DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 8. MÉTRICA EN EL ESPACIO.

1. Ángulos. Perpendicularidad.

1.1. Ángulo formado por dos rectas.

Sean $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de dirección de dos rectas r, s respectivamente. El ángulo α formado entre dichas rectas se despeja de: $\cos\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \dfrac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Ejemplo: para hallar el ángulo formado por $r \equiv \begin{cases} 3x + y = 6 \\ z = 4 \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x}{-3} = \dfrac{y}{6} = \dfrac{z}{5}$, se eligen:

$\vec{u} = (-1, 3, 0)$ como vector de dirección de r $\qquad$ $\vec{v} = (-3, 6, 5)$ como vector de dirección de s

$$\cos\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|(-1)\cdot(-3) + 3\cdot 6 + 0\cdot 5|}{\sqrt{(-1)^2 + 3^2 + 0^2}\cdot\sqrt{(-3)^2 + 6^2 + 5^2}} = \frac{21}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{70}} = \frac{21}{10\sqrt{7}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 37^\circ$$

1.2. Ángulo formado por dos planos.

Sean $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ los vectores normales a dos planos π_1 y π_2 respectivamente. El ángulo α formado entre dichos planos se despeja de: $\cos\alpha = |\cos(\vec{n}_1, \vec{n}_2)| = \dfrac{|\vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$

Ejemplo: para hallar el ángulo formado por $\pi_1 \equiv x - 3y + z - 2 = 0$, $\pi_2 \equiv 2x + 5y - z + 7 = 0$, se eligen: $\vec{n}_1 = (1, -3, 1)$ como vector normal a π_1 $\qquad$ $\vec{n}_2 = (2, 5, -1)$ como vector normal a π_2

$$\cos\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{v})| = \frac{|1\cdot 2 + (-3)\cdot 5 + 1\cdot(-1)|}{\sqrt{1^2 + (-3)^2 + 1^2}\cdot\sqrt{2^2 + 5^2 + (-1)^2}} = \frac{|-14|}{\sqrt{11}\cdot\sqrt{30}} = \frac{14}{\sqrt{330}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 40^\circ$$

1.3. Ángulo formado por una recta y un plano.

Sean $\vec{u}$ un vector director de una recta r, $\vec{n}$ el vector normal a un plano π. El ángulo α formado entre la recta y el plano se despeja de: $\operatorname{sen}\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \dfrac{|\vec{u} \bullet \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

Ejemplo: para hallar el ángulo formado por $r \equiv x = y - 1 = \dfrac{z}{0}$, $\pi \equiv 3x - y + 5z - 4 = 0$, se eligen:

$\vec{u} = (1, 1, 0)$ como vector de dirección de r $\qquad$ $\vec{n} = (3, -1, 5)$ como vector normal a π

$$\operatorname{sen}\alpha = |\cos(\vec{u}, \vec{n})| = \frac{|1\cdot 3 + 1\cdot(-1) + 0\cdot 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\cdot\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 5^2}} = \frac{|2|}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{35}} = \frac{2}{\sqrt{70}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 14^\circ$$

1.4. Perpendicularidad. Proyecciones ortogonales.

Dos **rectas** r, s son **perpendiculares** si el ángulo que forman es de 90º.

Dados $\vec{u}$, $\vec{v}$ dos vectores de dirección de las rectas r, s respectivamente: $r \perp s \Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Dos **planos** π_1 y π_2 son **perpendiculares** si el ángulo que forman es de 90º.

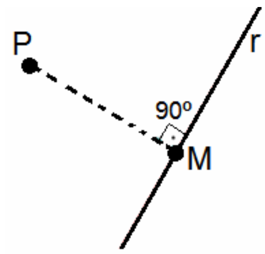
Dados $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$ los vectores normales a los planos π_1, π_2 respectivamente: $\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \vec{n}_1 \bullet \vec{n}_2 = 0$

Una **recta** r y un **plano** π son **perpendiculares** si el ángulo que forman es de 90º.

Dados $\vec{u}$ un vector director de la recta r , $\vec{n}$ el vector normal al plano π: $r \perp \pi \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{n}$

Obsérvese que:
– la **recta** r y el **plano** π son **paralelos** $\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{n} = 0$
– la **recta** r y el **plano** π son **secantes** $\Leftrightarrow \vec{u} \bullet \vec{n} \neq 0$

Proyección ortogonal de un punto sobre una recta



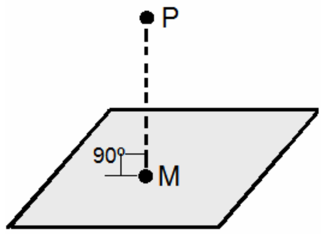
Se llama **proyección ortogonal de un punto** P **sobre una recta** r al punto M $\in$ r, tal que el vector $\overrightarrow{PM}$ es ortogonal a la dirección de la recta r.

Se suele utilizar para averiguar el punto simétrico de otro punto respecto de una recta.

<u>Ejemplo</u>: para hallar M la proyección ortogonal de P(0, 1, 2) sobre $r \equiv x-3 = y-4 = z-2$ se expresa M en forma paramétrica M(3+t, 4+t, 2+t); se construye el vector $\overrightarrow{PM} = (3+t, 3+t, t)$ y se impone la condición $\overrightarrow{PM} \bullet \vec{u} = 0$, siendo $\vec{u}$=(1, 1, 1) la dirección de la recta r.

$$(3+t)\cdot 1 + (3+t)\cdot 1 + t \cdot 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad t = -2 \quad \Rightarrow \quad M(1, 2, 0)$$

Proyección ortogonal de un punto sobre un plano



Se llama **proyección ortogonal de un punto** P **sobre un plano** π al punto M $\in \pi$, tal que el vector $\overrightarrow{PM}$ es ortogonal al plano π, es decir, es paralelo a su vector normal.

Se suele utilizar para averiguar el punto simétrico de otro punto respecto de un plano.

<u>Ejemplo</u>: para hallar M la proyección ortogonal de P(1, 0, –1) sobre $\pi \equiv 2x + 2y - z = 6$ se expresa en forma paramétrica un punto M cualquiera de la recta que pasa por P y es perpendicular al plano (la recta que pasa por P y tiene dirección normal $\vec{n} = (2, 2, -1)$)

Por lo tanto, M(1+2t, 2t, –1–t) y ahora se impone la condición M $\in \pi$

$$2\cdot(1+2t) + 2\cdot(2t) - (-1-t) = 0 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad M\left(\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$

2. Distancias.

2.1. Distancia entre dos puntos.

La distancia entre dos puntos P y Q coincide con el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$: $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right|$

Ejemplo: para calcular la distancia entre los puntos P(1, 3, –1) y Q(5, –2, 7), primero se calcula el vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -5, 8)$ y después $d(P,Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{4^2 + (-5)^2 + 8^2} = \sqrt{16+25+64} = \sqrt{105}$ u.

2.2. Distancia entre un punto y un plano.

La distancia entre un punto P y un plano π es por definición, la distancia entre P y M, donde el punto M es la proyección ortogonal de P sobre el plano π.

En la práctica se suele utilizar el siguiente resultado: si P tiene coordenadas (p_1, p_2, p_3) y el plano π tiene por ecuación $Ax + By + Cz + D = 0$, entonces: $d(P,\pi) = \dfrac{|A \cdot p_1 + B \cdot p_2 + C \cdot p_3 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$

Ejemplo: la distancia entre el punto P(1, 3, –1) y el plano $\pi \equiv 5x - 2y + 4z - 7 = 0$ es igual a

$$d(P,\pi) = \frac{|5 \cdot 1 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-1) - 7|}{\sqrt{5^2 + (-2)^2 + 4^2}} = \frac{|5-6-4-7|}{\sqrt{25+4+16}} = \frac{|-12|}{\sqrt{45}} = \frac{12}{3\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ u.}$$

2.3. Distancia entre dos planos paralelos.

La distancia entre dos planos paralelos π_1 y π_2 es igual a la distancia entre un punto cualquiera de uno de los planos, y el otro plano: $d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1)$ donde $P \in \pi_2$

Ejemplo: para calcular la distancia entre $\pi_1 \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$, $\pi_2 \equiv 3x - 6y + 9z - 9 = 0$
se elige un punto $P(1, -1, 0) \in \pi_2$

$$d(\pi_1, \pi_2) = d(P, \pi_1) = \frac{|1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|1+2-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|2|}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}} = \frac{2\sqrt{14}}{14} = \frac{\sqrt{14}}{7} \text{ u.}$$

2.4. Distancia entre una recta y un plano paralelos.

La distancia entre una recta r y un plano π paralelos es igual a la distancia entre un punto cualquiera de la recta y el plano: $d(r, \pi) = d(P, \pi)$ donde $P \in r$

Ejemplo: para calcular la distancia entre $\pi \equiv x - 2y + 3z - 1 = 0$ y $r \equiv \dfrac{x-5}{-1} = y - 2 = z + 3$

se elige un punto $P(5, 2, -3) \in r$

$$d(r, \pi) = d(P, \pi) = \frac{|1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) - 1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}} = \frac{|5-4-9-1|}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{|-9|}{\sqrt{14}} = \frac{9}{\sqrt{14}} = \frac{9\sqrt{14}}{14} \text{ u.}$$

2.5. Distancia entre un punto y una recta.

La distancia entre un punto P y una recta r es por definición, la distancia entre P y M, donde el punto M es la proyección ortogonal de P sobre la recta r .

En la práctica se suele utilizar el siguiente resultado: si A es un punto cualquiera de r y el vector $\vec{u}$ es la dirección de r, entonces:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|}$$

Esta fórmula se deduce del hecho de que $\vec{u}$, $\overrightarrow{AP}$ determinan un paralelogramo cuya altura es la distancia entre P y r.

<u>Ejemplo</u>: para calcular la distancia entre P (3, 4, 5) y $r \equiv \frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$

se elige un punto A (–1, –2, –5) $\in$ r y un vector de dirección $\vec{u} = (1, 2, -1)$ de r

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{|(4, 6, 10) \wedge (1, 2, -1)|}{|(1, 2, -1)|} = \frac{|(-26, 14, 2)|}{|(1, 2, -1)|} = \frac{\sqrt{(-26)^2 + 14^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{876}}{\sqrt{6}} = \sqrt{146}$$

2.6. Distancia entre dos rectas paralelas.

La distancia entre dos rectas paralelas r y s equivale a la distancia entre un punto cualquiera de una de ellas, y la otra recta: $d(r, s) = d\left(P, r\right)$ donde $P \in s$

<u>Ejemplo</u>: para calcular la distancia entre $r \equiv x + 1 = \frac{y+2}{2} = \frac{z+5}{-1}$ y $s \equiv \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{-2}$

se elige un punto cualquiera de la recta s, por ejemplo, P (1, –1, 2)

Ahora se calcula d(P, r) aplicando la fórmula para la distancia entre un punto y una recta.

Se elige un punto A (–1, –2, –5) $\in$ r y un vector de dirección $\vec{u} = (1, 2, -1)$ de r

$$d(r, s) = d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{AP} \wedge \vec{u}\right|}{|\vec{u}|} = \frac{|(2, 1, 7) \wedge (1, 2, -1)|}{|(1, 2, -1)|} = \frac{|(-15, 9, 3)|}{|(1, 2, -1)|} = \frac{\sqrt{(-15)^2 + 9^2 + 3^2}}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{315}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{105}{2}}$$

2.7. Distancia entre dos rectas que se cruzan.

La distancia entre dos rectas r y s que se cruzan es, por definición, la distancia entre el plano paralelo a la recta s que contiene a la recta r, y el plano paralelo a la recta r que contiene a la recta s.

En la práctica se suele utilizar el siguiente resultado: dados $P \in r$, $Q \in s$ y $\vec{u}, \vec{v}$ dos vectores de dirección de r y s, respectivamente, entonces:

$$d(r, s) = \frac{\left|[\ \vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\ ]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|}$$

Esta fórmula se deduce del hecho de que $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\overrightarrow{PQ}$ determinan un paralelepípedo cuya altura es la distancia entre r y s.

Ejemplo: para calcular la distancia entre las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \\ z = 1 + 2t \end{cases}$, $s \equiv \dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z+1}{0}$

se eligen $P\,(1, 2, 1) \in r$, $\vec{u} = (-3, 1, 2)$ como dirección de r

$Q\,(3, 2, -1) \in s$, $\vec{v} = (-1, 2, 0)$ como dirección de s $\qquad \overrightarrow{PQ} = (2, 0, -2)$

$$d(r,s) = \frac{\left|[\,\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}\,]\right|}{|\vec{u} \wedge \vec{v}|} = \frac{\left\|\begin{matrix} -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{matrix}\right\|}{\left\|\begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{matrix}\right\|} = \frac{|2|}{|(-4, -2, -5)|} = \frac{2}{\sqrt{45}} = \frac{2}{3\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{15}$$

3. Áreas y volúmenes.

3.1. Área de un paralelogramo.

El área de un paralelogramo de vértices A, B, C, D es igual al módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: Área = $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$

Demostración: Base del paralelogramo = $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ Altura del paralelogramo = $\left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \text{sen}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Área del paralelogramo = base · altura = $\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right| \cdot \text{sen}(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$

Ejemplo: el área del paralelogramo de vértices A(2, 1, –1), B(3, –1, 2), C(4, 2, 0), D(3, 5, 4)

se calcula así: Área = $\left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = |(1, -2, 3) \wedge (2, 1, 1)| = |(-5, 5, 5)| = \sqrt{25 + 25 + 25} = \sqrt{75}$

3.2. Área de un triángulo.

El área de un triángulo de vértices A, B, C es igual a la mitad del módulo del producto vectorial de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AC}$: Área = $\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right|$

Ejemplo: el área del triángulo de vértices A(–1, 0, 1), B(1, 4, –3), C(1, 2, –1), se calcula así:

$$\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2} \cdot |(2, 4, -4) \wedge (2, 2, -2)| = \frac{1}{2} \cdot |(0, -4, -4)| = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{0 + 16 + 16} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{32} = 2\sqrt{2}$$

3.3. Volumen de un paralelepípedo.

Un paralelepípedo es un cuerpo geométrico limitado por seis paralelogramos, paralelos dos a dos.

El volumen de un paralelepípedo de vértices A, B, C, D es igual al valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$: $V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$

Ejemplo: el volumen del paralelepípedo de vértices A(1, 1, 1), B(6, 0, 0), C(0, 3, 0), D(0, 0, –6)

se calcula así: $V = \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \left\|\begin{matrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -7 \end{matrix}\right\| = \left|-70-1-1-2-5+7\right| = 72$

3.4. Volumen de un tetraedro.

Un tetraedro es un poliedro de cuatro caras triangulares. Si las caras de un tetraedro son cuatro triángulos equiláteros, se dice que el tetraedro es regular.

El volumen de un tetraedro de vértices A, B, C, D es la sexta parte del valor absoluto del producto mixto de los vectores $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6} \cdot \left|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})\right|$

Ejemplo: el volumen del tetraedro de vértices A(0, 1, 0), B(3, 0, 5), C(0, 0, 4), D(2, 3, 0)

se calcula así: $V = \frac{1}{6} \cdot \left|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}]\right| = \frac{1}{6} \cdot \left\|\begin{matrix} 3 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 0 \end{matrix}\right\| = \frac{1}{6} \cdot \left|0-8+0+10-24\right| = \frac{22}{6} = \frac{11}{3}$