DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 7. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

1. Puntos y vectores en el espacio.

Se llama **sistema de referencia en el espacio** al conjunto formado por un punto fijo O llamado **origen** y una **base** de vectores de V^3. Se representa por $\{ O;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

Dados un sistema de referencia y un punto P del espacio, **las coordenadas del punto P** son las coordenadas del vector $\overrightarrow{OP}$ respecto de la base $B = \{ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k} \}$.

$$P(a, b, c) \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{OP} = a \cdot \vec{i} + b \cdot \vec{j} + c \cdot \vec{k}$$

Coordenadas de un vector determinado por dos puntos

Si dos puntos P y Q del espacio tienen coordenadas $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ son $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$

Ejemplo: los puntos P(1, 3, –3) y Q(4, 5, 1) por una parte y los puntos R(2, 1, –2) y S(5, 3, 2), por otra, determinan el mismo vector:

$$\overrightarrow{PQ} = (4-1, 5-3, 1-(-3)) = (3, 2, 4) \qquad \overrightarrow{RS} = (5-2, 3-1, 2-(-2)) = (3, 2, 4)$$

División de un segmento en partes iguales

En general, la división de un segmento de extremos $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$ en n partes iguales se consigue hallando los puntos M_k, que cumplen $\overrightarrow{OM_k} = \overrightarrow{OP} + \frac{k}{n}\overrightarrow{PQ} \qquad 1 \le k \le n-1$

Casos particulares:

[n = 2] El punto que divide al segmento de extremos $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ en 2 partes iguales se llama **punto medio.** Si M es el punto medio $\Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{PQ}$

En consecuencia, las coordenadas del punto medio son $M\left(\frac{p_1+q_1}{2}, \frac{p_2+q_2}{2}, \frac{p_3+q_3}{2}\right)$

Ejemplo: el punto medio del segmento de extremos P(1, 0, 1) y Q(5, 2, 3) es M(3, 1, 2)

[n = 3] La división del segmento de extremos $P(p_1, p_2, p_3)$, $Q(q_1, q_2, q_3)$ en 3 partes iguales se consigue hallando los puntos M_1 y M_2 tales que:

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{OP} + \frac{1}{3}\overrightarrow{PQ} \qquad \overrightarrow{OM_2} = \overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$$

2. Ecuaciones de un plano. Ecuaciones de una recta.

ECUACIONES DE UN PLANO

a) Ecuación vectorial $\pi \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \cdot \vec{u} + \mu \cdot \vec{v} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\pi \equiv (x, y, z) = (a, b, c) + \lambda \cdot (u_1, u_2, u_3) + \mu \cdot (v_1, v_2, v_3)$; $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ donde:

X(x, y, z) son las coordenadas de un punto general del plano (de los infinitos que tiene)

P(a, b, c) son las coordenadas de un punto concreto del plano

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ son dos vectores no nulos y linealmente independientes que determinan las direcciones del plano

Para cada pareja de valores distintos de los **parámetros λ, μ**, se obtiene un punto distinto X(x, y, z) perteneciente al plano.

Ejemplo: el plano que pasa por el punto P(1, 0, 2) y cuyos vectores de dirección son $\vec{u} = (2, 4, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, tiene como ecuación vectorial

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + \lambda \cdot (2, 4, -1) + \mu \cdot (-1, 1, 2) \ ; \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Al variar los valores de **λ, μ**, se van obteniendo los distintos puntos contenidos en el plano.

– Para λ = 1, μ = –1, se obtiene el punto (4, 3, –1) perteneciente al plano.

– Para λ = –2, μ = 3, se obtiene el punto (–6, –5, 10) perteneciente al plano.

– Para λ = 0, μ = 0, se obtiene el punto (1, 0, 2) perteneciente al plano.

b) Ecuaciones paramétricas $\pi \equiv \begin{cases} x = a + \lambda \cdot u_1 + \mu \cdot v_1 \\ y = b + \lambda \cdot u_2 + \mu \cdot v_2 \\ z = c + \lambda \cdot u_3 + \mu \cdot v_3 \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

Se obtienen de la ecuación vectorial al igualar respectivamente las coordenadas.

Ejemplo: el plano que pasa por el punto P(1, 0, 2) y cuyos vectores de dirección son $\vec{u} = (2, 4, -1)$ $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, tiene como ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda - \mu \\ y = 0 + 4\lambda + \mu \\ z = 2 - \lambda + 2\mu \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

c) Ecuación general o implícita $\pi \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad A, B, C, D \in \mathbb{R}$

Como los vectores $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$ son linealmente dependientes por pertenecer al mismo plano vectorial, ha de ser rango($\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$, $\vec{v}$) = 2 y por lo tanto, $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$

Ejemplo: el plano que pasa por el punto P(1, 0, 2) y cuyos vectores de dirección son $\vec{u} = (2, 4, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$, tiene como ecuación general $3x - y + 2z - 7 = 0$

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z-2 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \ \Rightarrow \ 8 \cdot (x-1) + 1 \cdot y + 2 \cdot (z-2) + 4 \cdot (z-2) - 4 \cdot y + 1 \cdot (x-1) = 0 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ 8x - 8 + y + 2z - 4 + 4z - 8 - 4y + x - 1 = 0 \ \Rightarrow \ 9x - 3y + 6z - 21 = 0 \ \Rightarrow \ 3x - y + 2z - 7 = 0$$

Acerca de la ecuación general del plano

1. Vector normal al plano.

De la ecuación general se puede obtener **un vector normal al plano**: $\vec{n} = (A, B, C)$

Se dice que el vector $\vec{n} = (A, B, C)$ es el vector asociado o normal al plano $Ax + By + Cz + D = 0$. Este vector es ortogonal a cualquiera de los vectores de dirección de dicho plano.

<u>Demostración</u>:

De la ecuación $\begin{vmatrix} x-a & y-b & z-c \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0$, se deduce que $\vec{n} = (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1)$

Este vector $\vec{n}$ es ortogonal a cada uno de los vectores $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, ya que los respectivos productos escalares son iguales a cero: $\vec{u} \bullet \vec{n} = 0$ $\quad \vec{v} \bullet \vec{n} = 0$

<u>Ejemplo</u>: el plano de ecuación $3x - y + 2z - 7 = 0$, tiene como vector normal $\vec{n} = (3, -1, 2)$

Obsérvese que, efectivamente, $\vec{n}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$:

$\vec{u} \bullet \vec{n} = (2, 4, -1) \bullet (3, -1, 2) = 6 - 4 - 2 = 0$ $\qquad \vec{v} \bullet \vec{n} = (-1, 1, 2) \bullet (3, -1, 2) = -3 - 1 + 4 = 0$

2. Vectores de dirección del plano.

De la ecuación general se pueden obtener **dos vectores de dirección del plano**.

Esto se consigue identificando cualesquiera dos de las coordenadas genéricas (x, y, z) con dos parámetros λ, μ y despejando la tercera coordenada en función de los mismos.

<u>Ejemplo</u>: dos vectores de dirección del plano de ecuación $3x - y + 2z - 7 = 0$ son los vectores $\vec{a} = (1, 3, 0)$ y $\vec{b} = (0, 2, 1)$. Para obtenerlos, se procede de la siguiente forma:

Tras identificar $x = \lambda$, $z = \mu$, en la ecuación $3x - y + 2z - 7 = 0$, se despeja $y = -7 + 3\lambda + 2\mu$.

De esta forma, unas ecuaciones paramétricas de dicho plano serían $\begin{cases} x = 0 + \lambda + 0\mu \\ y = -7 + 3\lambda + 2\mu \\ z = 0 + 0\lambda + \mu \end{cases}$

Los coeficientes que multiplican al parámetro λ determinan al vector director $\vec{a} = (1, 3, 0)$ mientras que los que multiplican al parámetro μ determinan al vector director $\vec{b} = (0, 2, 1)$

Obsérvese que los vectores $\vec{a} = (1, 3, 0)$ y $\vec{b} = (0, 2, 1)$ no son exactamente los mismos vectores $\vec{u} = (2, 4, -1)$ y $\vec{v} = (-1, 1, 2)$ que se podría esperar, pero sí es seguro que cada uno de ellos es combinación lineal de ambos: de hecho, $\vec{a} = \frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$ $\qquad \vec{b} = \frac{1}{3}\vec{u} + \frac{2}{3}\vec{v}$

ECUACIONES DE UNA RECTA

a) Ecuación vectorial $r \equiv \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + t \cdot \vec{u} \qquad t \in \mathbb{R}$

$$r \equiv (x, y, z) = (a, b, c) + t \cdot (u_1, u_2, u_3)\,;\ t \in \mathbb{R} \quad \text{donde:}$$

X(x, y, z) son las coordenadas de un punto general de la recta (de los infinitos que tiene)

P(a, b, c) son las coordenadas de un punto concreto de la recta

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ es un vector de dirección de la recta

Para cada valor distinto del **parámetro t**, se obtiene un punto distinto (x, y, z) de la recta.

<u>Ejemplo</u>: la recta que pasa por el punto P(–2, 5, 4) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1, 2)$, tiene como ecuación vectorial $(x, y, z) = (-2, 5, 4) + t \cdot (3, 1, 2)\,;\ t \in \mathbb{R}$

Al variar el valor de **t**, se van obteniendo los distintos puntos contenidos en la recta:

t	…	–2	–1	0	1	2	…
Punto	(…, …, ...)	(–8, 3, 0)	(–5, 4, 2)	(–2, 5, 4)	(1, 6, 6)	(4, 7, 8)	(..., ..., ...)

b) Ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = a + t \cdot u_1 \\ y = b + t \cdot u_2 \\ z = c + t \cdot u_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Se obtienen de la ecuación vectorial al igualar respectivamente las coordenadas.

<u>Ejemplo</u>: la recta que pasa por el punto P(–2, 5, 4) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1, 2)$,

tiene como ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + t \\ z = 4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) Ecuación en forma continua $r \equiv \dfrac{x - a}{u_1} = \dfrac{y - b}{u_2} = \dfrac{z - c}{u_3}$

Se obtiene de las ecuaciones paramétricas despejando el parámetro t en cada una de ellas e igualando las expresiones resultantes.

<u>Ejemplo</u>: la recta que pasa por el punto P(–2, 5, 4) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1, 2)$ tiene como ecuación en forma continua $\dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 5}{1} = \dfrac{z - 4}{2}$

d) Ecuaciones cartesianas (intersección de 2 planos no paralelos)

$r \equiv \begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0 \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0 \end{cases}$ donde A, B, C, D, A´, B´, C´, D´ $\in \mathbb{R}$

Se obtienen de la ecuación en forma continua efectuando los productos cruzados y dejando todos los términos a un lado del signo igual.

Obsérvese que la ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$ sería la ecuación general de un plano π_1, y que la ecuación $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ sería la ecuación general de otro plano π_2.

Por ello, se dice que la recta está expresada como intersección de dos planos: $r = \pi_1 \cap \pi_2$

Ejemplo: la recta que pasa por el punto P(–2, 5, 4) y cuyo vector de dirección es $\vec{u}=(3,1,2)$ tiene como ecuaciones cartesianas $\begin{cases} x-3y+17=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$

$$\frac{x+2}{3}=\frac{y-5}{1} \quad\Rightarrow\quad 1\cdot(x+2)=3\cdot(y-5) \quad\Rightarrow\quad x+2=3y-15 \quad\Rightarrow\quad x-3y+17=0$$
$$\frac{y-5}{1}=\frac{z-4}{2} \quad\Rightarrow\quad 2\cdot(y-5)=1\cdot(z-4) \quad\Rightarrow\quad 2y-10=z-4 \quad\Rightarrow\quad 2y-z-6=0$$

Acerca de las ecuaciones cartesianas de la recta

1. Vector de dirección de la recta.

De las ecuaciones cartesianas se puede obtener **un vector de dirección de la recta**:

$$\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A & B & C \\ A' & B' & C' \end{vmatrix}$$

Demostración: un vector director de la recta es perpendicular a los vectores $\vec{n}$ y $\vec{n}'$, siendo: $\vec{n}=(A,B,C)$ y $\vec{n}'=(A',B',C')$ los vectores normales a cada plano, respectivamente.
Por lo tanto, la dirección de la recta es la del vector resultante del producto vectorial $\vec{n}\times\vec{n}'$

Ejemplo: la recta cuyas ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x-3y+17=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ tiene como dirección el producto vectorial de los vectores normales a cada plano: $\vec{n}=(1,-3,0)$ y $\vec{n}'=(0,2,-1)$

Así pues, el vector de dirección de la recta es $\vec{v}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix}=3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}=(3,1,2)$

2. Vectores normales a la recta linealmente independientes.

De las ecuaciones cartesianas se pueden obtener **dos vectores normales a la recta linealmente independientes**: $\vec{n}=(A,B,C)$ y $\vec{n}'=(A',B',C')$

Ejemplo: la recta cuyas ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x-3y+17=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ tiene como vectores normales a los vectores: $\vec{n}=(1,-3,0)$ y $\vec{n}'=(0,2,-1)$

3. Haz de planos secantes en una recta.

Se llama **haz de planos secantes en una recta** (o que contienen a una recta) al conjunto de todos los planos que pasan por una misma recta.

Si las ecuaciones cartesianas de una recta r son $r\equiv\begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases}$, entonces la ecuación del haz de planos secantes en r es:

$$\alpha\cdot(Ax+By+Cz+D)+\beta\cdot(A'x+B'y+C'z+D')=0 \qquad \alpha,\beta\in\mathbb{R}$$

Para cada pareja de valores que tomen los parámetros $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, se obtiene un plano distinto que contiene a la recta r.

Ejemplo: el haz de planos secantes en la recta $r \equiv \begin{cases} x-3y+17=0 \\ 2y-z-6=0 \end{cases}$ viene dado por la expresión $\alpha \cdot (x-3y+17)+\beta \cdot (2y-z-6)=0$, siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Por ejemplo, para los valores $\alpha = 1, \beta = 3$, se obtiene el plano $\pi \equiv x-6y-3z-1=0$, que contiene a la recta r.

3. Posiciones relativas de dos o tres planos.

A) Posiciones relativas de dos planos

Dados dos planos por sus ecuaciones: $\pi_1 \equiv Ax+By+Cz+D=0 \qquad \pi_2 \equiv A'x+B'y+C'z+D'=0$

Estudiar las posiciones relativas de los dos planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Según el rango de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \end{pmatrix}$$

pueden darse los siguientes casos:

Caso 1. Los dos planos son **secantes** si los coeficientes no son proporcionales.

Si los coeficientes no son proporcionales, entonces rango(M) = rango (M*) = 2. Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones dependen de un parámetro. Éstas son los infinitos puntos de la recta en la que se cortan los planos ($\pi_1 \cap \pi_2 = r$)

Ejemplo: los planos $\pi_1 \equiv x+y-4z+1=0$, $\pi_2 \equiv 2x-y-2z+5=0$ son secantes ya que

$$\text{rango}(M) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \text{rango}(M^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -4 & 1 \\ 2 & -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} = 2$$

La recta de corte tiene por ecuaciones cartesianas $r \equiv \begin{cases} x+y-4z+1=0 \\ 2x-y-2z+5=0 \end{cases}$

Al resolver el sistema, sus infinitas soluciones que son los infinitos puntos de la recta, son

$$r \equiv \{\ x=2t;\ y=3+2t;\ z=1+t\ \} \quad t \in \mathbb{R}$$

Caso 2. Los dos planos son **idénticos**, es decir, son **el mismo plano** si son proporcionales los coeficientes y los términos independientes.

Si hay proporcionalidad entre los coeficientes y los términos independientes, entonces rango(M) = rango (M*) = 1. Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones dependen de dos parámetros. Éstas son los infinitos puntos del único plano.

Ejemplo: los planos $\pi_1 \equiv 3x+y-6z+2=0$, $\pi_2 \equiv 6x+2y-12z+4=0$ son idénticos ya que

$$\text{rango}(M) = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 6 & 2 & -12 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{rango}(M^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & 2 \\ 6 & 2 & -12 & 4 \end{pmatrix} = 1$$

Caso 3. Los dos planos son **paralelos** si son proporcionales los coeficientes pero no los términos independientes.

Si hay proporcionalidad entre los coeficientes pero no en los términos independientes, entonces rango(M) = 1 ≠ rango (M*) = 2. Por lo tanto, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución. Los planos no tienen ningún punto en común: son paralelos**.**

Ejemplo: los planos $\pi_1 \equiv 3x + y - 6z + 9 = 0$, $\pi_2 \equiv 9x + 3y - 18z - 4 = 0$ son paralelos ya que

$$\text{rango}(M) = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 \\ 9 & 3 & -18 \end{pmatrix} = 1 \qquad \text{rango}(M^*) = \text{rango}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -6 & 9 \\ 9 & 3 & -18 & -4 \end{pmatrix} = 2$$

Haz de planos paralelos

Se llama **haz de planos paralelos** al conjunto de todos los planos paralelos a uno dado. Si un plano tiene ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces la ecuación del haz de planos paralelos es

$$Ax + By + Cz + K = 0 \,,\ K \in \mathbb{R}$$

Ejemplo: para hallar la ecuación de un plano paralelo al plano $\pi \equiv 3x - 5y + z - 2 = 0$ y que pase por el punto P(1, 2, –4), se sustituyen las coordenadas de P en la ecuación del haz de planos paralelos $3x - 5y + z + K = 0$, y a continuación, se despeja K:

$$3 \cdot 1 - 5 \cdot 2 + (-4) + K = 0 \quad \Rightarrow \quad 3 - 10 - 4 + K = 0 \quad \Rightarrow \quad K = 11$$

Por lo tanto, el plano que se quiere averiguar es $\pi' \equiv 3x - 5y + z + 11 = 0$

B) Posiciones relativas de tres planos

Dados tres planos por sus respectivas ecuaciones generales:

$\pi_1 \equiv Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \pi_2 \equiv A'x + B'y + C'z + D' = 0 \qquad \pi_3 \equiv A''x + B''y + C''z + D'' = 0$

Estudiar las posiciones relativas de los tres planos equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Según los valores de los rangos de las matrices

$$M = \begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^* = \begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

se presentan los siguientes casos:

	rango(M)	rango (M*)	Sistema	Posición relativa
Caso 1	3	3	Compatible determinado	Tres planos secantes en un punto.
Caso 2	2	3	Incompatible	– Secantes dos a dos. – Dos paralelos cortados por el tercero.
Caso 3	2	2	Compatible indeterminado	– Tres planos secantes en una recta. – Dos idénticos cortados por el tercero.
Caso 4	1	2	Incompatible	– Tres planos paralelos. – Dos idénticos y paralelos al tercero.
Caso 5	1	1	Compatible indeterminado	Tres planos idénticos.

4. Posiciones relativas de una recta y un plano.

Se consideran una recta y un plano dados por sus respectivas ecuaciones cartesianas:

$$r \equiv \begin{cases} Ax+By+Cz+D=0 \\ A'x+B'y+C'z+D'=0 \end{cases} \qquad \pi \equiv A''x+B''y+C''z+D''=0$$

Estudiar las posiciones relativas de la recta y el plano equivale a discutir el sistema formado por sus ecuaciones. Se pueden presentar tres casos según el rango de las matrices

$$M=\begin{pmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{pmatrix} \qquad M^*=\begin{pmatrix} A & B & C & D \\ A' & B' & C' & D' \\ A'' & B'' & C'' & D'' \end{pmatrix}$$

Caso 1. Si rango(M) = rango (M*) = 3, entonces el sistema es compatible determinado y tiene una única solución. Por lo tanto, la recta y el plano se cortan en un punto P ($\pi \cap r = P$) y se dice que son **secantes.**

Ejemplo: la recta $r \equiv \begin{cases} x+2y+1=0 \\ 3y+z+2=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x+y-2z-3=0$ son secantes ya que

$$\text{rango}(M)=\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}=3 \qquad \text{rango}(M^*)=\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}=3$$

El punto de corte es la única solución del sistema: P(–1, 0, –2)

Caso 2. Si rango(M) = rango (M*) = 2, entonces el sistema es compatible indeterminado y sus infinitas soluciones dependen de un parámetro. Por lo tanto, la recta r **está contenida en el plano** π **(**$r \subset \pi$**).**

Ejemplo: la recta $r \equiv \begin{cases} 3x-y-5=0 \\ y-3z-4=0 \end{cases}$ está contenida en el plano $\pi \equiv x-y+2z+1=0$ ya que

$$\text{rango}(M)=\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}=2 \qquad \text{rango}(M^*)=\text{rango}\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -3 & -4 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}=2$$

Caso 3. Si rango(M) = 2 y rango (M*) = 3, entonces el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución. Por lo tanto, la recta y el plano son **paralelos.**

Ejemplo: la recta $r \equiv \begin{cases} x-4y+7=0 \\ 2y-z-5=0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 4x-2y-7z+1=0$ son paralelos ya que

$$\text{rango}(M)=\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}=2 \qquad \text{rango}(M^*)=\text{rango}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 4 & -2 & -7 & 1 \end{pmatrix}=3$$

5. Posiciones relativas de dos rectas.

Se consideran dos rectas dadas por un punto y un vector de dirección:

r pasa por $P(p_1, p_2, p_3)$ y tiene como dirección al vector $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \vec{0}$

s pasa por $Q(q_1, q_2, q_3)$ y tiene como dirección al vector $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \neq \vec{0}$

Estudiar las posiciones relativas de las dos rectas equivale a analizar:

– La dependencia lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$, en un primer paso.

– La dependencia lineal de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$, en un segundo paso, si fuera necesario.

Según esto, se presentan los siguientes casos:

Caso 1.1. Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes (proporcionales), entonces las rectas tienen la misma dirección.

Si al sustituir las coordenadas de un punto cualquiera de una de ellas en la ecuación de la otra, **no** se satisface la ecuación, entonces las rectas son **paralelas**.

Ejemplo: las rectas $r \equiv \begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 + 2t \\ z = 4 + t \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x-1}{6} = \dfrac{y-5}{4} = \dfrac{z-2}{2}$ son paralelas ya que

los vectores de dirección $\vec{u} = (3, 2, 1)$ y $\vec{v} = (6, 4, 2)$ son proporcionales, y un punto cualquiera de r, por ejemplo P(–1, 2, 4) **no** pertenece a la recta s, ya que no satisface su ecuación.

Caso 1.2. Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ son linealmente dependientes (proporcionales), entonces las rectas tienen la misma dirección.

Si al sustituir las coordenadas de un punto cualquiera de una de ellas en la ecuación de la otra, **sí** se satisface la ecuación, entonces las rectas son **idénticas**.

Ejemplo: las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 5 - 4t \\ z = 6 - 2t \end{cases}$ y $s \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-3}{2} = z - 5$ son idénticas ya que

los vectores de dirección $\vec{u} = (2, -4, -2)$ y $\vec{v} = (-1, 2, 1)$ son proporcionales, y un punto cualquiera de r, por ejemplo P (1, 5, 6) **sí** pertenece a la recta s, ya que sí satisface su ecuación.

Caso 2.1. Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ no son linealmente dependientes (no proporcionales), entonces las rectas no tienen la misma dirección.

Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$ son linealmente dependientes (son coplanarios), es decir, si

$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1 - p_1 & q_2 - p_2 & q_3 - p_3 \end{vmatrix} = 0$, entonces las rectas son **secantes**.

Ejemplo: las rectas $r \equiv \dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ y $s \equiv \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z+4}{5}$ son secantes ya que

los vectores de dirección $\vec{u} = (2, -1, 2)$ y $\vec{v} = (4, 3, 5)$ no son proporcionales y si se eligen los puntos P (3, 3, –1) de r y Q (1, –1, –4) de s ocurre que $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$ son coplanarios:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ 1-3 & -1-3 & -4-(-1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & 5 \\ -2 & -4 & -3 \end{vmatrix} = -18+10-32+12+40-12=0$$

Se puede averiguar el punto de corte de ambas rectas resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones. Si se pasa una de ellas a ecuaciones paramétricas, por ejemplo, $r \equiv \begin{cases} x = 3+2t \\ y = 3-t \\ z = -1+2t \end{cases}$ y se sustituyen en la ecuación de s, se tiene que: $\frac{3+2t-1}{4} = \frac{3-t+1}{3} = \frac{-1+2t+4}{5} \quad \Rightarrow \quad t=1$

$\Rightarrow$ { x = 3 + 2 · 1, y = 3 – 1, z = –1 + 2 · 1 }. Luego el punto de corte es C(5, 2, 1)

Caso 2.2. Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ no son linealmente dependientes (no proporcionales), entonces las rectas no tienen la misma dirección.
Si los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$ son linealmente independientes (no son coplanarios), es decir, si $\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ q_1-p_1 & q_2-p_2 & q_3-p_3 \end{vmatrix} \neq 0$, entonces las rectas **se cruzan**.

<u>Ejemplo</u>: las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1-t \\ y = 2+3t \\ z = 4-2t \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -2+3t \\ y = 1-2t \\ z = -1-4t \end{cases}$ se cruzan ya que

los vectores de dirección $\vec{u} = (-1, 3, -2)$ y $\vec{v} = (3, -2, -4)$ no son proporcionales y si se eligen los puntos P (1, 2, 4) de r y Q (–2, 1, –1) de s, se tiene que $\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}$ no son coplanarios:

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -2-1 & 1-2 & -1-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -2 & -4 \\ -3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -10+36+6+12+4+45 = 93 \neq 0$$