



XXI CONCURSO CANGURO MATEMÁTICO 2014

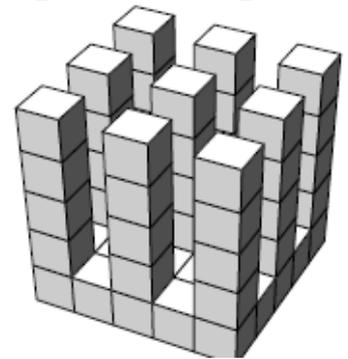


Nivel 6 (2º de Bachillerato)

Día 20 de marzo de 2014 Tiempo : 1 hora y 15 minutos

No se permite el uso de calculadoras. Hay una única respuesta correcta para cada pregunta. Cada pregunta mal contestada se penaliza con 1/4 de los puntos que le corresponderían si fuera correcta. Las preguntas no contestadas no se puntúan ni se penalizan. Inicialmente tienes 30 puntos.

Las preguntas 1 a 10 valen 3 puntos cada una.



- 1** De un cubo 5x5x5 se quita un cierto número de cubos 1x1x1, de manera que se obtiene el sólido de la figura, donde todas las columnas son de la misma altura, sobre una base única
¿Cuántos cubos unidad se han retirado?
- A) 56 B) 60 C) 64 D) 68 E) 80

- 2** Hoy es el cumpleaños de Carla, Emilia y Lidia. La suma de sus edades es 44. ¿Cuál será la suma de sus edades la próxima vez que, como hoy, se trate de un número de dos cifras, ambas iguales?
- A) 55 B) 66 C) 77 D) 88 E) 99

- 3** Si $a^b = \frac{1}{2}$, ¿cuánto vale a^{-3b} ?
- A) $\frac{1}{8}$ B) 8 C) -8 D) 6 E) $\frac{1}{6}$

- 4** En tres cestas de diferente tamaño hay 48 bolas. La cesta pequeña contiene la mitad del número de bolas de la mediana, y la suma del número de bolas de la pequeña y la grande es el doble del de la mediana. ¿Cuántas bolas hay en la cesta grande?
- A) 16 B) 20 C) 24 D) 30 E) 32

- 5** ¿Cuánto vale $\frac{2^{2014} - 2^{2013}}{2^{2013} - 2^{2012}}$?
- A) 2^{2011} B) 2^{2012} C) 2^{2013} D) 1 E) 2

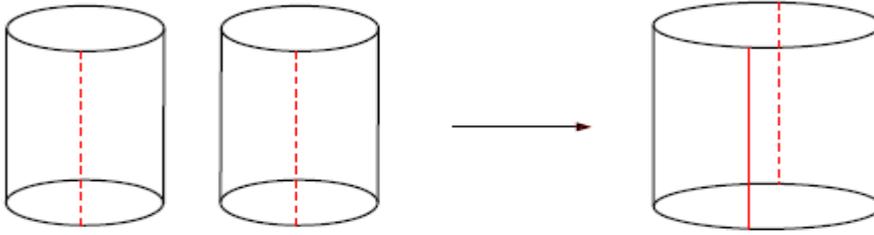
- 6** ¿Cuál de las expresiones siguientes no contiene como factor a $b+1$?
- A) $2b+2$ B) b^2-1 C) b^2+b D) $-1-b$ E) b^2+1

- 7** ¿Cuántas cifras tiene el resultado de la multiplicación $(2^{22})^5 \times (5^{55})^2$?
- A) 22 B) 55 C) 77 D) 110 E) 111

- 8** Tengo una cuenta secreta de correo electrónico que sólo 4 amigos conocen. Hoy he recibido en ella 8 mensajes. ¿Cuál de las siguientes frases es cierta?
- A) He recibido 2 mensajes de cada amigo
 B) No puedo haber recibido 8 mensajes de uno de mis amigos
 C) He recibido al menos un mensaje de cada amigo
 D) He recibido al menos dos mensajes de uno de mis amigos
 E) He recibido al menos dos mensajes de dos amigos distintos.

9

Dos cilindros iguales se cortan a lo largo de las líneas de puntos y se pegan para formar un cilindro mayor, como se ve en la figura:



¿Qué se puede decir del volumen del nuevo cilindro comparado con el de uno de los dos cilindros iniciales?

- A) tiene el doble de volumen B) tiene el triple del volumen C) tiene π veces el volumen
D) tiene 4 veces el volumen E) tiene 8 veces el volumen

10

En el número 2014 las cifras son todas distintas y la de las unidades es mayor que la suma de las otras tres. ¿Cuántos años hace que ocurrió también esto por última vez?

- A) 5 B) 215 C) 305 D) 395 E) 485

Las preguntas 11 a 20 valen 4 puntos cada una

11

El volumen de una caja rectangular es $axbxc$, con $a < b < c$. Si se incrementa a ó b ó c en un número positivo dado, el volumen de la caja aumenta también. ¿En cuál de los siguientes casos ese incremento de volumen es máximo?

- A) si se aumenta a B) si se aumenta b C) si se aumenta c
D) El incremento del volumen es el mismo en los tres casos anteriores
E) Depende de los valores de a , b y c

12

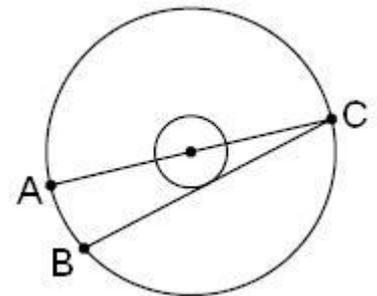
En los partidos de fútbol, el ganador consigue 3 puntos, el perdedor 0, y en caso de empate, cada equipo obtiene 1 punto. Cuatro equipos, A, B, C y D juegan un torneo en el que cada equipo juega tres partidos, uno contra cada uno de los otros equipos. Al final del torneo, A tiene 7 puntos y B y C, 4 puntos cada uno. ¿Cuántos puntos tiene D?

- A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

13

Los radios de dos círculos concéntricos están en la proporción 1 : 3. AC es un diámetro del círculo grande; BC es una cuerda tangente al círculo pequeño y la longitud del segmento AB es 12. El radio del círculo grande es

- A) 13 B) 18 C) 21 D) 24 E) 26

**14**

¿Cuántas ternas (a, b, c) de enteros tales que $a > b > c > 1$ satisfacen $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 1$?

- A) ninguna B) 1 C) 2 D) 3 E) infinitas

15

Los números a , b y c son distintos de 0 y n es un entero positivo. Se sabe que los números $A = (-2)^{2n+3}(a)^{2n+2}(b)^{2n-1}(c)^{3n+2}$ y $B = (-3)^{2n+2}(a)^{4n+1}(b)^{2n+5}(c)^{3n-4}$ tienen el mismo signo. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es siempre verdadera?

- A) $a > 0$ B) $b > 0$ C) $c > 0$ D) $a < 0$ E) $b < 0$

16

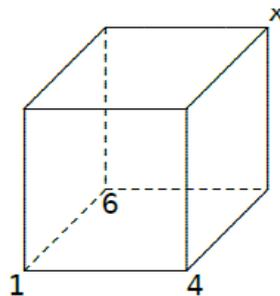
Seis semanas son $n!$ (factorial de n) segundos. ¿Cuánto vale n ?

- A) 6 B) 7 C) 8 D) 10 E) 12

17

Los vértices de un cubo se numeran de 1 a 8 de tal manera que la suma de los cuatro números que están en los vértices de una cara es la misma para todas las caras. Ya se han colocado los números 1, 4 y 6. ¿Cuánto vale x ?

- A) 2 B) 3 C) 5 D) 7 E) 8



18

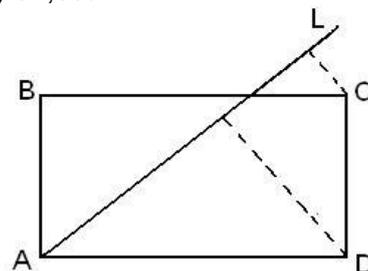
La etiqueta de un paquete de crema de queso dice: 24% de materia grasa total. En otra parte de la misma etiqueta se lee: 64% de grasa en el producto seco. ¿Cuál es el porcentaje de agua en este queso?

- A) 88% B) 62,5 % C) 49% D) 42% E) 37,5%

19

La recta L pasa por el vértice A del rectángulo $ABCD$. La distancia del punto C a L es 2, y la distancia del punto D a L es 6. Si AD es el doble de AB , hallar AD .

- A) 10 B) 12 C) 14 D) 16 E) $4\sqrt{3}$



20

La función $f(x) = ax + b$ verifica las igualdades $f(f(f(1))) = 29$ y $f(f(f(0))) = 2$. ¿Cuál es el valor de a ?

- A) 1 B) 2 C) 3 D) 4 E) 5

Las preguntas 21 a 30 valen 5 puntos cada una

21

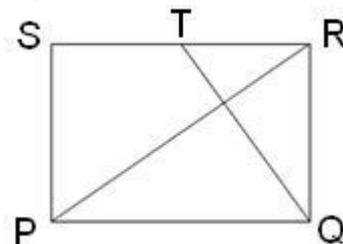
Se tienen 10 enteros positivos distintos. Exactamente 5 de ellos son divisibles por 5, y exactamente 7 de ellos son divisibles por 7. Sea M el mayor de esos 10 números. ¿Cuál es el menor valor posible de M ?

- A) 105 B) 77 C) 75 D) 63 E) Ninguno de los anteriores

22

$PQRS$ es un rectángulo. T es el punto medio de RS . QT es perpendicular a la diagonal PR . Calcular la razón $PQ : QR$

- A) $2 : 1$ B) $\sqrt{3} : 1$ C) $3 : 2$ D) $\sqrt{2} : 1$ E) $5 : 4$



23

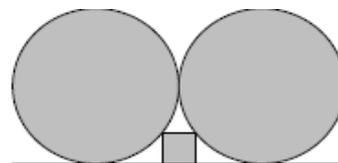
Tenemos 9 canguros en el zoo, cuya piel es de color plata u oro. Cuando se juntan 3 cualesquiera de ellos, la probabilidad de que ninguno sea plateado es $2:3$. ¿Cuántos canguros son dorados?

- A) 1 B) 3 C) 5 D) 6 E) 8

24

En la figura se ve el cuadrado comprendido entre los dos círculos de radio 1, y la recta tangente a ambos círculos. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado?

- A) $\frac{2}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{1}{2}$



25

Queremos escribir varios enteros positivos distintos, ninguno de los cuales es mayor que 100, y de modo que su producto no sea divisible por 54. ¿Cuántos enteros, como máximo, se podrán escribir cumpliendo esas dos condiciones?

- A) 8 B) 17 C) 68 D) 69 E) 90

26

Dos polígonos regulares de lado 1 están en lados opuestos de su lado común AB. Uno de ellos es un polígono de 15 lados ABCD.... Y el otro es un polígono de n lados ABZY... ¿Qué valor de n hace que la distancia CZ sea igual a 1?

- A) 10 B) 12 C) 15 D) 16 E) 17

27

Los enteros positivos k, m y n verifican las igualdades $k = (2014 + m)^{1/n} = 1024^{1/n} + 1$. ¿Cuántos valores distintos puede tomar el número m?

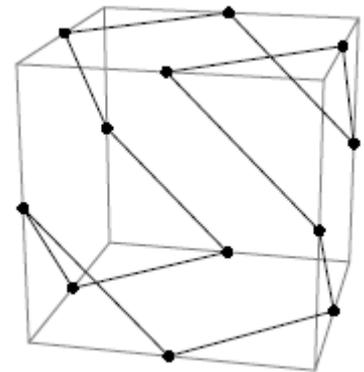
- A) Ninguno B) 1 C) 2 D) 3 E) Infinitos

28

La figura muestra un polígono cuyos vértices son los puntos medios de las aristas de un cubo

Se define en la forma usual el ángulo interior del polígono: es el ángulo entre los dos lados del polígono que confluyen en ese vértice. ¿Cuál es la suma de todos los ángulos interiores del polígono?

- A) 720° B) 1080° C) 1200° D) 1440° E) 1800°

**29**

La función $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ verifica las condiciones $f(4) = 6$ y $xf(x) = (x - 3)f(x + 1)$.

¿Cuál es el valor del producto $f(4)f(7)f(10)\dots f(2011)f(2014)$?

- A) 2013 B) 2014 C) 2013.2014 D) 2013! E) 2014!

30

En los bosques de la isla mágica hay tres clases de animales: leones, lobos y cabras. Los lobos pueden comer cabras, y los leones pueden comer lobos o cabras. Pero como la isla es mágica, si un lobo se come a una cabra, se convierte en león. Si un león se come una cabra, se convierte en lobo. Si un león se come un lobo, se convierte en cabra. Inicialmente hay 17 cabras, 55 lobos y 6 leones. ¿Cuál es el mayor número posible de animales que quedan en la isla cuando ya no sea posible que se coman entre sí?

- A) 1 B) 6 C) 17 D) 23 E) 35