



ACTIVIDADES

1. Ángulos. Perpendicularidad.

1. Hallar el ángulo que forman las rectas $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = -z$ $s \equiv \{ x = 3 - t; y = 2 + t; z = 1 - t \}$

2. En cada uno de los siguientes casos, calcular el ángulo que forman los planos π y π' :

a) $\pi \equiv x - 3y + 4z = 1$ $\pi' \equiv 2x + 2y + z = 3$ b) $\pi \equiv -x + 2y + z = 1$ $\pi' \equiv x + y + 2z = 3$

3. En cada uno de los siguientes casos, calcular el ángulo que forman la recta r y el plano π :

a) $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 4 \\ x + z = 2 \end{cases}$ $\pi \equiv x + y = 3$ b) $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = z + 3$ $\pi \equiv 3x + 4y + 5 = 0$

4. Dados la recta $r \equiv \frac{x}{2} = y - 2 = z + 3$ y el plano $\pi \equiv x + y = 5$, hallar el punto de corte entre ambos y el ángulo que forman.

5. Dado el plano $\pi \equiv mx + 2z - 1 = 0$

a) Discutir según los valores de m , su posición relativa respecto al plano XY .

b) Hallar los valores de m para que la recta normal al plano π que pasa por el origen, forme un ángulo de 90° con el plano XY .

6. Hallar la ecuación general del plano que contiene al punto $P(1, -1, 0)$ y es perpendicular a la dirección $\vec{n} = (1, 2, -1)$.

7. Dados los planos $\pi \equiv x + 2y - z = 4$ y $\pi' \equiv 2x + 4y + kz = 3$, averiguar el valor de k para que:

a) π y π' sean paralelos.

b) π y π' sean perpendiculares.

8. Determinar el valor de m para que los planos $\pi \equiv 3x + my - z = -3$ y $\pi' \equiv 2x - y + mz = 1$ sean perpendiculares.

9. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta r que pasa por el punto P y es perpendicular al plano π :

a) $P(1, 0, 1)$ $\pi \equiv x + y - 1 = 0$

b) $P(2, 1, -1)$ $\pi \equiv x - 2y + 3z = 1$

c) $P(2, -1, -2)$ π pasa por $A(1, 1, 1)$ $B(0, -2, 2)$ $C(-1, 0, 2)$

d) $P(0, 0, 0)$ $\pi \equiv x + 2y + z = 6$

10. a) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta r perpendicular al plano $\pi \equiv x + 2y - z = -1$ y que pasa por el punto $P(0, 1, 0)$.

b) Entre los planos que contienen a la recta r , hallar la ecuación general de uno que también contenga al punto $Q(1, 0, 1)$.

11. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{a} = \frac{z-1}{4}$ y el plano $\pi \equiv x + 3y + bz = 1$, determinar los valores de a y b para que r y π sean perpendiculares.

12. Dados la recta $r \equiv \frac{x-1}{m} = \frac{y}{4} = \frac{z-1}{2}$ y el plano $\pi \equiv 2x - y + nz = 0$, hallar m y n para que:

a) La recta r sea perpendicular al plano π b) La recta r esté contenida en el plano π

13. En cada uno de los siguientes casos, hallar el valor de k para que la recta determinada por los puntos A y B sea paralela al plano π :

a) $A(1, 2, 3)$ $B(3, k, 1)$ $\pi \equiv x + y + z = -1$ b) $A(1, 0, -1)$ $B(k, 2, 3)$ $\pi \equiv 2x - y + z = 3$

14. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es perpendicular a la recta r :

a) $P(0, 1, 2)$ $r \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases}$ b) $P(2, 1, -1)$ $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$ c) $P(0, 1, 0)$ $r \equiv x + 1 = \frac{y+2}{2} = z - 1$

15. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto $P(1, 1, 1)$ y es perpendicular a los planos $\pi \equiv x - y + z = -3$ y $\pi' \equiv x + 2z = 1$.

16. Hallar la ecuación cartesiana del plano perpendicular al segmento de extremos $A(1, 2, 1)$ y $B(-1, 0, 3)$ y que pasa por su punto medio.

17. Hallar la ecuación general del plano perpendicular al segmento de extremos $A(1, -1, 0)$ y $B(0, 1, 0)$ y que pasa por el punto A .

18. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por los puntos $A(1, 3, -1)$ y $B(4, 2, -2)$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - z + 3 = 0$.

19. Hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta $r \equiv \frac{x-1}{2} = y = \frac{z-2}{-1}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv 2x - y + 2 = 0$.

20. Hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto $A(1, 1, 2)$, es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x = 1 \end{cases}$ y es perpendicular al plano $\pi \equiv x + y - 2z = 3$.

21. Dados el punto $A(3, 1, -1)$ y la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{3}$, determinar el punto B de r , tal que la recta que pasa por A y B , sea paralela al plano $\pi \equiv 3x - 2y + z = 4$.

22. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto P, que se apoya en (corta a) la recta r y es paralela al plano π :

a) $P(1, 0, 1)$ $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2y - z = 2 \end{cases}$ $\pi \equiv 2x + y - z = 0$ b) $P(1, 2, -1)$ $r \equiv x = y = z$ $\pi \equiv 3x + 2y - z = 4$

23. En cada uno de los siguientes casos, hallar el punto simétrico de P respecto del plano π :

a) $P(1, 0, -1)$ $\pi \equiv 2x + 2y - z = 6$ b) $P(0, 1, 2)$ $\pi \equiv x - 3z - 4 = 0$
c) $P(2, -1, 3)$ $\pi \equiv 3x + 2y + z = 5$ d) $P(0, 0, 0)$ $\pi \equiv x + 2y + z = 6$

24. En cada uno de los siguientes casos, hallar el punto simétrico de P respecto de la recta r:

a) $P(0, 1, 2)$ $r \equiv x - 3 = y - 4 = z - 2$ b) $P(1, 1, 1)$ $r \equiv \begin{cases} 3x - 2y = 3 \\ y + 3z = -3 \end{cases}$
c) $P(0, 1, -1)$ $r \equiv \begin{cases} y - 1 = 0 \\ x + z = 3 \end{cases}$ d) $P(1, -1, 0)$ $r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = z$

25. En cada uno de los siguientes casos, determinar la ecuación general del plano respecto del cual los puntos A y B son simétricos:

a) $A(0, 1, 1)$ $B(2, 1, 3)$ b) $A(1, 3, -1)$ $B(3, -1, -1)$ c) $A(-1, -2, -1)$ $B(1, 0, 1)$

26. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto P y que corta perpendicularmente a la recta r:

a) $P(1, 3, 2)$ $r \equiv \frac{x-5}{3} = y-1 = \frac{z-1}{0}$ b) $P(3, 2, 1)$ $r \equiv x-1 = -y+1 = -z$
c) $P(2, 1, 3)$ $r \equiv \text{eje OZ}$ d) $P(-5, 3, 1)$ $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y-3}{2} = \frac{z-2}{-1}$

27. Dados el plano $\pi \equiv 2x + y - z + 2 = 0$ y la recta $r \equiv \frac{x-5}{-2} = y = \frac{z-6}{m}$

- a) Determinar la posición relativa de ambos según los valores de m.
b) Para $m = -3$, hallar la ecuación general del plano que contiene a r y es perpendicular a π .
c) Para $m = -3$, hallar la ecuación general del plano que contiene a r y es paralelo a π .

28. Dados los puntos $A(0, 3, -1)$ y $B(0, 1, m)$ y el plano $\pi \equiv x - y + z = 0$

- a) Averiguar el valor de m para que la recta que pasa por A y B sea paralela al plano π .
b) Para $m = 2$, determinar el plano que contiene a los puntos A y B y es perpendicular a π .

29. Dadas la recta $r \equiv x = 2y = -z$ y la recta que pasa por $A(1, -1, 1)$ y $B(2, 1, 0)$, hallar la ecuación en forma continua de la recta perpendicular a ambas y que pasa por $P(1, 2, 1)$.

30. Dados el punto $P(1, -1, 0)$ y las rectas $r \equiv \begin{cases} x - y = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$ $r' \equiv \begin{cases} x - y + z = 3 \\ y + z = 1 \end{cases}$, determinar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por P y es perpendicular a ambas.

31. Dadas las rectas $r \equiv x - 1 = y - 2 = \frac{z - 1}{2}$ $s \equiv \frac{x - 3}{-2} = \frac{y - 3}{-1} = \frac{z + 1}{2}$, hallar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por la intersección de r y s y es perpendicular a ambas.

32. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que corta perpendicularmente a las rectas r y r' (perpendicular común a las rectas r y r'):

a) $r \equiv x - 1 = \frac{y - 1}{0} = \frac{z}{-1}$ $r' \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases}$ b) $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$ $r' \equiv \begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$

c) $r \equiv \frac{x - 1}{-1} = y = \frac{z - 2}{0}$ $r' \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - z + 1 = 0 \end{cases}$ d) $r \equiv \frac{x}{2} = \frac{y - 1}{0} = \frac{z}{0}$ $r' \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

33. Dadas las rectas $r \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{m} = z$ $s \equiv \begin{cases} x + nz = -2 \\ y - z = -3 \end{cases}$, hallar los valores de m y n para que las rectas r y s se corten perpendicularmente.

2. Distancias.

34. Dados el punto $P(1, 0, -2)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 5 \\ 2x + y - 4z = 7 \end{cases}$

- a) Determinar las ecuaciones cartesianas de la recta perpendicular a r que pasa por P .
b) Calcular la distancia entre el punto P y su simétrico respecto de la recta r .

35. Dados el punto $P(1, -3, 7)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} 3x - y - z = 2 \\ x + y - z = -6 \end{cases}$ calcular la distancia entre P y su simétrico respecto de la recta r .

36. Hallar la ecuación general del plano que corta a los ejes de coordenadas en puntos situados a dos unidades de distancia del origen.

37. En cada uno de los siguientes casos, hallar el punto de la recta r que equidista de A y B :

a) $A(2, 1, 2)$ $B(0, 4, 1)$ $r \equiv x = y - 2 = \frac{z - 3}{2}$ b) $A(1, 2, 3)$ $B(2, 1, 0)$ $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$

c) $A(0, -1, 3)$ $B(2, 3, -1)$ $r \equiv x + 2 = \frac{y - 2}{2} = \frac{z - 3}{3}$ d) $A(1, 0, -1)$ $B(2, 1, 1)$ $r \equiv x - 5 = y = \frac{z + 2}{-2}$

38. En cada uno de los siguientes casos, hallar la distancia del punto P al plano π :

a) $P(1, 0, -1)$ $\pi \equiv x - y - z = -1$ b) $P(-2, -1, 0)$ $\pi \equiv 3x + 2y + 6z = 41$
c) $P(2, -1, 3)$ $\pi \equiv 3x + 2y + z = 5$ d) $P(-1, 2, 6)$ $\pi \equiv x + y - 4z + 5 = 0$

39. Dados la recta $r \equiv x - 1 = y = \frac{z + 2}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x + y + z = 0$, determinar:

- a) El punto en el que la recta r corta al plano π .
b) Los puntos de la recta r que distan $\sqrt{3}$ u. del plano π .

40. Dados la recta $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+1}{2}$ y el plano $\pi \equiv -x + 2y + 2z = 1$, determinar los puntos de la recta r que distan 3 u. del plano π .

41. En cada uno de los siguientes casos, determinar los puntos de la recta r que equidistan de los planos π_1 y π_2 :

a) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 2(y-1) = z-3 \end{cases} \quad \begin{matrix} \pi_1 \equiv x + z - 1 = 0 \\ \pi_2 \equiv y - z - 3 = 0 \end{matrix} \quad \text{b) } r \equiv \frac{x+1}{2} = y = \frac{z}{-1} \quad \begin{matrix} \pi_1 \equiv 4x + 3z + 4 = 0 \\ \pi_2 \equiv 2x + 2y + z = 2 \end{matrix}$

c) $r \equiv \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = z-1 \quad \begin{matrix} \pi_1 \equiv x = 0 \\ \pi_2 \equiv y = 0 \end{matrix} \quad \text{d) } r \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{2} \quad \begin{matrix} \pi_1 \equiv x + y + z = 0 \\ \pi_2 \equiv x - y + z = 0 \end{matrix}$

42. Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ y - 2z = 3 \end{cases}$, determinar la ecuación general de los planos perpendiculares a la recta r y que disten tres unidades de P .

43. Dados el punto $P(1, 1, 1)$ y la recta $r \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases}$, determinar la ecuación general de los planos que contienen a la recta r y que distan dos unidades de P .

44. En cada uno de los siguientes casos, hallar la distancia entre los planos π y π' :

a) $\pi \equiv 2x + y - 2z = 1 \quad \pi' \equiv 4x + 2y - 4z = -4 \quad \text{b) } \pi \equiv 3x + 4z = 15 \quad \pi' \equiv 3x + 4z = -10$

45. a) Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta r que pasa por el origen de coordenadas y es paralela a los planos $\pi_1 \equiv x + y + z = 3\sqrt{3}$ y $\pi_2 \equiv -x + y + z = 2$.

b) Hallar la distancia de la recta r al plano π_1 .

46. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ -y + z + 5 = 0 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv 2x + y - mz = 1$

a) Averiguar el valor de m para que sean paralelos.

b) Para $m = -1$, calcular la distancia entre la recta r y el plano π .

47. En cada uno de los siguientes casos, hallar la distancia entre el punto P y la recta r :

a) $P(0, 0, 1) \quad r \equiv \{ x = t; y = 1 + 2t; z = -2 + 2t \} \quad \text{b) } P(1, 0, -1) \quad r \equiv \begin{cases} x - z = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

c) $P(-2, -1, 0) \quad r \equiv \begin{cases} x + 3y + 1 = 0 \\ 4y - z + 7 = 0 \end{cases} \quad \text{d) } P(2, 0, 3) \quad r \equiv \begin{cases} x + z - 1 = 0 \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

48. Dadas las rectas $r \equiv \{ x = 1 + 2\lambda; y = 1 - \lambda; z = 1 \}$, $s \equiv \begin{cases} x + 2y = -1 \\ z = -1 \end{cases}$

a) ¿Son coplanarias? En caso afirmativo, hallar la ecuación general del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en las rectas r y s , respectivamente, calcular su área.

49. En cada uno de los siguientes casos, hallar la distancia entre las rectas r y s :

$$\begin{array}{ll} \text{a) } r \equiv \frac{x}{4} = y - 2 = \frac{z-1}{3} & s \equiv \frac{x+1}{4} = y - 1 = \frac{z}{3} \\ \text{b) } r \equiv \begin{cases} 3x - y = 4 \\ z = 2 \end{cases} & s \equiv \begin{cases} x = -5 \\ 2y + 3z = 17 \end{cases} \\ \text{c) } r \equiv x - 1 = \frac{y-1}{0} = \frac{z}{-1} & s \equiv \begin{cases} x = 0 \\ z + 1 = 0 \end{cases} \\ \text{d) } r \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} & s \equiv \begin{cases} x - 2y + 9 = 0 \\ x + z + 1 = 0 \end{cases} \end{array}$$

50. Hallar la ecuación general de los planos paralelos al plano $\pi \equiv 6x - 3y + 2z + 1 = 0$, situados a dos unidades de distancia.

3. Áreas y volúmenes.

51. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de corte del plano π con los ejes de coordenadas:

$$\text{a) } \pi \equiv 3x + 2y - 3z = 6 \quad \text{b) } \pi \equiv 2x + 2y - z = 6 \quad \text{c) } \pi \equiv 2x + 3y + 4z = 12$$

52. Hallar la ecuación de un plano que sea paralelo al plano $\pi \equiv x + y + z = 1$ y forme con los ejes de coordenadas un triángulo de área $18\sqrt{3} \text{ u}^2$.

53. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ y los puntos $A(0, 1, 1)$ y $B(2, 1, 3)$, determinar:

- a) Un punto C de la recta r , para que el triángulo ABC tenga un ángulo recto en el vértice A .
- b) Un punto D de la recta r , para que el triángulo ABD tenga área igual a $\sqrt{2} \text{ u}^2$.

54. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ y los puntos $B(1, 2, -3)$ y $C(9, -1, 2)$, calcular:

- a) Las coordenadas de un punto A de r , de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A .
- b) El área del triángulo ABC .

55. Dados la recta $r \equiv x - 1 = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-1}$ y el plano $\pi \equiv x - y + z + 1 = 0$, calcular el área del triángulo ABC , siendo A el punto de intersección de la recta r con el plano π ; $B(2, 1, 2)$ un punto de la recta r y el vértice C la proyección ortogonal del punto B sobre el plano π .

56. Dado el tetraedro de vértices $A(0, 0, 0)$, $B(1, 1, 0)$, $C(0, 1, 3)$ y $D(1, 0, 3)$, calcular la medida de la altura trazada desde el vértice A de dicho tetraedro.

- 57. a) Dado el plano $\pi \equiv x + 3y + 2z - 5 = 0$, calcular el volumen del tetraedro limitado por π y los planos coordenados.
- b) Dado el plano $\pi \equiv x + 2y + z = 6$, calcular el volumen del tetraedro determinado por el origen de coordenadas y los puntos de corte de π con los ejes coordenados.

58. Averiguar un punto de la recta $r \equiv \begin{cases} x - y = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ que junto con los puntos $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ y $C(0, 1, 1)$ formen un tetraedro de volumen $5/6 \text{ u}^3$.

SOLUCIONES

1. $\alpha = 90^\circ$
2. a) $\alpha = 90^\circ$; b) $\alpha = 60^\circ$
3. a) $\alpha = 30^\circ$; b) $\alpha \cong 69^\circ$
4. $P(2, 3, -2)$; $\alpha = 60^\circ$
5. a) Si $m = 0$, son paralelos; si $m \neq 0$, son secantes; b) $m = 0$
6. $\pi \equiv x + 2y - z = -1$
7. a) $k = -2$; b) $k = 10$
8. $m = 3$
9. a) $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$; b) $r \equiv \begin{cases} 2x + y = 5 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases}$; c) $r \equiv \begin{cases} x - 2y = 4 \\ 5y - z = -3 \end{cases}$; d) $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$
10. a) $r \equiv \begin{cases} 2x - y = -1 \\ y + 2z = 1 \end{cases}$; b) $\pi' \equiv x - 2y - 3z = -2$
11. $a = 6$, $b = 2$
12. a) $m = -8$, $n = -1/2$; b) $m = 4$, $n = -2$
13. a) $k = 2$; b) $k = 0$
14. a) $\pi \equiv x - y + 1 = 0$; b) $\pi \equiv -x + y + 2z + 3 = 0$; c) $\pi \equiv x + 2y + z - 2 = 0$
15. $\pi'' \equiv 2x + y - z = 2$
16. $\pi \equiv x + y - z = -1$
17. $\pi \equiv x - 2y - 3 = 0$
18. $\pi' \equiv x + y + 2z = 2$
19. $\pi' \equiv x + 2y + 4z = 9$
20. $\pi' \equiv 4x - 2y + z = 4$
21. $B(3, 4, 5)$
22. a) $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y + z = 1 \end{cases}$; b) $s \equiv \begin{cases} y = 2 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$
23. a) $Q(7/3, 4/3, -5/3)$; b) $Q(2, 1, -4)$; c) $Q(8/7, -11/7, 19/7)$; d) $Q(2, 4, 2)$
24. a) $Q(2, 3, -2)$; b) $Q(9/7, -4/7, -22/7)$; c) $Q(4, 1, 3)$; d) $Q(1, -3, 0)$
25. a) $\pi \equiv x + z = 3$; b) $\pi \equiv x - 2y = 0$; c) $\pi \equiv x + y + z + 1 = 0$
26. a) $s \equiv \begin{cases} 3x + y - 6 = 0 \\ x + z - 3 = 0 \end{cases}$; b) $s \equiv \begin{cases} x - 2y = -1 \\ y - z = 1 \end{cases}$; c) $s \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ z = 3 \end{cases}$; d) $s \equiv \frac{x+5}{3} = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-1}{2}$

27. a) Si $m = -3$, son paralelos; si $m \neq -3$, son secantes; b) $\pi' \equiv x - 4y - 2z = -7$;

c) $\pi'' \equiv 2x + y - z = 4$

28. a) $m = -3$; b) $\pi' \equiv x + 3y + 2z - 7 = 0$

29. $s \equiv x - 1 = \frac{y - 2}{0} = z - 1$

30. $s \equiv \frac{x - 1}{2} = \frac{y + 1}{-3} = z$

31. $s \equiv \frac{x - 1}{4} = \frac{y - 2}{-6} = z - 1$

32. a) $s \equiv \begin{cases} y = 1 \\ x - z = 1 \end{cases}$; b) $s \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ y + 2z = 4 \end{cases}$; c) $s \equiv \begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$; d) $s \equiv \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y - 1 = 0 \end{cases}$

33. $m = 4$, $n = 5/2$

34. a) $s \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y + z = 0 \end{cases}$; b) $2\sqrt{3}$ u.

35. La distancia es $2\sqrt{3}$ u.

36. $\pi \equiv x + y + z = 2$

37. a) $P(-1, 1, 1)$; b) $P(1, 17/8, 9/8)$; c) $P(-7, -8, -12)$; d) $P(9/2, -1/2, -1)$

38. a) $\sqrt{3}$ u.; b) 7 u.; c) $\frac{\sqrt{14}}{7}$ u.; d) $3\sqrt{2}$ u.

39. a) $P(2, 1, -3)$; b) $A(5, 4, -6)$, $B(-1, -2, 0)$

40. $A(0, 2, 3)$, $B(2, -2, -1)$

41. a) $P(0, 4, 9)$, $Q(0, -4/3, -5/3)$; b) $P(3, 2, -2)$, $Q(0, 1/2, -1/2)$; c) $P(2, 2, 1)$, $Q(4, -4, -1)$; d) $P(-1/3, 0, -4/3)$, $Q(1/2, 5/4, -1/2)$

42. $\pi \equiv 2x + 2y + z + 4 = 0$, $\pi' \equiv 2x + 2y + z - 14 = 0$

43. $\pi \equiv 2x + y + 2z = -1$; $\pi' \equiv 2x - y + 2z = -3$

44. a) 1 u.; b) 5 u.

45. a) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$; b) 3 u.

46. a) $m = -1$; b) $\frac{5\sqrt{6}}{3}$ u.

47. a) $\frac{\sqrt{74}}{3}$ u.; b) 0 u.; c) 5 u.; d) 3 u.

48. a) Son coplanarias porque son paralelas. El plano que las contiene es $\pi \equiv x + 2y - 2z = 1$;
b) El área es $A = 36/5$ u²

49. a) $\sqrt{\frac{7}{13}}$ u.; b) 7 u.; c) $\sqrt{2}$ u.; d) 3 u.

50. $\pi' \equiv 6x - 3y + 2z = 13$, $\pi'' \equiv 6x - 3y + 2z = -15$

51. a) El área es $\sqrt{22}$ u²; b) El área es $27/2$ u²; c) El área es $3\sqrt{29}$ u²

52. $\pi' \equiv x + y + z - 6 = 0$, $\pi'' \equiv x + y + z + 6 = 0$

53. a) C(1, -2, 0); b) Hay dos soluciones: D(-1, 2, 0) ó D(-1/9, 2/9, 0)

54. a) A(1, -2, -2); b) A = $9\sqrt{17}/2$ u²

55. El área es $\frac{16\sqrt{6}}{9}$ u²

56. La medida de la altura es $\frac{6}{\sqrt{19}} \cong 1,38$ u

57. a) El volumen es $125/36$ u³; b) El volumen es 18 u³

58. P(-1, -1, -1) ó Q(7/3, 7/3, 7/3)