrow\quad \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}+\frac{(Mx+N)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad x+5 = A\cdot(x^2+1)+(Mx+N)\cdot(x-1) \quad\Rightarrow\quad A+M=0,\ N-M=1,\ A-N=5 \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad A=3,\ M=-3,\ N=-2$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{-3x-2}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| - 2\operatorname{arctg}x + k$$

Ejemplo 2: $\int \frac{1}{x^3+1}dx$ $\quad x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$ $\quad x^2-x+1$ es irreducible

Las raíces de q(x) son -1 (simple) y las complejas $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1} \Rightarrow \frac{1}{x^3+1}=\frac{A\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}+\frac{(Mx+N)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=A\cdot(x^2-x+1)+(Mx+N)\cdot(x+1) \Rightarrow A+M=0, M+N-A=0, A+N=1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1/3, M=-1/3, N=2/3$$

En consecuencia,

$$\int\frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{x+1}dx+\int\frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\text{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k$$

Caso 2. Grado (p(x)) $\geq$ Grado (q(x))

En este caso, se realiza la división de polinomios, obteniéndose un polinomio cociente c(x) y un polinomio resto r(x), donde grado(r(x)) < grado(q(x)).

Dado que en toda división se cumple que p(x) = q(x) · c(x) + r(x), si se divide toda la expresión por q(x) se obtiene la igualdad $\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ donde grado(r(x)) < grado(q(x)).

En consecuencia, se puede expresar $\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int c(x)\,dx+\int\frac{r(x)}{q(x)}dx$, donde la primera integral es la de un polinomio y la segunda pertenece al caso 1.

Ejemplo: para hallar $\int\frac{x^3-2x+2}{x^2-4}dx$, se descompone $\int\frac{x^3-2x+2}{x^2-4}dx=\int x\,dx+\int\frac{2x+2}{x^2-4}dx$ expresión obtenida mediante la división de x^3-2x+2 entre x^2-4

Como la segunda integral pertenece al caso 1, se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{2x+2}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \Rightarrow \frac{2x+2}{x^2-4}=\frac{A\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+2=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2) \Rightarrow A+B=2,\quad 2A-2B=2 \Rightarrow A=\frac{3}{2}, B=\frac{1}{2}$$

En consecuencia,

$$\int\frac{x^3-2x+2}{x^2-2}dx=\int x\,dx+\frac{3}{2}\int\frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+2}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+k$$

Nota: no necesariamente todas las integrales racionales tienen que resolverse siguiendo las pautas indicadas anteriormente. Algunas de ellas se pueden resolver de forma más sencilla mediante alguna integral inmediata o un cambio de variable adecuado.

Ejemplo 1: $\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}dx = \int \frac{1}{t^3}dt = \frac{t^{-2}}{-2} + k = -\frac{1}{2t^2} + k = -\frac{1}{2(x^2+x+1)^2} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $x^2+x+1 = t \quad \Rightarrow \quad d(x^2+x+1) = dt \quad \Rightarrow \quad (2x+1)\cdot dx = dt$

Ejemplo 2: $\int \frac{x^3+1}{x^4+4x+7}dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\cdot \ln|t| + k = \frac{\ln|x^4+x+7|}{4} + k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $x^4+4x+7 = t \quad \Rightarrow \quad d(x^4+4x+7) = dt \quad \Rightarrow \quad (4x^3+4)\cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad (x^3+1)\cdot dx = \frac{dt}{4}$

Ejemplo 3: $\int \frac{2x}{9+x^4}\,dx = \int \frac{1}{9+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{3}\right) + k = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{3}\right) + k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $x^2 = t \quad \Rightarrow \quad d(x^2) = dt \quad \Rightarrow \quad 2x\cdot dx = dt$