DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 5. SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES.

1. Sistemas de ecuaciones. Expresión matricial.

Un **sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas** es un conjunto de expresiones de la forma

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

donde: a_{ij} son números reales llamados **coeficientes** del sistema. $(1 \le i \le m \quad 1 \le j \le n)$

$b_1, b_2, \dots, b_m$ son números reales llamados **términos independientes**.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ son las **incógnitas** del sistema.

Una ecuación del tipo $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \dots\dots\dots + 0\cdot x_n = 0$ se llama **ecuación nula**.
Como una ecuación nula se verifica siempre para valores cualesquiera de $x_1, x_2, \dots, x_n$, no aporta ninguna información al sistema y por lo tanto, debe eliminarse.

Una ecuación del tipo $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + 0\cdot x_3 + \dots\dots\dots + 0\cdot x_n = b$, siendo $b \neq 0$, se llama **ecuación incompatible.**
Una ecuación incompatible no se verifica nunca para ningún valor de $x_1, x_2, \dots, x_n$. Por ello, un sistema que incluya alguna ecuación incompatible, carece de solución.

Expresión matricial de un sistema

Todo sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede escribirse en la forma $A\cdot X = B$,

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_i \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_i \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

donde: **A** se llama **matriz del sistema** (matriz de dimensión $m \times n$)

X se llama **matriz de incógnitas** (matriz de dimensión $n \times 1$)

B se llama **matriz de términos independientes** (matriz de dimensión $m \times 1$)

<u>Nota</u>: la matriz A del sistema no tiene por qué ser una matriz cuadrada y en el caso de que lo fuera, tampoco tiene por qué ser inversible (o regular).

Ejemplo: el sistema de ecuaciones lineales

$$\left.\begin{array}{l} x+3y+3z=2 \\ x+4y+3z=0 \\ x+3y+4z=-1 \end{array}\right\} \text{ puede expresarse matricialmente como } \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Clasificación de un sistema según el número de soluciones

Una **solución del sistema** es un conjunto ordenado de números reales $\{ s_1, s_2, ..., s_n \}$ tales que, al sustituir las incógnitas x_1 por s_1, x_2 por s_2, ..., x_i por s_i ..., x_n por s_n, se verifican simultaneamente las m ecuaciones.

Ejemplo: una solución del sistema $\begin{cases} 2x+3y-2z=-3 \\ x+y+3z=1/2 \end{cases}$ es $x=-1$, $y=0$, $z=1/2$

1. Si el sistema no tiene ninguna solución, se llama **incompatible**.
2. Si el sistema tiene solución única, se llama **compatible determinado**.
3. Si el sistema tiene infinitas soluciones, se llama **compatible indeterminado**.

Sistemas equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones.

Criterios de equivalencia

C1. En un sistema, si se multiplican (dividen) todos los términos de una ecuación por un número real distinto de cero, resulta otro sistema equivalente al dado.

C2. En un sistema, si a una ecuación se le suma (resta) otra ecuación del mismo, resulta un sistema equivalente al dado.

Ejemplo 1: los sistemas $S1 \equiv \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 3x-3y=9 \end{cases}$ y $S2 \equiv \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$ son equivalentes ya que la segunda ecuación de S2 es el resultado de dividir por 3 la segunda ecuación de S1.

Ejemplo 2: los sistemas $S1 \equiv \begin{cases} 2x+3y=4 \\ 5x+5y=11 \end{cases}$ y $S2 \equiv \begin{cases} 2x+3y=4 \\ x-y=3 \end{cases}$ son equivalentes ya que la segunda ecuación de S2 es el resultado de restar a la segunda ecuación de S1, la primera multiplicada por dos.

Eliminación de ecuaciones

De los criterios de equivalencia se deduce que, al resolver un sistema, pueden eliminarse:

1. Todas las ecuaciones nulas.
2. Toda ecuación que sea proporcional (o igual) a otra.
3. Toda ecuación que sea combinación lineal de otras.

Ejemplo 1: en el sistema $\begin{cases} 2x+3y+z=4 \\ 5x+6y-z=2 \\ 6x+9y+3z=12 \end{cases}$ se puede eliminar E_3 ya que $E_3 = 3E_1$

Ejemplo 2: en el sistema $\begin{cases} x+y+2z+3t=8 \\ x-y+z+t=-1 \\ 3x-5y+2z+t=-12 \end{cases}$ se puede eliminar E_3 ya que $E_3 = 4E_2 - E_1$

2. Método de Gauss para la resolución de sistemas.

Sea $A \cdot X = B$ la expresión matricial de un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

Se llama **matriz ampliada** de un sistema a la matriz resultante de añadir la columna de los términos independientes a la matriz A del sistema.

El método de Gauss consiste en transformar el sistema en otro equivalente, **triangulando** (**escalonando)** la matriz ampliada mediante transformaciones elementales. Con este método, se puede clasificar y resolver al mismo tiempo cualquier sistema.

Paso 1. Eliminar todas las ecuaciones que sea posible.

Paso 2. Triangular la matriz ampliada. ¿Aparece alguna ecuación incompatible?

– Si la respuesta es SÍ, el sistema es incompatible: no tiene solución.

– Si la respuesta es NO, el sistema es compatible y se aplica el paso 3.

Paso 3. Eliminar todas las ecuaciones nulas, si las hay.

¿El sistema resultante cumple que el número de ecuaciones es igual al número de incógnitas?

– Si la respuesta es SÍ, el sistema es compatible determinado: tiene solución única, que hay que determinar.

– Si la respuesta es NO, el sistema es compatible indeterminado: tiene infinitas soluciones. Para expresarlas, se aplica lo siguiente:

[Número de parámetros] = [Número de incógnitas] – [Número de ecuaciones]

Ejemplo 1: para resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 2x + y - z = -3 \\ x - 2y + 2z = 1 \\ 2x + y + z = 5 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \div 5} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

Una vez triangulada la matriz ampliada, se observa que el número de ecuaciones (3) coincide con el número de incógnitas (3).

Por lo tanto, el sistema es compatible determinado y es equivalente al sistema $\begin{cases} x - 2y + 2z = 1 \\ \quad\ \ y - z = -1 \\ \qquad\ 2z = 8 \end{cases}$

$E_3 \equiv 2z = 8 \;\Rightarrow\; z = 4 \qquad E_2 \equiv y - z = -1 \;\Rightarrow\; y = 3 \qquad E_1 \equiv x - 2y + 2z = 1 \;\Rightarrow\; x = -1$

Por lo tanto, la única solución del sistema es { x = –1, y = 3, z = 4 }

Ejemplo 2: para resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} 3x+4y+z=3 \\ x+y-z=1 \\ 2x+3y+2z=2 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vez triangulada la matriz ampliada y eliminada la fila nula, se observa que el número de ecuaciones (2) no coincide con el número de incógnitas (3).

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado y equivalente al sistema $\begin{cases} x+y-z=1 \\ y+4z=0 \end{cases}$

Para expresar las infinitas soluciones del sistema, se hace lo siguiente:

[Número de parámetros] = [Número de incógnitas] – [Número de ecuaciones]

[Número de parámetros] = 3 – 2 = 1

Se elige una letra cualquiera para el único parámetro, por ejemplo, $k \in \mathbb{R}$.

Se iguala una cualquiera de las incógnitas, por ejemplo z, al parámetro k ($z = k$) y finalmente se despejan el resto de las incógnitas en función del parámetro k.

$E_2 \equiv y+4k=0 \Rightarrow y=-4k$ $\qquad$ $E_1 \equiv x+y-k=1 \Rightarrow x=1+5k$

Por lo tanto, el conjunto formado por las infinitas soluciones del sistema se expresa así:

$$\{\, x = 1+5k,\ y = -4k,\ z = k \ / \ k \in \mathbb{R} \,\}$$

Ejemplo 3: para resolver por el método de Gauss el sistema $\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ -x-2y-3z=0 \\ 2x+3y+5z=1 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vez triangulada la matriz ampliada, se observa que hay una ecuación incompatible, la ecuación $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = 2$, Por lo tanto, el sistema es incompatible: no tiene solución.

3. Sistemas de Cramer. Regla de Cramer.

Un sistema de ecuaciones lineales se llama **sistema de Cramer** si:

– El número de ecuaciones coincide con el número de incógnitas.

– La matriz de coeficientes del sistema es cuadrada y su determinante es distinto de cero.

Regla de Cramer

Dado un sistema de Cramer $\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\cdot x_1 + a_{n2}\cdot x_2 + a_{n3}\cdot x_3 + \dots + a_{nn}\cdot x_n = b_n \end{cases}$

expresado matricialmente como $A\cdot X = B$, dicho sistema es compatible determinado y su única solución $\{ s_1, s_2, \dots, s_n \}$ viene dada por:

$$x_i = s_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & b_2 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{\det(A)} \qquad \forall i \quad 1 \le i \le n$$

donde la columna de los términos independientes reemplaza respectivamente a los coeficientes de la columna i de la matriz A del sistema.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} 2x + y + z = 7 \\ x + z = 4 \\ 3x - 2y + z = 2 \end{cases}$ se hace lo siguiente:

Primero se comprueba que en efecto, se trata de un sistema de Cramer, ya que:

– El número de ecuaciones (3) coincide con el número de incógnitas (3).

– El determinante de la matriz del sistema es $\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0$

El sistema es compatible determinado y su única solución es { x = 1, y = 2, z = 3 } obtenida así:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{4}{4} = 1 \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{8}{4} = 2 \qquad z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 0 & 4 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{12}{4} = 3$$

Sistemas homogéneos

Un sistema se llama **homogéneo** si todos los términos independientes son nulos.
Un sistema homogéneo siempre es compatible ya que al menos $\{ x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \}$ es solución del sistema.
Si un sistema homogéneo es además, sistema de Cramer, entonces su única solución es $\{ x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0 \}$

4. Teorema de Rouché–Fröbenius.

Dado el sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{11}\cdot x_1 + a_{12}\cdot x_2 + a_{13}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{1n}\cdot x_n = b_1 \\ a_{21}\cdot x_1 + a_{22}\cdot x_2 + a_{23}\cdot x_3 + \dots\dots\dots + a_{2n}\cdot x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}\cdot x_1 + a_{m2}\cdot x_2 + a_{m3}\cdot x_3 + \dots\dots + a_{mn}\cdot x_n = b_m \end{cases}$$

siendo A la matriz del sistema y A* la matriz ampliada:

– Si rango(A) ≠ rango(A*), entonces el sistema es incompatible.

– Si rango(A) = rango(A*) = n, entonces el sistema es compatible determinado.

– Si rango(A) = rango(A*) < n, entonces el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo 1: para clasificar el sistema $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=3 \end{cases}$ según el teorema de Rouché, hay que averiguar los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_3}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 = \text{rango}(A^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

número de incógnitas = 3

Según el teorema de Rouché, el sistema es compatible indeterminado.

Ejemplo 2: para clasificar el sistema $\begin{cases} x+2y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ 3x+3y+3z=4 \end{cases}$ según el teorema de Rouché, hay que averiguar los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada, respectivamente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix} = 2 \neq 3 = \text{rango}(A^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Según el teorema de Rouché, el sistema es incompatible.

Ejemplo 3: para clasificar el sistema $\begin{cases} x + (m + 1)y + z = 1 \\ 2x + my = 1 \\ 3x + 3y + z = 2 \end{cases}$ según los valores del parámetro m,

se puede aplicar el teorema de Rouché. Hay que averiguar los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada, respectivamente:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 2 & m & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad A^* = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 2 & m & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -4m + 4 \qquad \det(A) = -4m + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad m = 1$$

– Si $m \neq 1$, entonces $\det(A) \neq 0$ y por lo tanto rango(A) = rango(A*) = 3, ya que ambas matrices tendrían una submatriz cuadrada de orden 3 con determinante distinto de cero.

Así pues, rango(A) = rango(A*) = 3 = número de incógnitas.

Por lo tanto, si $m \neq 1$, según el teorema de Rouché, el sistema sería compatible determinado.

– Si m = 1, entonces $\text{rango}(A) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que det(A) = 0 y existe al menos una

una submatriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de cero.

Por otra parte, $\text{rango}(A^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = 2$

Así pues, rango(A) = rango(A*) = 2 < 3 = número de incógnitas.

Por lo tanto, si m = 1, según el teorema de Rouché, el sistema sería compatible indeterminado.