DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 9. PROBABILIDAD.

1. Experimento aleatorio. Espacio muestral.

Un experimento sobre cualquier fenómeno observable del mundo real puede ser de dos tipos: determinista o aleatorio.

– Un **experimento determinista** es aquel cuyo resultado se puede conocer antes de realizarse. En otras palabras, es aquel cuyo resultado no depende del azar, se puede predecir. Por ejemplo, "soltar un bolígrafo en el aire" o "colocarse debajo de una ducha abierta" son experimentos deterministas.

– Un **experimento aleatorio** es aquel cuyo resultado no se puede predecir, es decir, aquel cuyo resultado depende del azar. Por ejemplo, "acertar el número ganador del primer premio de un sorteo" o "acertar el número que va a salir al lanzar un dado" son experimentos aleatorios. Por tanto, en un experimento aleatorio se genera una situación de **incertidumbre**, en la que no se conoce con seguridad o no se puede predecir con certeza el resultado final.

Se llama **espacio muestral** al conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. Se representa por E.

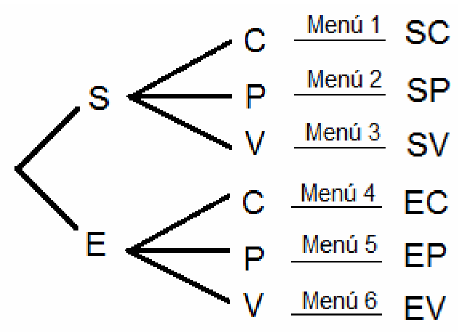
Ejemplo 1: en el experimento aleatorio "lanzar tres monedas", el espacio muestral es
E = { CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX }

Ejemplo 2: en el experimento aleatorio "extraer una bola de una urna que contiene diez bolas numeradas del 1 al 10", el espacio muestral es E = { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 }

Diagramas de árbol para determinar el espacio muestral

El diagrama de árbol es un gráfico que se construye indicando, como si fueran ramas de un árbol, los posibles resultados un experimento aleatorio. El espacio muestral se obtiene en las ramas finales.

Ejemplo: el menú de un restaurante consta de primer plato (a elegir entre sopa o ensalada) y segundo plato (a elegir entre carne, pescado o verduras). El conjunto de los posibles menús es:



E = { Sopa/Carne, Sopa/Pescado, Sopa/Verduras, Ensalada/Carne, Ensalada/Pescado, Ensalada/Verduras }

o abreviadamente E = { SC, SP, SV, EC, EP, EV }

2. Sucesos. Operaciones con sucesos.

Se llama **suceso** de un experimento aleatorio a cada uno de los subconjuntos del espacio muestral asociado. Los sucesos se representan por letras mayúsculas: A, B, C, …

Tipos de sucesos

T1. **Suceso elemental**: aquel formado por un solo resultado.

T2. **Suceso compuesto**: aquel formado por dos o más resultados.

T3. **Suceso seguro**: aquel que ocurre siempre. El suceso seguro está formado por todos los resultados posibles, es decir, el espacio muestral E.

T4. **Suceso imposible**: aquel que no ocurre nunca. Se representa por $\varnothing$.

T5. **Unión de sucesos**: dados los sucesos A, B, el suceso unión de A y B es el que se realiza cuando ocurre A **o** ocurre B. Se representa por $A \cup B$. El suceso $A \cup B$ se compone de los sucesos elementales que hay en A **o** hay en B.

T6. **Intersección de sucesos**: dados los sucesos A, B, el suceso intersección de A y B es el que se realiza cuando ocurren A **y** B al mismo tiempo. Se representa por $A \cap B$. El suceso $A \cap B$ se compone de los sucesos elementales comunes de A **y** B.

T7. **Sucesos incompatibles**: dos sucesos A y B son incompatibles si su intersección es el suceso imposible, es decir, si $A \cap B = \varnothing$. En caso contrario, se dice que son compatibles.

T8. **Sucesos contrarios (complementarios)**: dado un suceso A, el suceso contrario de A es aquel que se realiza cuando no ocurre A. Se representa por A^C. El suceso A^C se compone de todos los sucesos elementales de E que no están en A.
– La unión de un suceso y su contrario da como resultado el espacio muestral: $A \cup A^C = E$

– Dos sucesos contrarios son incompatibles: $A \cap A^C = \varnothing$

T9. **Diferencia de sucesos**: dados los sucesos A, B, el suceso diferencia de A y B es el que se realiza cuando ocurre A **y** no ocurre B al mismo tiempo. Se representa por A–B.
El suceso A–B equivale a la intersección de A y B^C, es decir, $A - B = A \cap B^C$

Propiedades de las operaciones con sucesos

P1. El contrario de la unión es la intersección de los contrarios: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

P2. El contrario de la intersección es la unión de los contrarios: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

P3. El contrario del suceso contrario coincide con el suceso de partida: $(A^C)^C = A$

Ejemplo 1: en el experimento aleatorio "lanzar tres monedas y anotar si ha salido cara o cruz", el espacio muestral es E = { CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC, XXX }

El suceso A = "no salir ninguna cara" es A = { XXX }. A es un suceso elemental.

El suceso B = "salir exactamente una cara" es B = { CXX, XCX, XXC }.

El suceso C = "salir al menos una cara" es C = { CCC, CCX, CXC, XCC, CXX, XCX, XXC }

B y C son sucesos compuestos ya que están formados por dos o más resultados.

A y B son sucesos incompatibles ya que $A \cap B = \varnothing$

C es el suceso contrario de A ($C = A^C$). Obsérvese que $A \cup C = E$ y $A \cap C = \varnothing$

Ejemplo 2: en el experimento aleatorio "extraer una bola de una urna que contiene diez bolas numeradas del 1 al 10", el espacio muestral es $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \}$

El suceso A = "salir número primo" es $A = \{ 2, 3, 5, 7 \}$

El suceso B = "salir número par" es $B = \{ 2, 4, 6, 8, 10 \}$

El suceso $A \cap B = \{ 2 \}$, es decir, el suceso "salir número primo y par", que también se puede expresar como el suceso "salir dos".

El suceso $A \cup B = \{ 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 \}$, es decir, "salir número primo o par", que también se puede expresar como "no salir uno ni nueve".

El suceso C = "salir cero" es suceso imposible. Se escribe $C = \varnothing$

El suceso D = "salir un natural comprendido entre uno y diez" es suceso seguro. Obsérvese que coincide con el espacio muestral E.

Por otra parte, obsérvese que se cumplen las siguientes propiedades:

P1. El contrario de la unión es la intersección de los contrarios: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$A^C = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10 \}$ $\quad B^C = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ $\quad (A \cup B)^C = \{ 1, 9 \} = A^C \cap B^C$

P2. El contrario de la intersección es la unión de los contrarios: $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

$A^C = \{ 1, 4, 6, 8, 9, 10 \}$ $\quad B^C = \{ 1, 3, 5, 7, 9 \}$ $\quad (A \cap B)^C = \{ 1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \} = A^C \cup B^C$

3. Regla de Laplace. Propiedades de la probabilidad.

En el lenguaje cotidiano, para referirse a los distintos resultados de un experimento aleatorio suelen utilizarse expresiones del tipo: "es seguro", "es muy posible", "probablemente", "es poco probable" o "es imposible" que ocurra. Estas expresiones no son del todo precisas.

El **Cálculo de Probabilidades** es la rama de las matemáticas que mide las posibilidades de que algo ocurra. El estudio de la Probabilidad se inicia con la regla de Laplace. Fundamentada en la Ley de los Grandes Números, esta regla permite calcular la probabilidad de un suceso en un experimento regular. La regla de Laplace afirma que:

En un experimento aleatorio regular, la probabilidad de un suceso A es el cociente entre el número de casos favorables al suceso A y el número de casos posibles del experimento.

$$P(A) = \frac{\text{N° de casos favorables al suceso A}}{\text{N° de casos posibles}}$$

Casos favorables a un suceso A son todos los sucesos elementales de los que se compone el suceso A.

Casos posibles son todos los resultados posibles del experimento, es decir, todos los sucesos elementales que componen el espacio muestral.

Como consecuencia de la regla de Laplace, la **probabilidad** de un suceso es el grado de posibilidad que tiene de ocurrir medido en **una escala de 0 a 1** (o **porcentual de 0 a 100)**.

– Cuanto más probable sea un suceso, más cercana es su probabilidad al valor 1, alcanzando el **suceso seguro** una probabilidad exactamente igual a 1 (ó del 100%).

– Cuanto menos probable sea un suceso, más cercana es su probabilidad al valor 0, alcanzando el **suceso imposible** una probabilidad exactamente igual a 0 (ó del 0%).

Importante: la regla de Laplace sólo es válida si el experimento aleatorio es **regular**, es decir, si todos los sucesos elementales que forman el espacio mestral, tienen la misma probabilidad de ocurrir (**sucesos equiprobables**).

Para evitar errores al aplicar la regla de Laplace, conviene expresar el espacio muestral de forma ordenada y asegurarse con ello de que todos los sucesos elementales son equiprobables.

Ejemplo 1: en el experimento aleatorio "lanzar un dado", el espacio muestral es

$$E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$$

Dados los sucesos: A = "salir un tres" B = "salir múltiplo de tres" C = "salir par"

La regla de Laplace establece que: $P(A) = \frac{1}{6} \cong 0{,}16$ $P(B) = \frac{2}{6} \cong 0{,}33$ $P(C) = \frac{3}{6} = 0{,}5$

Ejemplo 2: en el experimento aleatorio "extraer una carta de la baraja española", el espacio muestral está formado por las cartas numeradas del 1 al 12 (exceptuando el 8 y el 9) en cada uno de los cuatro palos: oros, copas ,espadas y bastos. En total, 40 cartas (naipes).

Dados los sucesos: A = "salir as" B = "salir figura" C = "salir espadas"

La regla de Laplace establece que: $P(A) = \frac{4}{40} = 0{,}1$ $P(B) = \frac{12}{40} = 0{,}3$ $P(C) = \frac{10}{40} = 0{,}25$

Propiedades de la probabilidad

P1. La probabilidad de un suceso siempre es un valor comprendido entre cero y uno.

$$0 \leq P(A) \leq 1$$

P2. La probabilidad del suceso seguro es uno y la probabilidad del suceso imposible es cero.

$$P(E) = 1 \qquad P(\varnothing) = 0$$

P3. La probabilidad de un suceso y la de su contrario siempre suman uno.

$$P(A^C) = 1 - P(A) \qquad P(A) = 1 - P(A^C)$$

P4. Dados dos sucesos A y B, siempre se cumple que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como consecuencia, si A y B son incompatibles, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

P5. Dados dos sucesos A y B, siempre se cumple que: $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap B^C)$

P6. Dados dos sucesos A y B, siempre se cumple que: $P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B)$

P7. Dados dos sucesos A y B, siempre se cumple que: $P(A-B) = P(A) - P(A \cap B)$

Ejemplo 1: en el experimento aleatorio "extraer una bola de una bolsa que contiene bolas numeradas del 1 al 8", consideremos los sucesos:

A = "salir par" B = "salir impar" C = "salir múltiplo de tres"

$A = \{ 2, 4, 6, 8 \}$ $B = \{ 1, 3, 5, 7 \}$ $C = \{ 3, 6 \}$ $E = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 \}$

Propiedad 4 Los sucesos A y C son compatibles

$$P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \frac{4}{8} + \frac{2}{8} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0{,}625$$

Propiedad 4 Los sucesos A y B son incompatibles $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{8} + \frac{4}{8} = 1$

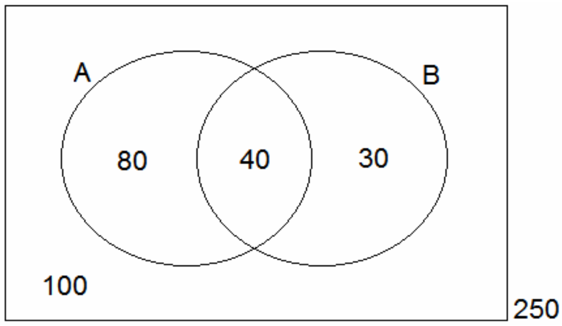
<u>Ejemplo 2</u>: de los 250 estudiantes de un centro de idiomas, 120 estudian inglés, 70 estudian francés y 40 estudian inglés y francés. Si se elige un estudiante al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Estudie Inglés o Francés.

b) No estudie Inglés ni Francés.

c) Estudie sólo Inglés.

d) Estudie sólo Francés.



Nombrando los sucesos A = "estudiar Inglés" y B = "estudiar Francés", se tiene lo siguiente:

a) La probabilidad de que estudie Inglés o Francés es 0,60

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{120}{250} + \frac{70}{250} - \frac{40}{250} = \frac{150}{250} = \frac{3}{5} = 0{,}60$$

b) La probabilidad de que no estudie Inglés ni Francés es 0,40 [se puede hallar de dos formas]

$$P(A^C \cap B^C) = 1 - P(A \cup B) = 1 - 0{,}60 = 0{,}40 \qquad P(A^C \cap B^C) = \frac{100}{250} = \frac{2}{5} = 0{,}40$$

c) La probabilidad de que estudie sólo Inglés es 0,32

$$P(A - B) = P(A \cap B^C) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{120}{250} - \frac{40}{250} = \frac{80}{250} = \frac{8}{25} = 0{,}32$$

d) La probabilidad de que estudie sólo Francés es 0,12

$$P(B - A) = P(B \cap A^C) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{70}{250} - \frac{40}{250} = \frac{30}{250} = \frac{3}{25} = 0{,}12$$

<u>Ejemplo 3</u>: dados dos sucesos A y B tales que $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = \frac{1}{4}$, calcular las siguientes probabilidades: $P(A^C)$ $P(B^C)$ $P(A \cup B)$ $P(A-B)$ $P(B-A)$

Propiedad 3 $\quad P(A^C) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \qquad P(B^C) = 1 - P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Propiedad 4 $\quad P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{7}{12}$

Propiedad 7 $\quad P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

Propiedad 7 $\quad P(B - A) = P(B) - P(B \cap A) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$

4. Sucesos independientes.

Se llama **experimento aleatorio compuesto** al formado por varios experimentos simples que se realizan de forma consecutiva. Por ejemplo:

– Extraer dos naipes de una baraja con/sin reemplazamiento.

– Lanzar un dado dos veces.

– Lanzar a canasta dos tiros libres.

– Extraer una bola de una urna y extraer una bola de otra urna diferente.

Dado un experimento aleatorio compuesto, se dice que A y B son **sucesos independientes** si la realización de uno de ellos no cambia la probabilidad del otro.

$$\text{A y B son independientes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Extracciones con reemplazamiento

En extracciones sucesivas con reemplazamiento o devolución, los sucesos son independientes.

Ejemplo: se extraen, uno tras otro, dos naipes de la baraja española con reemplazamiento. Calcular la probabilidad de extraer consecutivamente dos reyes.

A = "salir rey en la primera extracción" B = "salir rey en la segunda extracción"

Al tratarse de una extracción con reemplazamiento, los sucesos A y B son independientes.

Por lo tanto, $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B) = 4/40 \cdot 4/40 = 0{,}01$

Diagramas de árbol para calcular probabilidades

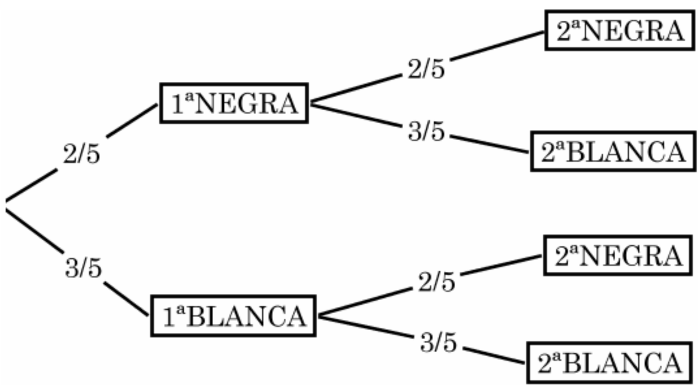
Para calcular probabilidades del tipo $P(A \cap B)$ en un experimento compuesto, se puede organizar la información mediante un **diagrama de árbol**.

Ejemplo 1: en una urna hay tres bolas blancas y dos negras. Se extrae una bola al azar, se anota su color y se devuelve a la urna. A continuación se extrae otra bola al azar y se anota su color.
Calcular la probabilidad de que en las dos extracciones se obtengan:

a) Dos bolas negras.

b) Dos bolas blancas.

c) Una bola de cada color.



a) $P(\text{dos bolas negras}) = P(1^aN \cap 2^aN) = P(1^aN) \cdot P(2^aN) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$

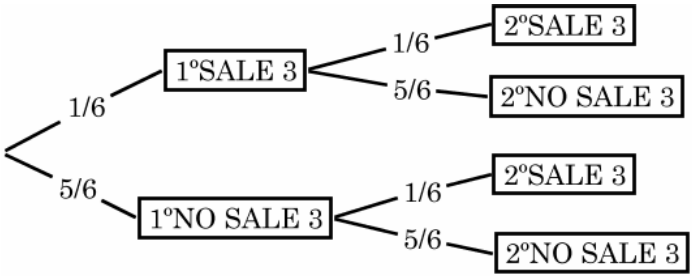
b) $P(\text{dos bolas blancas}) = P(1^aB \cap 2^aB) = P(1^aB) \cdot P(2^aB) = \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$

c) $P(\text{una bola de cada color}) = P(\,[1^aN \cap 2^aB] \cup [1^aB \cap 2^aN]\,) = P(1^aN \cap 2^aB) + P(1^aB \cap 2^aN) =$

$= P(1^aN) \cdot P(2^aB) + P(1^aB) \cdot P(2^aN) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{6}{25} + \frac{6}{25} = \frac{12}{25}$

Ejemplo 2: se lanza un dado dos veces consecutivamente. Calcular la probabilidad del suceso A = "no salir tres en ninguno de los dos dados"

Diagrama de árbol



Como el suceso A se compone de dos sucesos independientes, se tiene que:

P(A) = P(1ºNo sale 3 ∩ 2ºNo sale 3) = P(1ºNo sale 3) · P(2ºNo sale 3) = $\frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{25}{36}$

Nota: obsérvese que el espacio muestral (compuesto) está formado por 36 sucesos elementales

E = { (1,1), (1,2), (1,3), …, (1, 6), (2,1), (2,2), …, (2,6), …, …, …, (6,1), (6,2), …, (6,6)}

Se podría calcular, mediante la regla de Laplace, P(A) = 25/36 contando los 25 casos favorables al suceso A. Sin embargo, este camino no es muy aconsejable cuando el espacio muestral está formado por un elevado número de sucesos elementales.

5. Sucesos dependientes. Probabilidad condicionada.

Dado un experimento aleatorio compuesto, se dice que A y B son **sucesos dependientes** si la realización de uno de ellos cambia la probabilidad del otro.

$$A \text{ y } B \text{ son dependientes} \quad \Leftrightarrow \quad P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B/A)$$

donde P(B/A) es la probabilidad de B sabiendo que ha ocurrido A. Se lee "probabilidad de B condicionado a A"

Extracciones sin reemplazamiento

En extracciones sucesivas sin reemplazamiento o devolución, los sucesos son dependientes.

Ejemplo: se extraen, uno tras otro, dos naipes de la baraja española sin reemplazamiento. Calcular la probabilidad de extraer consecutivamente dos reyes.

A = "salir rey en la primera extracción" B = "salir rey en la segunda extracción"

Al tratarse de una extracción sin reemplazamiento, los sucesos A y B son dependientes.

Por lo tanto, P(A∩B) = P(A) · P(B/A) = 4/40 · 3/39 = 1/130 = 0,0077

Diagramas de árbol para calcular probabilidades

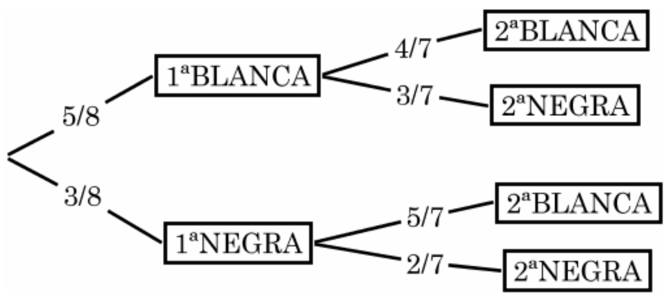
Para calcular probabilidades del tipo P(A∩B) en un experimento compuesto, se puede organizar la información mediante un **diagrama de árbol**.

Ejemplo: se extraen sin reemplazamiento dos bolas sucesivamente de una urna que contiene tres bolas negras y cinco bolas blancas.
Calcular la probabilidad de que en las dos extracciones se obtengan:

a) Dos bolas negras.

b) Dos bolas blancas.

c) Dos bolas de diferente color.



a) P(dos bolas negras) = P(1ªN ∩ 2ªN) = P(1ªN) · P(2ªN/1ªN) = $\frac{3}{8} \cdot \frac{2}{7} = \frac{3}{28}$

b) P(dos bolas blancas) = P(1ªB ∩ 2ªB) = P(1ªB) · P(2ªB/1ªB) = $\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} = \frac{5}{14}$

c) P(una bola de cada color) = P([1ªN ∩ 2ªB] ∪ [1ªB ∩ 2ªN]) = P(1ªN ∩ 2ªB) + P(1ªB ∩ 2ªN) =

= P(1ªN) · (2ªB/1ªN) + P(1ªB) · P(2ªN/1ªB) = $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{7} = \frac{15}{56} + \frac{15}{56} = \frac{30}{56} = \frac{15}{28}$

Fórmulas para la probabilidad condicionada

Si dos sucesos A y B son dependientes, entonces se cumplen las siguientes fórmulas:

F1. P(A∩B) = P(A) · P(B/A) ó P(A∩B) = P(B) · P(A/B) [invirtiendo el orden de A y B]

F2. $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ ó $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ [invirtiendo el orden de A y B]

Ejemplo 1: en un grupo el 60% de los estudiantes aprueban Economía y el 45% aprueban Matemáticas. Se sabe además que la probabilidad de aprobar Economía habiendo aprobado Matemáticas es del 75%. Elegido un estudiante al azar, calcular la probabilidad de que:
a) Haya aprobado las dos asignaturas.
b) Haya aprobado Matemáticas, sabiendo que aprobó Economía.

Se nombran los sucesos A = " aprobar Matemáticas " y B = " aprobar Economía ".

a) P(aprobar las dos asignaturas) = P(A∩B) = P(A) · P(B/A) = 0,45 · 0,75 = 0,3375

b) P(aprobar Matemáticas / aprobó Economía) = $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3375}{0{,}60} = 0{,}5625$

Ejemplo 2: al lanzar dos dados al aire, calcular la probabilidad de que saliese algún tres, sabiendo que la suma de los puntos obtenidos fue siete.

Se nombran los sucesos A = "salir una suma de siete puntos" y B = "salir algún tres".
Con esta notación, lo que se pide es P(B/A)

A = { (1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1) } A∩B = { (3, 4), (4, 3) }

Por lo tanto, $P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{2/36}{6/36} = \frac{2}{6} \cong 0{,}33$

Ejemplo 3: dados dos sucesos A y B tales que: P(A) = 1/2 P(B) = 1/3 P(A∩B) = 1/4
Calcular P(B/A) y P(A/B)

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1/4}{1/2} = 1/2 \qquad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/4}{1/3} = \frac{3}{4}$$

Tablas de contingencia

En ocasiones, para el cálculo de probabilidades condicionadas, es de enorme utilidad organizar la información mediante una tabla de doble entrada llamada **tabla de contingencia**.

Ejemplo: se ha realizado un estudio sobre el uso de ordenadores y tablets entre los jóvenes. De entre 45 chicos y 55 chicas encuestados, afirman utilizar habitualmente ordenador 25 chicos y 45 chicas. El resto dice utilizar habitualmente tablets. Si se elige uno de los jóvenes al azar, calcular la probabilidad de que:

a) Use habitualmente tablet.

b) Sea chica, sabiendo que usa tablet.

c) Use ordenador, sabiendo que es chico.

Ésta es la tabla de contingencia:

	Chicas	Chicos	Total
Ordenador	45	25	70
Tablet	10	20	30
Total	55	45	100

Se nombran los sucesos con letras mayúsculas:

A = "ser chica" B = "ser chico"
C = "usar ordenador" D = "usar tablet"

a) P(usar tablet) = P(D) = $\frac{30}{100} = 0{,}30$

b) 1ª forma: P(sea chica / usa tablet) = P(A/D) = $\frac{10}{30} = 0{,}33$

2ª forma: P(sea chica / usa tablet) = P(A/D) = $\frac{P(A \cap D)}{P(D)} = \frac{10}{100} \div \frac{30}{100} = \frac{10}{30} = 0{,}33$

c) 1ª forma: P(use ordenador / es chico) = P(C/B) = $\frac{25}{45} = 0{,}55$

2ª forma: P(use ordenador / es chico) = P(C/B) = $\frac{P(C \cap B)}{P(B)} = \frac{25}{100} \div \frac{45}{100} = \frac{25}{45} = 0{,}55$

6. Teorema de la probabilidad total.

Se llama **sistema completo de sucesos** a una familia de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ tales que:

a) Son incompatibles entre sí (dos a dos): $A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j$

b) La unión de todos ellos es el espacio muestral: $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E$

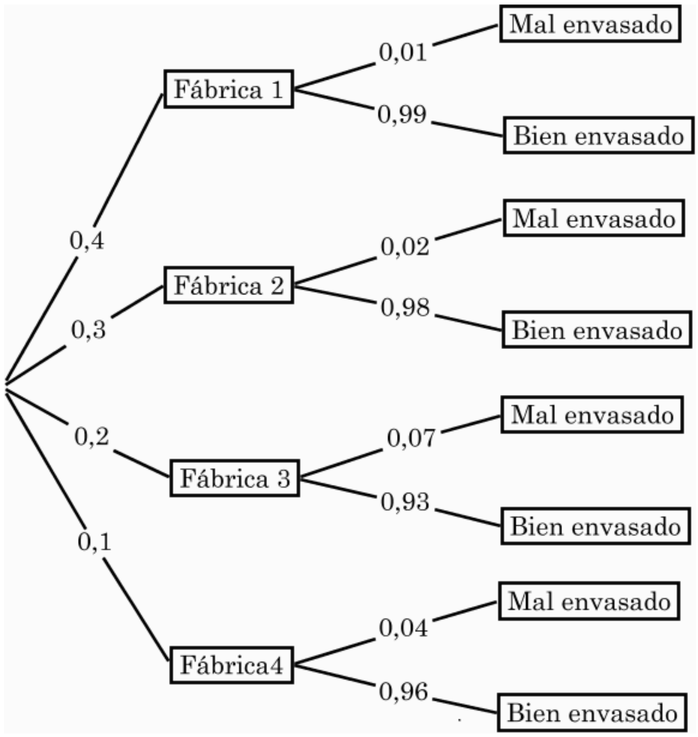
El **teorema de la probabilidad total** afirma lo siguiente:

Dado un sistema completo de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ con $P(A_i) \neq 0 \ \forall i$, y un suceso B cualquiera, entonces $P(B) = P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)$

Nota 1: este teorema es consecuencia de expresar B como $B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \ldots (A_n \cap B)$

Nota 2: obsérvese que un único suceso y su contrario forman un sistema completo de sucesos.

Ejemplo 1: una empresa de alimentación elabora sus productos en 4 fábricas: F1, F2, F3, F4, de la siguiente forma:
– el 40% de la producción en la Fábrica 1.
– el 30% en la producción en la Fábrica 2.
– el 20% en la producción en la Fábrica 3.
– el 10% en la producción en la Fábrica 4.
Por otra parte, la probabilidad de que un producto esté mal envasado es del:
1% para la Fábrica 1
2% para la Fábrica 2
7% para la Fábrica 3
4% para la Fábrica 4
Hallar la probabilidad de que un producto elegido al azar esté mal envasado.

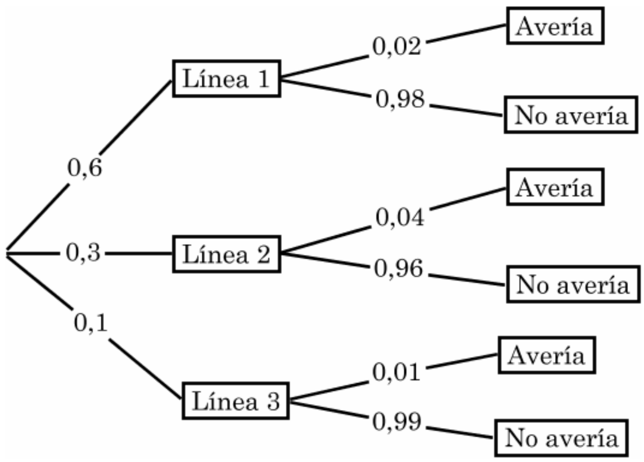


Como los sucesos F_i = "producido en la fábrica i" (i = 1, 2, 3, 4), forman un sistema completo de sucesos, se puede aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular la probabilidad del suceso M = "producto mal envasado"

$$P(M) = P(F_1) \cdot P(M/F_1) + P(F_2) \cdot P(M/F_2) + P(F_3) \cdot P(M/F_3) + P(F_4) \cdot P(M/F_4)$$

$$P(M) = 0{,}4 \cdot 0{,}01 + 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}2 \cdot 0{,}07 + 0{,}1 \cdot 0{,}04 = 0{,}028$$

Ejemplo 2: una compañía de autobuses cubre tres líneas de una ciudad:
– el 60% de sus autobuses cubre la Línea 1.
– el 30% de sus autobuses cubre la Línea 2.
– el 10% de sus autobuses cubre la Línea 3.
Por otra parte, la probabilidad de que un autobús se averíe es del:
2% en la Línea 1
4% en la Línea 2
1% en la Línea 3
Hallar la probabilidad de que, en un día, la compañía tenga que solucionar una avería.



Como los sucesos L_i = "autobús en la Línea i" (i = 1, 2, 3), forman un sistema completo de sucesos, se puede aplicar el teorema de la probabilidad total para calcular la probabilidad del suceso A = "autobús averiado"

$$P(A) = P(L_1) \cdot P(A/L_1) + P(L_2) \cdot P(A/L_2) + P(L_3) \cdot P(A/L_3)$$

$$P(A) = 0{,}6 \cdot 0{,}02 + 0{,}3 \cdot 0{,}04 + 0{,}1 \cdot 0{,}01 = 0{,}025$$

7. Teorema de Bayes.

El teorema de Bayes sirve para calcular probabilidades después de realizar el experimento, es decir, se ocupa del estudio de la probabilidad a posteriori.

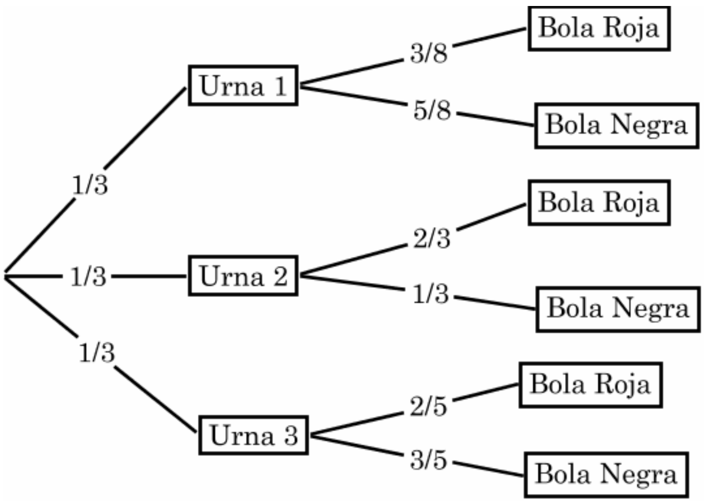
El **teorema de Bayes** afirma lo siguiente:

Dado un sistema completo de sucesos $A_1, A_2, ..., A_n$ con $P(A_i) \neq 0 \ \forall i$, y un suceso B del que se conocen las probabilidades $P(B/A_i) \ \forall i$, entonces las probabilidades $P(A_i/B) \ \forall i$, se pueden calcular con la fórmula

$$P(A_i/B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i) \cdot P(B/A_i)}{P(A_1) \cdot P(B/A_1) + P(A_2) \cdot P(B/A_2) + ... + P(A_n) \cdot P(B/A_n)}$$

Nota: obsérvese que el denominador es el resultado de aplicar el teorema de la probabilidad total al suceso B.

Ejemplo: se dispone de tres urnas con el siguiente contenido:
La urna 1 con 3 bolas rojas y 5 negras.
La urna 2 con 2 bolas rojas y 1 negra.
La urna 3 con 2 bolas rojas y 3 negras.
Se elige una urna al azar y se extrae al azar una bola, que resulta ser roja.
Calcular la probabilidad de que haya sido extraída de la urna 1.



Se nombran los sucesos:
U_i = "extraer bola de la urna i"
(i = 1, 2, 3)
R = "extraer bola roja"
N = "extraer bola negra"

$$P(U_1/R) = \frac{P(U_1) \cdot P(R/U_1)}{P(U_1) \cdot P(R/U_1) + P(U_2) \cdot P(R/U_2) + P(U_3) \cdot P(R/U_3)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8}}{\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}} \cong 0{,}26$$