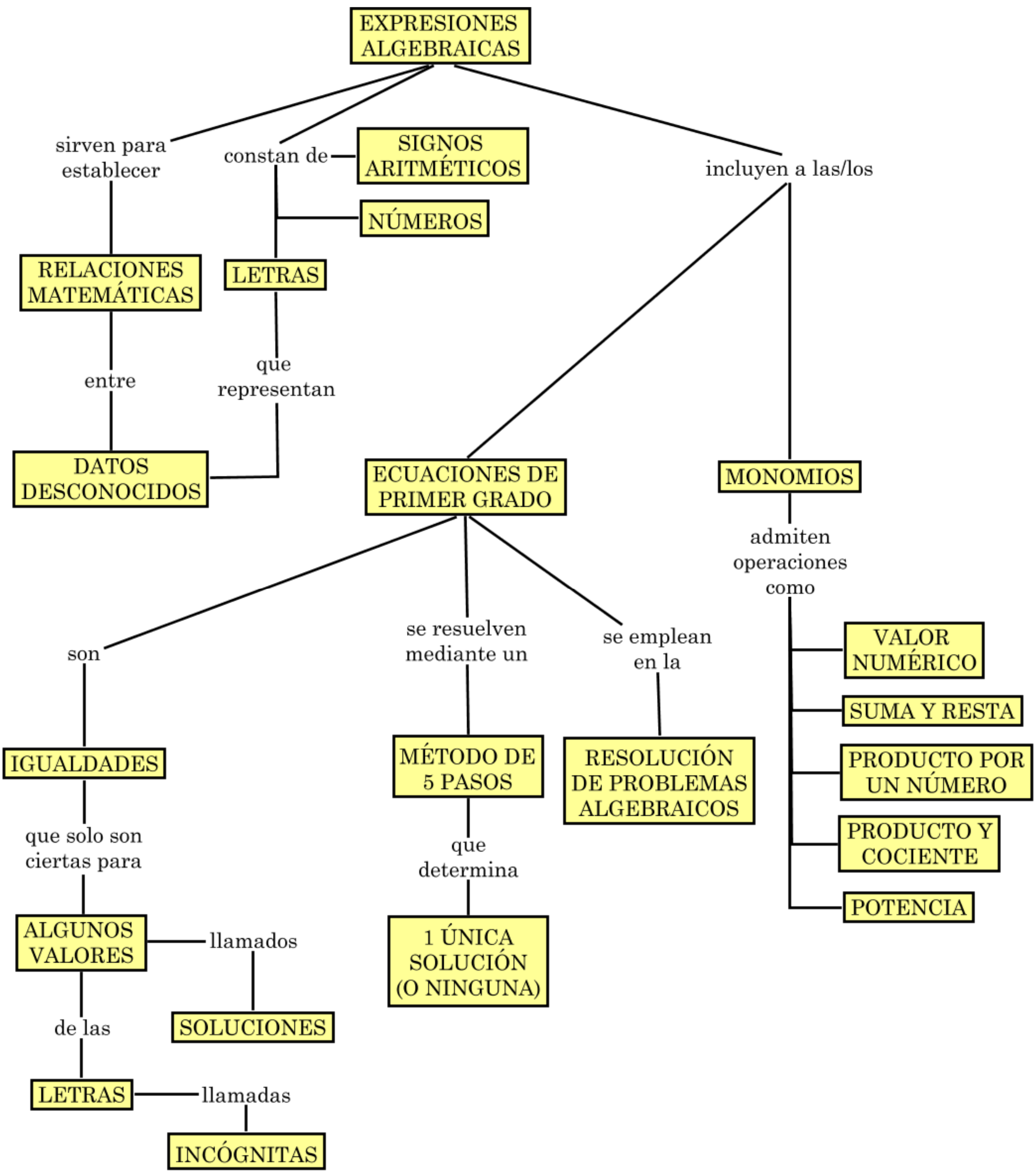
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 1ºESO.

UNIDAD 6. INICIACIÓN AL ÁLGEBRA.

IES LA BAHIA

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Expresiones algebraicas.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras y paréntesis ligados entre sí por los signos de las operaciones: suma, resta, producto, división, potencia, raíz,…

Si entre una letra y un número o bien entre dos letras no aparece ningún signo, se entiende que entre ellas hay un signo de multiplicar.

Por ejemplo, $2 \cdot x$ se suele escribir 2x $a \cdot b$ se suele escribir ab

Ejemplos de expresiones algebraicas son:

$2x \qquad a-7 \qquad \pi \cdot r^2 \qquad 4z-5 \qquad m^2+3m-2 \qquad \dfrac{2n-3}{n-1}$

Las expresiones algebraicas surgen de **traducir** al lenguaje matemático, frases o enunciados en los que aparecen **datos desconocidos que se representan por letras**.

Ejemplos:

Frase	Expresión algebraica	Frase	Expresión algebraica
El doble de m	2m	El triple de m	3m
Un número x disminuido en 2	x–2	Un número x aumentado en 3	x+3
La mitad de n	$\dfrac{n}{2}$	La tercera parte de n	$\dfrac{n}{3}$
El cuadrado de x	x^2	El cubo de x	x^3
La suma de a y b	a + b	La diferencia entre x e y	x – y
El producto de m por n	$m \cdot n$	El cociente entre p y q	$\dfrac{p}{q}$
El siguiente de x	x+1	El anterior de x	x–1
El doble de x más el triple de y	2x+3y	La mitad de n es igual al triple de z	$\dfrac{n}{2}=3z$
Tres números consecutivos	x, x+1, x+2	La raíz cuadrada de la suma de c y d	$\sqrt{c+d}$
Propiedad conmutativa de la suma	$a+b=b+a$	Propiedad conmutativa del producto	$a \cdot b = b \cdot a$

Nota: si entre una letra y un número, entre dos letras, entre una letra y un paréntesis, o entre un número y un paréntesis no aparece escrito ningún signo, hay que interpretar que hay un signo de multiplicar. Por ejemplo, la expresión $4 \cdot (3 \cdot x + 5)$ se suele escribir así: 4 (3x + 5)

Valor numérico de una expresión algebraica

En una expresión algebraica, el valor de una letra es variable ya que puede representar a más de un número. Se llama **valor numérico de una expresión algebraica** al resultado de sustituir las letras de la expresión por los números propuestos y realizar las operaciones.

Ejemplo 1: el valor numérico de $3x+2y$ para $x = 0$, $y = -1$ es $3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0 - 2 = -2$

Ejemplo 2: el valor numérico de x^3+2xy para $x = -2$, $y = 1$ es $(-2)^3 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -8 - 4 = -12$

Ejemplo 3: el valor numérico de $\dfrac{2x-4}{y+1}$ para $x = -2$, $y = 1$ es $\dfrac{2 \cdot (-2) - 4}{1+1} = \dfrac{-8}{2} = -4$

2. Monomios.

Se llama **monomio** al producto indicado de un número por una o más letras elevadas a un exponente natural, es decir, $a \cdot x^m\, y^n\, z^p \cdot \ldots$, donde m, n, p,… son números naturales.

– El número representado por la letra **a** se llama **coeficiente**

– El producto de las letras $x^m\, y^n\, z^p \cdot \ldots$ se llama **parte literal**

– El **grado** del monomio es la suma de todos los exponentes: $m + n + p + \ldots$

Ejemplos:

$2x^5y^3$ es un monomio de grado 8, coeficiente 2, parte literal x^5y^3

x^3y^2 es un monomio de grado 5, coeficiente 1, parte literal x^3y^2

$7x^3y^2z$ es un monomio de grado 6, coeficiente 7, parte literal x^3y^2z

$9xy$ es un monomio de grado 2, coeficiente 9, parte literal xy

$-3x$ es un monomio de grado 1, coeficiente -3, parte literal x

Nota: un número se considera un monomio de grado cero ya que todo número real se puede expresar así: $c = c \cdot 1 = c \cdot x^0$

Monomios semejantes son los que tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $7x^3y^2 \quad 4x^3y^2$ son semejantes; $4x^3yz^2 \quad -2x^3yz^2$ son semejantes

$5x^3 \quad -2x^3$ son semejantes; $3x^2 \quad -7x^2$ son semejantes

$4x^3 \quad 4x^2$ NO son semejantes; $7x^5y^2 \quad 7x^5$ NO son semejantes

3. Operaciones con monomios.

a) **Suma y resta**: la suma (resta) de monomios semejantes es igual a otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma (resta) de los coeficientes. Si los monomios no son semejantes, la suma (resta) se deja indicada.

Ejemplo 1: $5x^4 - 8x^2 + 9x - 2x^4 + 2x = (5x^4 - 2x^4) - 8x^2 + (9x + 2x) = 3x^4 - 8x^2 + 11x$

Ejemplo 2: $3x^3 - 4x^2 - 2 - 2x^3 + 8x^2 + 1 = (3x^3 - 2x^3) + (-4x^2 + 8x^2) + (-2 + 1) = x^3 + 4x^2 - 1$

Propiedad distributiva: un número delante de un paréntesis, multiplica a todos y cada uno de los términos que se encuentren dentro del paréntesis, teniendo en cuenta la regla de los signos: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Ejemplo 1: $7(x - 1) - 4(x + 3) = 7x - 7 - 4x - 12 = (7x - 4x) + (-7 - 12) = 3x - 19$

Ejemplo 2: $5(x^2 + x) - 3(x^2 - 2x) = 5x^2 + 5x - 3x^2 + 6x = (5x^2 - 3x^2) + (5x + 6x) = 2x^2 + 11x$

Ejemplo 3: $4(x + 1) - (x^2 - 1) - (1 + x) - 3(x^2 - 1) = 4x + 4 - x^2 + 1 - 1 - x - 3x^2 + 3 = -4x^2 + 3x + 7$

Ejemplo 4: $x^3 - (x - x^2) + 5(2x - 1) - (1 - 4x^2) = x^3 - x + x^2 + 10x - 5 - 1 + 4x^2 = x^3 + 5x^2 + 9x - 6$

b) **Producto**: el producto de monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias de la misma base.

Ejemplo 1: $3x^5 \cdot 2x^4 = (3 \cdot 2) \cdot x^{5+4} = 6x^9$

Ejemplo 2: $-2x^2y \cdot 5xy^2 = (-2 \cdot 5) \cdot x^2y \cdot xy^2 = (-10) \cdot x^{2+1}y^{1+2} = -10x^3y^3$

Ejemplo 3: $(-3x) \cdot (-2x) \cdot 5x = ((-3) \cdot (-2) \cdot 5) \cdot x \cdot x \cdot x = 30x^3$

Ejemplo 4: $3x^4y \cdot 2xy \cdot x^2y^3 = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot x^4y \cdot xy \cdot x^2y^3 = 6 \cdot x^{4+1+2} \cdot y^{1+1+3} = 6x^7y^5$

c) **Cociente**: el cociente de monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias de la misma base.

Ejemplo 1: $8x^5y^4 : 2x^2y^3 = \dfrac{8x^5y^4}{2x^2y^3} = \dfrac{8}{2} \cdot x^{5-2} \cdot y^{4-3} = 4x^3y$

Ejemplo 2: $21x^2y^3 : 3y = \dfrac{21x^2y^3}{3y} = \dfrac{21}{3} \cdot x^2 \cdot y^{3-1} = 7x^2y^2$

Ejemplo 3: $10x^2y^2 : 5x^2y^2 = \dfrac{10x^2y^2}{5x^2y^2} = \dfrac{10}{5} \cdot x^{2-2} \cdot y^{2-2} = 2 \cdot x^0 \cdot y^0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

d) **Potencia**: la potencia de un monomio es igual a otro monomio resultado de elevar cada elemento del monomio al exponente de la potencia.

Ejemplo 1: $(2x^3y^2)^4 = (2^4) \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot y^{2 \cdot 4} = 16x^{12}y^8$

Ejemplo 2: $(-3x^3y)^2 = (-3)^2 \cdot x^{3 \cdot 2} \cdot y^{1 \cdot 2} = 9x^6y^2$

Ejemplo 3: $(x^5y^4z^3)^2 = x^{5 \cdot 2} \cdot y^{4 \cdot 2} \cdot z^{3 \cdot 2} = x^{10}y^8z^6$

4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es una igualdad algebraica en la que interviene una sola letra llamada **incógnita**, elevada a uno.

Se llama **solución** de la ecuación a todo número que, sustituido en el lugar de la incógnita, verifica la igualdad.

Ejemplo 1: $x = 2$ es solución de la ecuación $4 + 3x - 7 = 1 + x$ porque $4 + 3 \cdot 2 - 7 = 1 + 2$

Ejemplo 2: $x = 5$ **no** es solución de la ecuación $4 + 3x - 7 = 1 + x$ porque $4 + 3 \cdot 5 - 7 \neq 1 + 5$

Ejemplo 3: $x = -1$ es solución de la ecuación $x^2 - 2x = 3$ porque $(-1)^2 - 2 \cdot (-1) = 1 + 2 = 3$

Ejemplo 4: $x = 4$ **no** es solución de la ecuación $x^2 - 3x = 5$ porque $4^2 - 3 \cdot 4 = 16 - 12 = 4 \neq 5$

Resolver una ecuación significa hallar todas las soluciones posibles. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se aplica el siguiente método basado en 5 pasos:

Ejemplo 1: resolver la ecuación $\dfrac{2x-7}{4} - 2(x-3) = 5 - \dfrac{3(x-1)}{4}$

Paso 1. Se eliminan adecuadamente los paréntesis. $\dfrac{2x-7}{4} - \dfrac{2x-6}{1} = \dfrac{5}{1} - \dfrac{3x-3}{4}$

Paso 2. Si hay denominadores, se pasan todas las fracciones a denominador común usando el m.c.m. de los denominadores. Tras esto, se seleccionan solo los numeradores precedidos de sus signos correspondientes, teniendo en cuenta que **un signo menos delante de una fracción cambia de signo a todos y cada uno de los términos del numerador**.

m.c.m.(4, 1) = 4 ; $\frac{2x-7}{4}-\frac{8x-24}{4}=\frac{20}{4}-\frac{3x-3}{4}$; $2x-7-8x+24=20-3x+3$

Paso 3. Se agrupan a un lado del signo igual los términos que multiplican a la incógnita **x**, mientras que los números se agrupan en el lado contrario, teniendo en cuenta que **todo término que pase de un lado al otro del signo igual, tiene que ser cambiado de signo**.

$2x-8x+3x=20+3+7-24$

Paso 4. Se reducen los términos semejantes en cada lado del signo igual, llegándose finalmente a una situación del tipo $a\cdot x=b$, donde a, b $\in \mathbb{R}$.

$-3x=6$

Paso 5. En la expresión $ax=b$, pueden darse tres casos:

Caso 1. Si a = 0 y b $\neq$ 0, entonces la ecuación **no tiene solución**.

Caso 2. Si a = 0 y b = 0, entonces **cualquier número es solución (ecuación ≡ identidad)**.

Caso 3. Si a $\neq$ 0, entonces la incógnita **x** se despeja así: $x=\frac{b}{a}$, que es la **única solución**.

$x=\frac{6}{-3}$; $x=-2$ **es la única solución**

<u>Ejemplo 2</u>: para resolver la ecuación $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x+2)}{6}=1$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x+1}{3}-\frac{2x+4}{6}=\frac{1}{1}$

Paso 2. m.c.m.(3, 6, 1) = 6 ; $\frac{2x+2}{6}-\frac{2x+4}{6}=\frac{6}{6}$; $2x+2-2x-4=6$

Paso 3. $2x-2x=6-2+4$

Paso 4. $0x=8$ $\Rightarrow$ **la ecuación no tiene solución**

<u>Ejemplo 3</u>: para resolver la ecuación $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x-2)}{6}=1$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x+1}{3}-\frac{2x-4}{6}=\frac{1}{1}$

Paso 2. m.c.m.(3, 6, 1) = 6 ; $\frac{2x+2}{6}-\frac{2x-4}{6}=\frac{6}{6}$; $2x+2-2x+4=6$

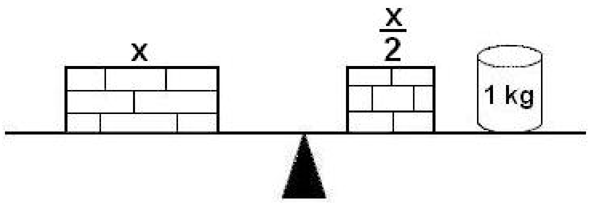
Paso 3. $2x-2x=6-2-4$

Paso 4. $0x=0$ $\Rightarrow$ **cualquier número es solución (la ecuación es una identidad)**

5. Resolución de problemas.

Problema 1. Un ladrillo pesa lo mismo que un kilo más medio ladrillo. Averiguar el peso de un ladrillo.

Se llama **x** al peso de un ladrillo. Se traduce el enunciado a una ecuación: $x = 1 + \frac{x}{2}$



Se resuelve la ecuación $x = 1 + \frac{x}{2}$, obteniéndose como solución $x = 2$

Respuesta: un ladrillo pesa 2 kg.

Problema 2. Dos mesas pesan lo mismo que 45 kg más la mitad de una mesa. ¿Cuánto pesa una mesa?

Se llama **x** al peso de una mesa. Se traduce el enunciado a una ecuación: $2x = 45 + \frac{x}{2}$

Se resuelve la ecuación $2x = 45 + \frac{x}{2}$, obteniéndose como solución $x = 30$

Respuesta: una mesa pesa 30 kg.

Problema 3. El triple de un número es igual al quíntuplo del mismo menos 20. ¿Cuál es este número?

Se llama **x** al número que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $3x = 5x - 20$

Se resuelve la ecuación $3x = 5x - 20$, obteniéndose como solución $x = 10$

Respuesta: el número es 10.

Problema 4. Hallar tres números naturales consecutivos tales que su suma sea 48.

Si se llama **x** al primer número, entonces **x+1** sería el segundo número y **x+2** el tercer número que se quieren averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x + (x + 1) + (x + 2) = 48$

Se resuelve la ecuación $x + (x + 1) + (x + 2) = 48$, obteniéndose como solución $x = 15$

Respuesta: los números son 15, 16 y 17.

<u>Problema 5</u>. La suma de dos números es dieciséis. El triple del primero se diferencia del doble del segundo en tres. Hallar los dos números.

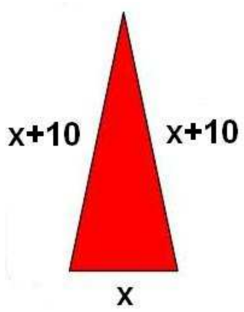
Si se llama **x** a uno de los números que se quiere averiguar, entonces **16 – x** sería el otro número.
Se traduce el enunciado a una ecuación: $3x - 2(16 - x) = 3$

Se resuelve la ecuación $3x - 2(16 - x) = 3$, obteniéndose como solución $x = 7$

<u>Respuesta</u>: los números son 7 y 9.

<u>Problema 6</u>. El perímetro de un triángulo isósceles es 50 cm. Cada uno de los lados iguales es 10 cm mayor que la base. ¿Cuánto mide cada lado?

Si se llama **x** a la base del triángulo, entonces **x+10** y **x+10** serían cada uno de los dos lados iguales.



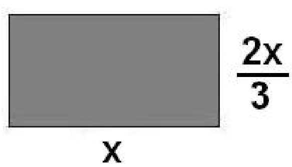
Se traduce el enunciado a una ecuación: $x + (x + 10) + (x + 10) = 50$

Se resuelve la ecuación $x + (x + 10) + (x + 10) = 50$, obteniéndose como solución $x = 10$

<u>Respuesta</u>: la base mide 10 y los otros dos lados miden 20 cm cada uno.

<u>Problema 7</u>. Se sabe que la altura de un rectángulo es dos tercios de la base. El perímetro del rectángulo es 80 m. Calcular las dimensiones del rectángulo.

Si se llama **x** a la base del rectángulo, entonces $\frac{2x}{3}$ sería la altura.



Se traduce el enunciado a una ecuación: $x + x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3} = 80$

Se resuelve la ecuación $x + x + \frac{2x}{3} + \frac{2x}{3} = 80$, obteniéndose como solución $x = 24$

<u>Respuesta</u>: la base mide 24 m y la altura mide 16 m.

<u>Problema 8</u>. La edad de un padre es doble que la de su hijo. Hace nueve años la edad del padre era el triple que la de su hijo. Calcular la edad actual de cada uno.

Si se llama **x** a la edad actual del hijo, entonces **2x** sería la edad actual del padre

	HOY	HACE **9** AÑOS
EDAD DEL PADRE	**2x**	**2x – 9**
EDAD DEL HIJO	**x**	**x – 9**

Se traduce el enunciado a una ecuación: $2x - 9 = 3 \cdot (x - 9)$

Se resuelve la ecuación $2x - 9 = 3 \cdot (x - 9)$, obteniéndose como solución $x = 18$

<u>Respuesta</u>: el hijo tiene 18 años y el padre tiene 36 años.

<u>Problema 9</u>. La madre de Ana tiene triple edad que ella, y dentro de diez años sólo tendrá el doble de la que entonces tenga su hija. ¿Qué edad tiene cada una?

Si se llama **x** a la edad actual de la hija, entonces **3x** sería la edad actual de la madre

	HOY	DENTRO DE **10** AÑOS
EDAD DE LA MADRE	**3x**	**3x + 10**
EDAD DE LA HIJA	**x**	**x + 10**

Se traduce el enunciado a una ecuación: $3x+10=2\cdot(x+10)$

Se resuelve la ecuación $3x+10=2\cdot(x+10)$, obteniéndose como solución $x=10$

<u>Respuesta</u>: la hija tiene 10 años y la madre tiene 30 años.

<u>Problema 10</u>. La suma de las edades de tres personas es 96 años. La mayor tiene 13 años más que la mediana y ésta tiene 25 años más que la menor. ¿Cuál es la edad de cada una?

Si se llama **x** a la edad de la menor, entonces **x + 25** sería la edad de la mediana y **x + 25 + 13** sería la edad de la mayor

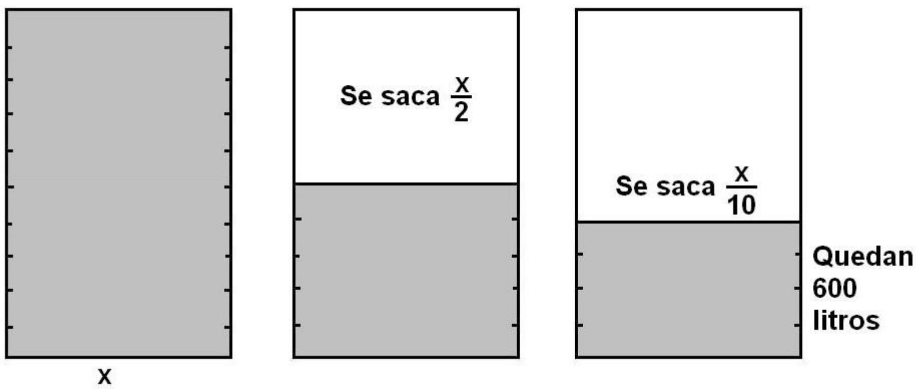
Se traduce el enunciado a una ecuación: $x+(x+25)+(x+25+13)=96$

Se resuelve la ecuación $x+(x+25)+(x+25+13)=96$, obteniéndose como solución $x=11$

<u>Respuesta</u>: la menor tiene 11 años, la mediana tiene 36 años y la mayor tiene 49 años.

<u>Problema 11</u>. De un depósito lleno de agua se saca primero la mitad, y después, la décima parte del agua que contiene. Si en el depósito quedan aún 600 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?

Si se llama **x** a la capacidad del depósito, entonces $\frac{x}{2}$ es la mitad y $\frac{x}{10}$ es la décima parte del agua que contiene



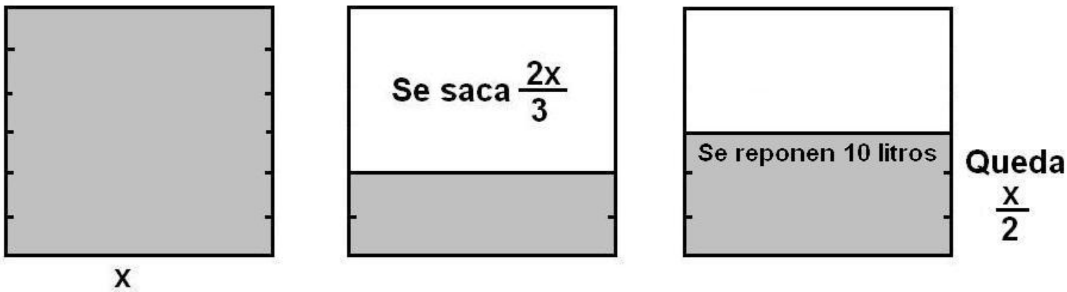
Se traduce el enunciado a una ecuación: $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=600$

Se resuelve la ecuación $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=600$, obteniéndose como solución $x=1\,500$

<u>Respuesta</u>: la capacidad del depósito es 1 500 litros.

<u>Problema 12</u>. Se han consumido las dos terceras partes de un bidón de combustible. Se reponen 10 litros, quedando lleno hasta la mitad. Calcular la capacidad del bidón.

Si se llama **x** a la capacidad del bidón, entonces $\frac{2x}{3}$ son las dos terceras partes y $\frac{x}{2}$ es la mitad de su capacidad



Se traduce el enunciado a una ecuación: $x-\frac{2x}{3}+10=\frac{x}{2}$

Se resuelve la ecuación $x-\frac{2x}{3}+10=\frac{x}{2}$, obteniéndose como solución $x=60$

<u>Respuesta</u>: la capacidad del bidón es 60 litros.