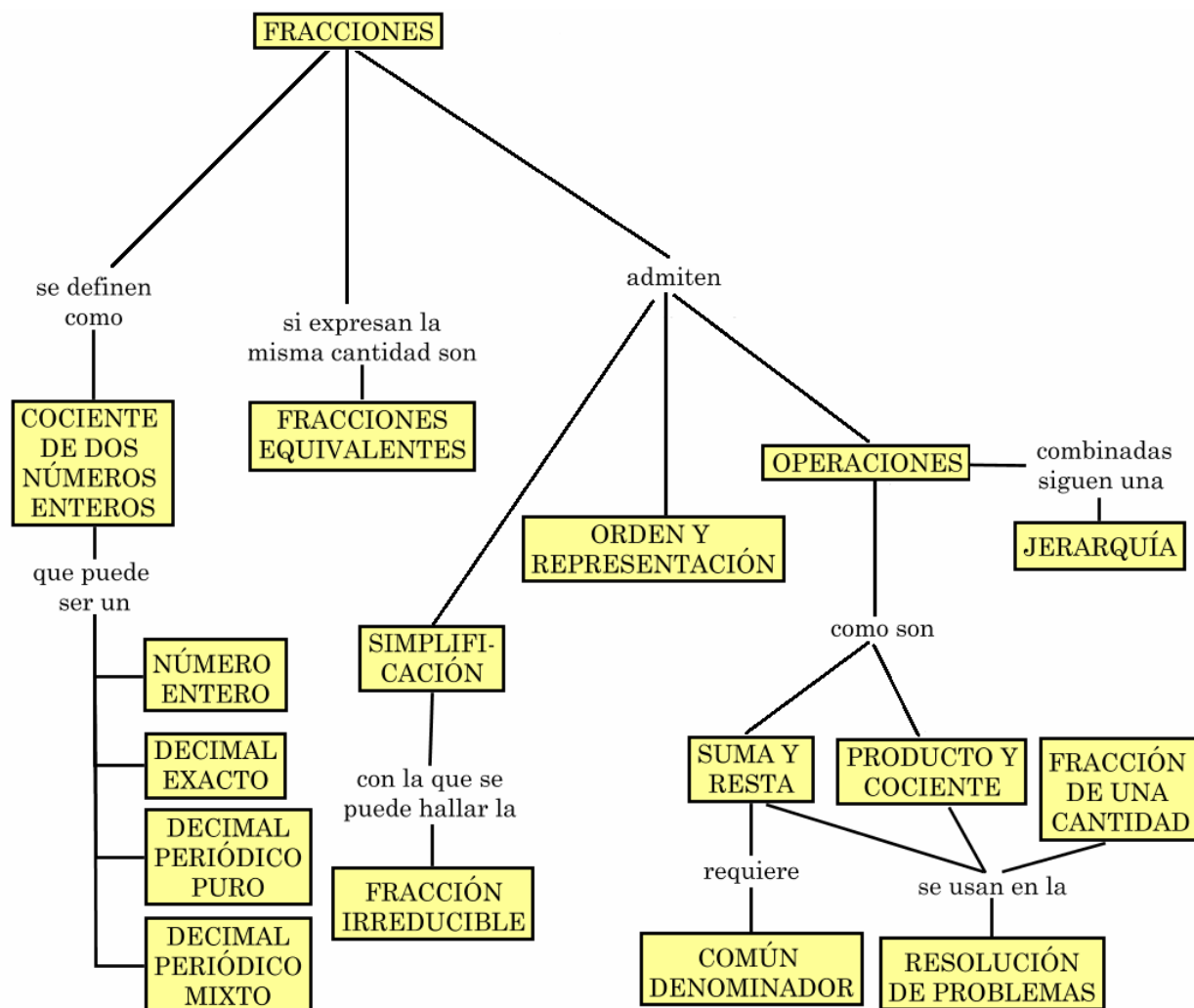




MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Fracciones.

Una **fracción** $\frac{m}{n}$ es el cociente indicado de dos números **m**, **n** $\in \mathbb{Z}$, siendo $n \neq 0$.

El número representado por **n** se llama **denominador**. Indica el número de partes iguales en que se divide la unidad o todo.

El número representado por **m** se llama **numerador**. Indica el número de esas partes que se toman.

Nota: se llama **inversa** de la fracción $\frac{m}{n}$ a la fracción $\frac{n}{m}$.

Por ejemplo, la fracción inversa de $\frac{3}{5}$ es la fracción $\frac{5}{3}$.

1		La unidad o todo
$\frac{1}{2}$		Un medio o la mitad
$\frac{1}{4}$		Un cuarto
$\frac{1}{5}$		Un quinto

La fracción como operador sobre una cantidad

Para aplicar una fracción sobre una cantidad, se **multiplica** la cantidad **por el numerador** de la fracción y el resultado se **divide por el denominador**.

$$\frac{a}{b} \text{ de } C = \frac{a \cdot C}{b}$$

Ejemplo 1: $\frac{2}{5} \text{ de } 15 = \frac{2}{5} \cdot 15 = \frac{2 \cdot 15}{5} = \frac{30}{5} = 6$ Ejemplo 2: $\frac{3}{8} \text{ de } 80 = \frac{3}{8} \cdot 80 = \frac{3 \cdot 80}{8} = \frac{240}{8} = 30$

Fracciones propias y fracciones impropias

Se llama **fracción propia** a la que tiene como expresión decimal un número comprendido entre cero y uno. En estas fracciones, el numerador es menor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{8}$, $\frac{2}{7}$ son fracciones propias

Se llama **fracción impropia** a la que tiene como expresión decimal un número mayor que uno. En estas fracciones, el numerador es mayor que el denominador.

Ejemplos: $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{9}{5}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{7}{2}$ son fracciones impropias

Las fracciones **impropias** pueden expresarse como **suma de un número entero más una fracción propia**.

$$\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}, \text{ siendo } q \in \mathbb{N}, r < n$$

Ejemplo 1: $\frac{3}{2} = \frac{2+1}{2} = \frac{2}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}$

Ejemplo 2: $\frac{14}{3} = \frac{12+2}{3} = \frac{12}{3} + \frac{2}{3} = 4 + \frac{2}{3}$

Representación de fracciones en la recta numérica

– Si la fracción $\frac{m}{n}$ es propia ($m < n$), se aplican los siguientes pasos:

P1. Se dibuja un segmento horizontal. Se señala el extremo izquierdo con el número 0 y el extremo derecho con el número 1. Éste será el segmento unidad.

P2. Desde el 0 se traza una semirrecta r oblicua al segmento unidad.

P3. Con un compás, desde el 0, se marcan n partes iguales en la semirrecta r .

P4. Con una regla, se traza el segmento que une el número 1 del segmento unidad con la última marca del compás de la semirrecta r .

P5. Con la escuadra y el cartabón, se trazan paralelas a este segmento que pasen por el resto de las marcas del compás y se señalan los puntos de corte de estas paralelas con el segmento unidad.

P6. En el segmento unidad, contando m puntos de corte desde el 0, se sitúa la fracción $\frac{m}{n}$.

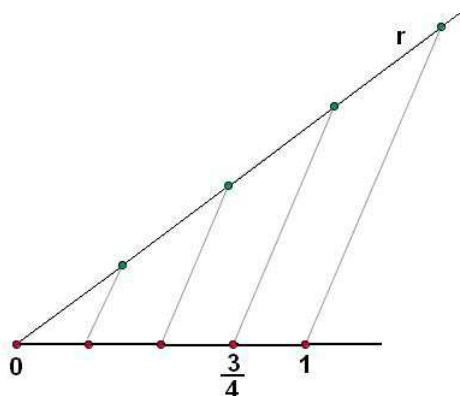
– Si la fracción $\frac{m}{n}$ es impropia ($m > n$), se aplican los siguientes pasos:

P0. Se descompone dicha fracción en la forma $\frac{m}{n} = q + \frac{r}{n}$, siendo $q \in \mathbb{N}$, $r < n$. De esta forma, la fracción $\frac{m}{n}$ estará situada entre los números q y $q+1$.

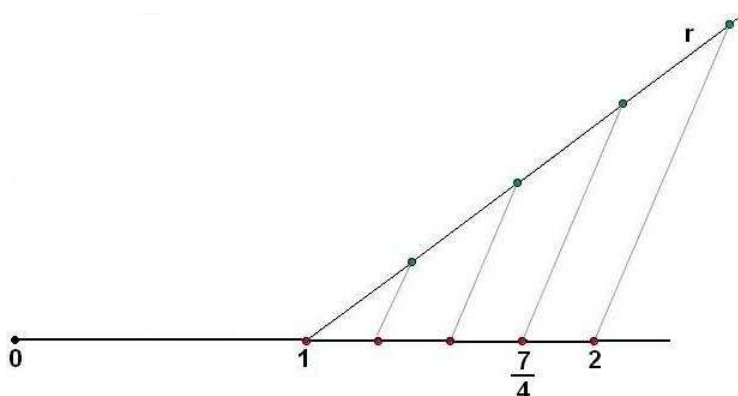
P1→P5. Tomando el segmento comprendido entre los números q y $q+1$ como segmento unidad, se aplican los cinco primeros pasos del procedimiento anterior a la fracción $\frac{r}{n}$.

P6. En el segmento comprendido entre los números q y $q+1$, contando r puntos de corte desde el número q , se sitúa la fracción $\frac{m}{n}$.

Ejemplo: fracción propia $\frac{3}{4}$



Ejemplo: fracción impropia $\frac{7}{4} = 1 + \frac{3}{4}$

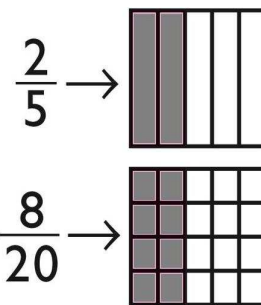


2. Fracciones equivalentes. Fracción irreducible.

Dos fracciones son **equivalentes** si expresan la misma cantidad.

Si las fracciones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son equivalentes, se escribe: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

Ejemplo: $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$ son fracciones equivalentes.



a) **Para averiguar si dos fracciones son equivalentes** basta comprobar si son iguales los productos cruzados.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$$

Ejemplo 1: $\frac{2}{3}$ y $\frac{4}{6}$ son equivalentes ya que $2 \cdot 6 = 3 \cdot 4$

Ejemplo 2: $\frac{3}{5}$ y $\frac{5}{8}$ **no** son equivalentes ya que $3 \cdot 8 \neq 5 \cdot 5$

b) **Para obtener una fracción equivalente** a otra dada, basta con multiplicar (o dividir) el numerador y el denominador de la fracción por un mismo número distinto de cero.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot k}{b \cdot k} \quad \text{si } k \neq 0 \qquad \frac{a}{b} = \frac{a : k}{b : k} \quad \text{si } k \neq 0$$

Ejemplo 1: una fracción equivalente a la fracción $\frac{2}{3}$ es la fracción $\frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 3} = \frac{6}{9}$

Ejemplo 2: una fracción equivalente a la fracción $\frac{16}{20}$ es la fracción $\frac{16 : 4}{20 : 4} = \frac{4}{5}$

c) **Simplificar una fracción** consiste en averiguar la **fracción equivalente irreducible**.

Para simplificar una fracción, se dividen sucesivamente numerador y denominador por un mismo número hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo 1: para simplificar $\frac{8}{40}$, se hace $\frac{8 : 2}{40 : 2} = \frac{4}{20} = \frac{4 : 2}{20 : 2} = \frac{2}{10} = \frac{2 : 2}{10 : 2} = \frac{1}{5} \Rightarrow \frac{8}{40} = \frac{1}{5}$

Ejemplo 2: para simplificar $\frac{42}{6}$, se hace $\frac{42 : 2}{6 : 2} = \frac{21}{3} = \frac{21 : 3}{3 : 3} = \frac{7}{1} = 7 \Rightarrow \frac{42}{6} = 7$

d) **Orden en el conjunto de las fracciones.**

Reducción de fracciones a común denominador: primero se elige como denominador común el producto o el **mínimo común múltiplo de los denominadores**. A continuación **se divide** el común denominador **entre el denominador** de la fracción y el resultado **se multiplica por el numerador**.

Reducir fracciones a común denominador es necesario **para ordenar, sumar y restar pero no para multiplicar y dividir** fracciones.

Orden en las fracciones: una vez reducidas dos fracciones a **común denominador**, es **mayor** la que tiene **mayor numerador**.

Ejemplo: para ordenar las fracciones $\frac{8}{5}, \frac{2}{3}, \frac{1}{6}, \frac{3}{4}$, primero se halla m.c.m.(5, 3, 6, 4) = 60

$$- \text{ Se hace } 60 : 5 = 12 \rightarrow 12 \cdot 8 = 96 \Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{96}{60} \quad - \text{ Se hace } 60 : 3 = 20 \rightarrow 20 \cdot 2 = 40 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{40}{60}$$

$$- \text{ Se hace } 60 : 6 = 10 \rightarrow 10 \cdot 1 = 10 \Rightarrow \frac{1}{6} = \frac{10}{60} \quad - \text{ Se hace } 60 : 4 = 15 \rightarrow 15 \cdot 3 = 45 \Rightarrow \frac{3}{4} = \frac{45}{60}$$

Por lo tanto, el orden de menor a mayor es $\frac{1}{6} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{8}{5}$

Nota: también es posible ordenar fracciones utilizando sus expresiones decimales.

$$\frac{8}{5} = 1,6 \quad \frac{2}{3} = 0,666... \quad \frac{1}{6} = 0,1666... \quad \frac{3}{4} = 0,75 \Rightarrow \frac{1}{6} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4} < \frac{8}{5}$$

3. Operaciones con fracciones.

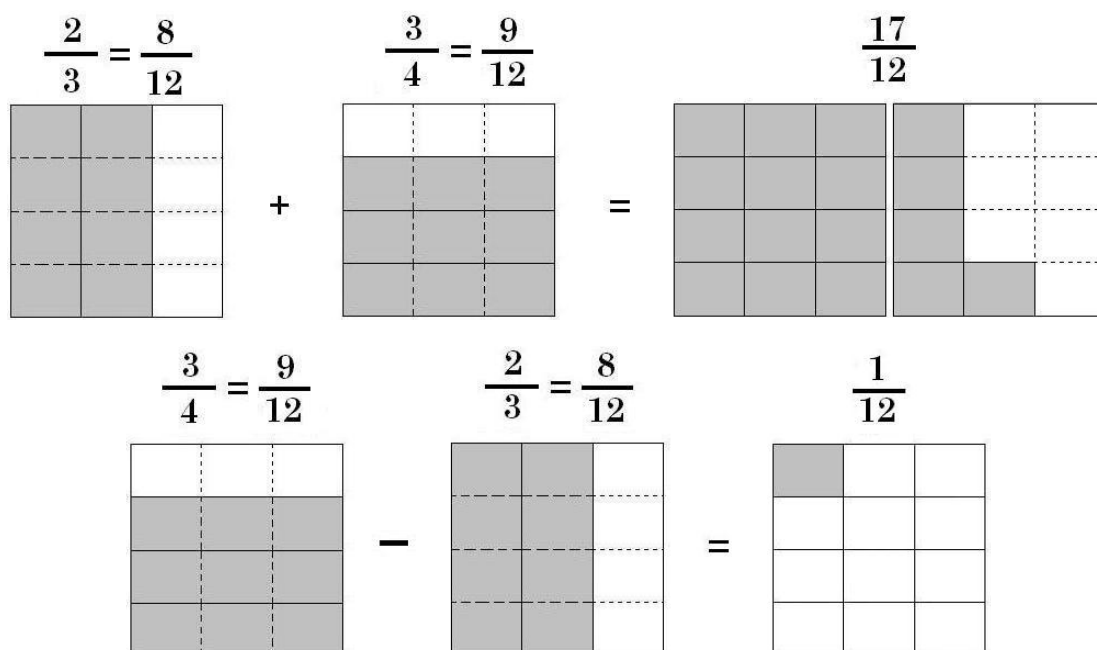
A) Suma y resta de fracciones

A1) Para **sumar (o restar) fracciones** con el mismo denominador, se mantiene el mismo denominador y se suman (o restan) los numeradores.

Ejemplo 1: $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} = \frac{3}{4}$ Ejemplo 2: $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

A2) Para **sumar (o restar) fracciones** con distinto denominador, previamente hay que reducir las fracciones a común denominador y después sumar (o restar) los numeradores.

Ejemplo 1: $\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{8}{12} + \frac{9}{12} = \frac{17}{12}$ Ejemplo 2: $\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9}{12} - \frac{8}{12} = \frac{1}{12}$



B) Producto y cociente de fracciones

B1) Producto de fracciones: el resultado de multiplicar dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{A}{B} \cdot \frac{C}{D} = \frac{A \cdot C}{B \cdot D}$$

Ejemplo 1: $\frac{5}{7} \cdot \frac{3}{5} = \frac{5 \cdot 3}{7 \cdot 5} = \frac{15}{35} = \frac{3}{7}$

Ejemplo 2: $\frac{5}{7} \cdot 14 = \frac{5}{7} \cdot \frac{14}{1} = \frac{5 \cdot 14}{7 \cdot 1} = \frac{70}{7} = 10$

B2) **Cociente de fracciones:** el resultado de dividir dos fracciones es la fracción resultante de multiplicar la primera por la inversa de la segunda.

$$\frac{A}{B} : \frac{C}{D} = \frac{A}{B} \cdot \frac{D}{C} = \frac{A \cdot D}{B \cdot C}$$

Ejemplo 1: $\frac{3}{5} : \frac{6}{7} = \frac{3}{5} \cdot \frac{7}{6} = \frac{3 \cdot 7}{5 \cdot 6} = \frac{21}{30} = \frac{7}{10}$

Ejemplo 2: $\frac{3}{5} : 6 = \frac{3}{5} : \frac{6}{1} = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{3 \cdot 1}{5 \cdot 6} = \frac{3}{30} = \frac{1}{10}$

Jerarquía de las operaciones

El orden de ejecución de las operaciones en una situación en la que aparecen paréntesis, potencias o/y raíces, multiplicaciones o/y divisiones, sumas o/y restas de forma combinada, es el mismo que se aplica para los números enteros.

Ejemplo 1: $2 + \frac{1}{3} : \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \left(\frac{9}{4} - 2\right) = 2 + \frac{2}{9} - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 2 + \frac{2}{9} - \frac{2}{12} = \frac{2}{9} + \frac{2}{9} - \frac{1}{6} = \frac{36}{18} + \frac{4}{18} - \frac{3}{18} = \frac{37}{18}$

Ejemplo 2: $\left(2 + \frac{1}{3}\right) : \frac{3}{2} - \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} - 2 = \frac{7}{3} : \frac{3}{2} - \frac{18}{12} - 2 = \frac{14}{9} - \frac{3}{2} - \frac{2}{1} = \frac{28}{18} - \frac{27}{18} - \frac{36}{18} = \frac{-35}{18}$

4. Problemas con fracciones.

Problema 1. En una carrera han tomado la salida 300 participantes, pero abandonaron 120. ¿Qué fracción del total de los participantes terminaron la carrera?

Solución: la fracción de participantes que abandonaron fue $\frac{120}{300} = \frac{2}{5}$

$\frac{5}{5} - \frac{2}{5} = \frac{3}{5} \Rightarrow$ la fracción de participantes que terminaron la carrera fue $\frac{3}{5}$

Problema 2. En una carrera han tomado la salida 550 participantes, pero abandonaron dos quintas partes de los que empezaron. ¿Cuántos terminaron la carrera?

Solución: el número de abandonos fue $\frac{2}{5}$ de 550 = $\frac{2 \cdot 550}{5} = 220$

$550 - 220 = 330 \Rightarrow$ terminaron la carrera 330 participantes

Ejemplo 3. En una carrera han llegado a la meta 120 participantes, lo que supone tres octavas partes de los que empezaron. ¿Cuántos participantes había al inicio de la carrera?

Solución: $\frac{3}{8}$ de los que empezaron son 120 $\Rightarrow \frac{1}{8}$ de los que empezaron son $120 : 3 = 40$

Luego el total = $\frac{8}{8}$ son $8 \cdot 40 = 320 \Rightarrow$ al inicio de la carrera había 320 participantes

Problema 4. Un agricultor siembra dos quintos de su huerta de melones y un tercio de sandías. La huerta tiene 3 000 m². ¿Qué fracción del terreno queda sin sembrar? ¿Qué superficie de terreno queda sin sembrar?

Solución: la fracción que siembra es $\frac{2}{5} + \frac{1}{3} = \frac{11}{15}$

$\frac{15}{15} - \frac{11}{15} = \frac{4}{15} \Rightarrow$ la fracción que queda sin sembrar es $\frac{4}{15}$

$\frac{4}{15}$ de 3 000 = $\frac{4 \cdot 3000}{15} = 800 \Rightarrow$ quedan sin sembrar 800 m²

Problema 5. Un agricultor siembra tres quintos de su huerta de patatas y una cuarta parte de ajos. Le quedan aún 150 m² sin sembrar. ¿Cuál es la superficie total de la huerta?

Solución: la fracción que siembra es $\frac{3}{5} + \frac{1}{4} = \frac{17}{20}$

$\frac{20}{20} - \frac{17}{20} = \frac{3}{20} \Rightarrow$ la fracción que queda sin sembrar es $\frac{3}{20}$

$\frac{3}{20}$ de la superficie total ocupan 150 m² $\Rightarrow \frac{1}{20}$ de la superficie total ocupa $150 : 3 = 50$ m²

Luego el total = $\frac{20}{20}$ son $20 \cdot 50 = 1\,000 \Rightarrow$ la superficie total es 1 000 m²

Problema 6. Un frasco de perfume tiene una capacidad de tres veinteavos de litro. ¿Cuántos litros se necesitan para llenar 30 frascos?

Solución: $\frac{3}{20} \cdot 30 = \frac{90}{20} = \frac{9}{2} = 4,5 \Rightarrow$ se necesitan 4,5 litros (4 litros y medio)

Problema 7. Con dos litros y medio de perfume se llenan 15 frascos iguales. ¿Cuál es la capacidad de un frasco?

Solución: se transforma 2,5 en fracción $\Rightarrow 2,5 = \frac{25}{10} = \frac{5}{2}$

$\frac{5}{2} : 15 = \frac{5}{2} : \frac{15}{1} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \Rightarrow$ la capacidad de un frasco es $\frac{1}{6}$ de litro (16,66 centilitros)

Problema 8. Un frasco de perfume tiene una capacidad de cuatro quinceavos de litro. ¿Cuántos frascos se llenan con 16 litros de perfume?

Solución: $\frac{16}{1} : \frac{4}{15} = \frac{240}{4} = 60 \Rightarrow$ se llenan 60 frascos