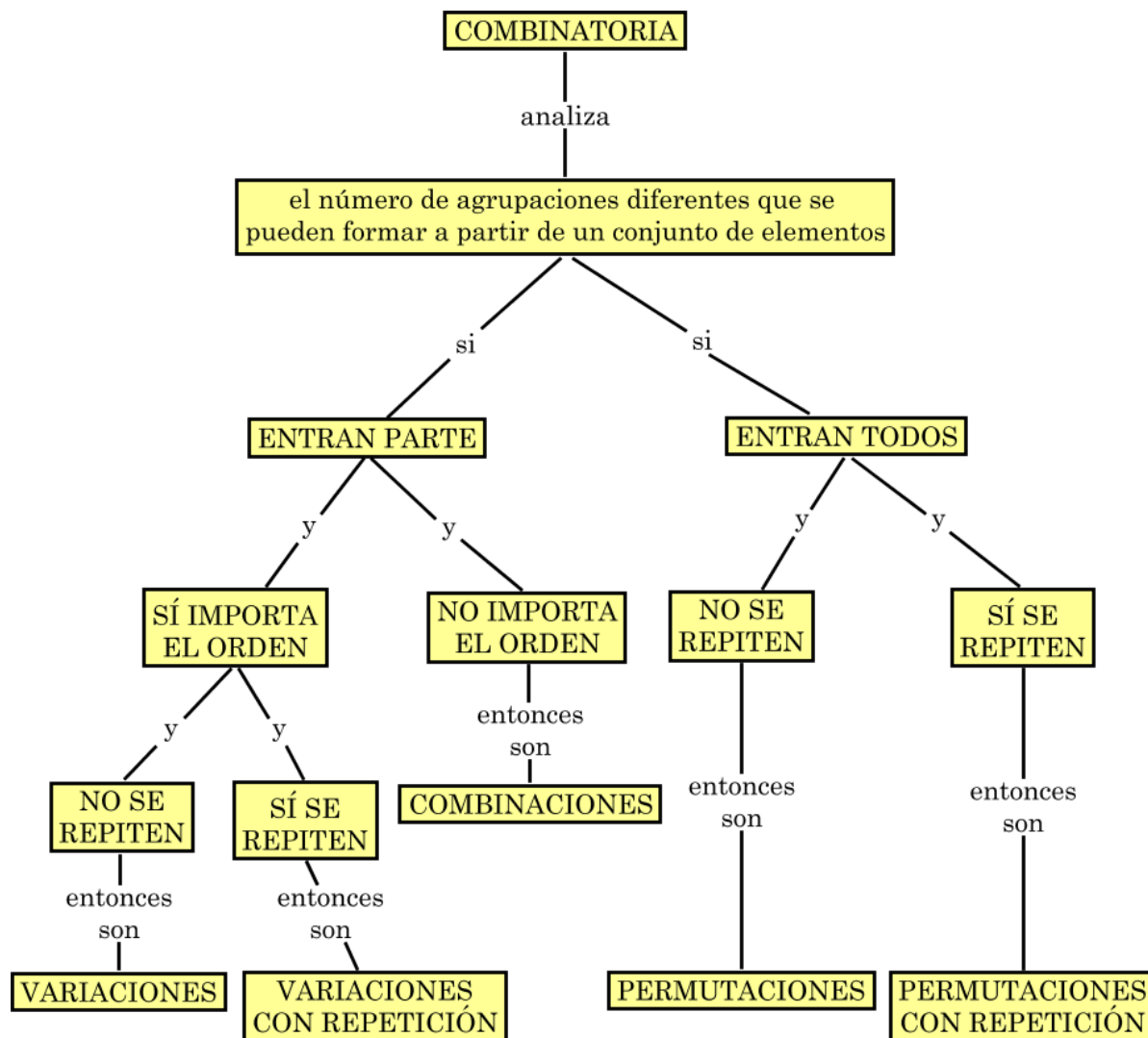


MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Combinatoria. Técnicas de recuento.

La Combinatoria o Análisis Combinatorio es la parte de las Matemáticas que trata sobre las técnicas o métodos para contar las distintas agrupaciones que se pueden formar con los elementos de un conjunto, cumpliendo ciertos criterios especificados de antemano.

Ejemplos:

¿Cuántas matrículas de automóvil se pueden formar con 3 letras y 4 cifras?

¿Cuántas banderas de tres franjas horizontales distintas se pueden formar con 5 colores?

¿Cuántas combinaciones distintas de 6 números se pueden formar con los 49 números de la Lotería Primitiva?

Éstas y otras cuestiones habituales de la Combinatoria se pueden resolver aplicando los **Números Combinatorios**, a saber: Combinaciones, Combinaciones con repetición, Permutaciones, Permutaciones con repetición, Variaciones y Variaciones con repetición.

Estos **Números Combinatorios** tienen en cuenta los siguientes aspectos:

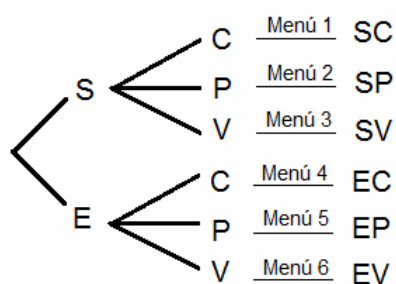
- El número m total de elementos disponibles para formar las distintas agrupaciones.
- El número n de elementos que debe contener cada agrupación.
- La posibilidad de repetir elementos (o no) en cada agrupación.
- La importancia del orden (o no) en el que aparezcan los elementos en las agrupaciones.

Técnicas de recuento

Si además de calcular el número de agrupaciones posibles, se necesita describir, saber cómo son cada una de esas agrupaciones, se pueden utilizar técnicas de recuento como el diagrama de árbol o el producto cartesiano.

El **diagrama de árbol** es un gráfico que se construye indicando, como si fueran ramas de un árbol, todas las posibles ordenaciones.

Ejemplo: el menú de un restaurante consta de primer plato (a elegir entre sopa o ensalada) y segundo plato (a elegir entre carne, pescado o verduras). El conjunto de los posibles menús es:



$E = \{ \text{Sopa/Carne, Sopa/Pescado, Sopa/Verduras, Ensalada/Carne, Ensalada/Pescado, Ensalada/Verduras} \}$

o abreviadamente $E = \{ SC, SP, SV, EC, EP, EV \}$

El **producto cartesiano** de dos conjuntos es el conjunto de todas las posibles parejas que se pueden formar eligiendo un elemento de un conjunto y un elemento del otro. Se suele utilizar una tabla de doble entrada.

	Carne	Pescado	Verdura
Sopa	(S, C)	(S, P)	(S, V)
Ensalada	(E, C)	(E, P)	(E, V)

Factorial de un número

Se llama factorial del número natural n al producto de todos los factores consecutivos desde el número 1 hasta el número n . Se representa por $n!$ y se lee "n factorial".

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplo: $3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$ $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$

Nota: $0! = 1$

2. Combinaciones.

Combinaciones de m elementos tomados de n en n , son los distintos grupos que se pueden formar con n elementos **no repetidos** elegidos entre m elementos, de tal forma que dos grupos se diferencian por un elemento pero **no por el orden de colocación**.

El número total de grupos formados de esta manera se representa por $C_{m,n}$

$$C_{m,n} = \binom{m}{n} = \frac{m!}{n! \cdot (m-n)!}$$

Nota: la expresión $\binom{m}{n}$ se lee "m sobre n"

Ejemplo 1: se desean vender dos libros elegidos entre cuatro posibles A, B, C, D. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer?

La respuesta es $C_{4,2} = \binom{4}{2} = 6$ maneras distintas.

Obsérvese que al ser un número pequeño, las 6 maneras se pueden describir:

AB, AC, AD, BC, BD, CD

En cada grupo no importa el orden (el grupo AB es el mismo que el grupo BA).

Ejemplo 2: con los 49 números de la lotería primitiva, ¿cuántas combinaciones distintas de seis números se pueden dar?

La respuesta es $C_{49,6} = \binom{49}{6} = \frac{49!}{6! \cdot 43!} = \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 13\,983\,816$ combinaciones.

Ejemplo 3: un examen se compone de 4 preguntas seleccionadas de entre 10 posibles. ¿Cuántos exámenes distintos se pueden obtener?

La respuesta es $C_{10,4} = \binom{10}{4} = 210$ exámenes diferentes.

Ejemplo 4: se ha de elegir una comisión de dos estudiantes entre diez personas voluntarias. ¿De cuántas maneras diferentes puede hacerse la elección?

La respuesta es $C_{10,2} = \binom{10}{2} = 45$ formas diferentes.

3. Permutaciones.

Permutaciones de m elementos, son los distintos grupos que se pueden formar con **m** elementos, incluyendo todos pero **sin repetirse ninguno**, de forma que dos grupos cualesquiera se diferencian **en el orden de colocación**.

El número total de grupos formados de esta manera se representa por P_m

$$P_m = m! = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplo 1: se desean colocar tres libros A, B, C en una estantería. ¿De cuántas formas distintas se pueden colocar?

La respuesta es $P_3 = 3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ formas.

Obsérvese que estas 6 formas son: ABC, ACB, BAC, BCA, CAB, CBA

Ejemplo 2: con cinco cifras, ¿cuántas números de cinco cifras distintas se pueden formar?

La respuesta es $P_5 = 5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ números.

Ejemplo 3: una urna tiene siete bolas de diferentes colores: negra, verde, roja, azul, blanca, amarilla y naranja. Se extraen todas las bolas de una en una, anotando su color.

¿De cuántas formas distintas se pueden extraer las siete bolas?

La respuesta es $P_7 = 7! = 5\,040$ formas.

Ejemplo 4: ¿de cuántas formas distintas pueden colocarse seis personas en la cola del autobús?

La respuesta es $P_6 = 6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ formas.

Ejemplo 5: en un aula hay 20 sitios para 20 estudiantes. Se decide que cada día, los sitios se ocupen dando lugar a una distribución diferente, aunque solo sea por un único sitio. ¿Para cuántos días sería válida esta norma?

La respuesta es $P_{20} = 20! = 20 \cdot 19 \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 2\,432\,902\,008\,176\,640\,000$ días.

4. Permutaciones con repetición.

Permutaciones de m elementos, de los cuales m_1 son iguales entre sí, m_2 son iguales entre sí, ... son los distintos grupos que se pueden formar con m elementos, incluyendo todos, de forma que dos grupos cualesquiera se diferencian **en el orden de colocación**.

El número total de grupos formados de esta manera se representa por $PR_m^{m_1, m_2, \dots}$

$$PR_m^{m_1, m_2, \dots} = \frac{m!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots}$$

Ejemplo 1: una urna tiene seis bolas: tres verdes, dos rojas y una azul. Se extraen todas las bolas de una en una, anotando su color. ¿A cuántas ordenaciones distintas dan lugar las extracciones de las seis bolas?

La respuesta es $PR_6^{3,2,1} = \frac{6!}{3! \cdot 2! \cdot 1!} = 60$ ordenaciones.

Ejemplo 2: una urna tiene cuatro bolas rojas, tres negras y dos azules. Si se extrayeran todas las bolas de una en una, anotando su color, ¿cuántas ordenaciones distintas podrían formarse?

La respuesta es $PR_9^{4,3,2} = \frac{9!}{4! \cdot 3! \cdot 2!} = 1260$ ordenaciones.

Ejemplo 3: tenemos 5 libros iguales de Ciencia, 4 libros iguales de Matemáticas y 2 libros iguales de Historia. ¿De cuántas formas distintas podemos colocarlos en un estante?

La respuesta es $PR_{11}^{5,4,2} = \frac{11!}{5! \cdot 4! \cdot 2!} = 6930$ formas.

Ejemplo 4: ¿cuántas agrupaciones distintas se pueden formar con todas las letras de la palabra COCODRILO?

La respuesta es $PR_9^{3,2,1,1,1,1} = \frac{9!}{3! \cdot 2!} = 30240$ agrupaciones.

5. Variaciones.

Variaciones de m elementos tomados de n en n , siendo $m \geq n$, son los distintos grupos de n elementos **no repetidos** que se pueden formar con m elementos, de forma que dos grupos cualesquiera se diferencian o en un elemento o **en el orden de colocación**.

El número total de grupos formados de esta manera se representa por $V_{m,n}$ y es igual al producto de n factores contados a partir de m (incluido m) en sentido decreciente.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots$$

Ejemplo 1: con cinco colores, ¿cuántas banderas tricolores diferentes se pueden formar?

La respuesta es $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ banderas tricolores.

Ejemplo 2: en una carrera de 100 metros lisos, hay 8 atletas en la línea de salida. ¿Cuántas posibilidades se pueden dar en el resultado de la carrera si el primero es medalla de oro, el segundo es medalla de plata y el tercero es medalla de bronce?

La respuesta es $V_{8,3} = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$ posibilidades.

Ejemplo 3: una urna tiene cuatro bolas: negra, verde, roja y azul. Se extraen dos bolas de una en una, anotando su color. ¿De cuántas formas distintas se pueden extraer las dos bolas?

La respuesta es $V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$ formas distintas.

Obsérvese que al ser un número pequeño, las 12 formas se pueden describir:

VR, VA, VN, RV, RA, RN, AR, AV, AN, NR, NV, NA

Ejemplo 4: ¿cuántos números de cuatro cifras distintas se forman con las cifras del uno al seis?

La respuesta es $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ números.

6. Variaciones con repetición.

Variaciones con repetición de m elementos tomados de n en n , son los diferentes grupos de n elementos, **repetidos o no**, que se pueden formar con los m elementos, de forma que dos grupos cualesquiera se diferencian o en un elemento o **en el orden de colocación**.

El número total de grupos formados de esta manera se representa por $VR_{m,n}$

$$VR_{m,n} = m^n$$

Ejemplo 1: con los tres signos de la quiniela (1, X, 2), ¿cuántas quinielas distintas de catorce resultados se pueden dar?

La respuesta es $VR_{3,14} = 3^{14} = 4\,782\,969$ quinielas.

Ejemplo 2: se lanzan dos dados y se anotan los resultados obtenidos. ¿Cuántas parejas de resultados se pueden obtener?

La respuesta es $VR_{6,2} = 6^2 = 36$ resultados.

Ejemplo 3: ¿cuántas agrupaciones de cinco letras se pueden formar con las letras de la palabra VALDESPINO?

La respuesta es $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000$ agrupaciones.

Ejemplo 4: con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ¿cuántos números distintos, de cinco cifras, se pueden escribir de modo que las tres primeras cifras sean impares y las otras dos sean pares?

Las tres primeras cifras se pueden escribir de $VR_{4,3} = 4^3 = 64$ formas.

Las dos últimas cifras se pueden escribir de $VR_{3,2} = 3^2 = 9$ formas.

Tratándose de posibilidades que se presentan al mismo tiempo en una misma configuración, hay que multiplicar los resultados parciales. Luego la respuesta es $64 \cdot 9 = 576$ números.

7. Análisis combinatorio.

