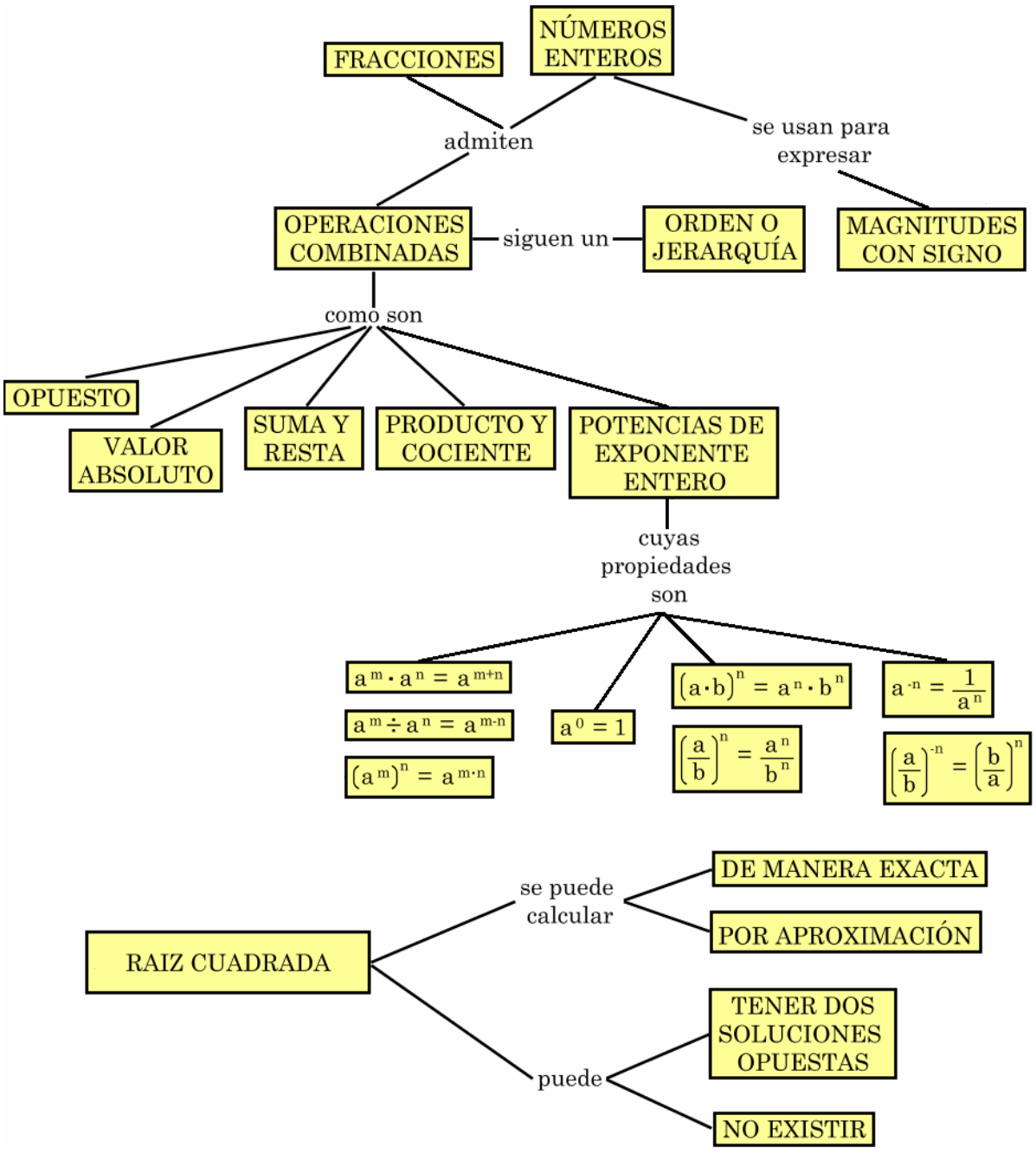
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 2ºESO.

UNIDAD 1. NÚMEROS ENTEROS. POTENCIAS.

IES LA BAHIA

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. El conjunto de los números enteros.

Existen magnitudes que tienen dos sentidos, por lo cual no basta con número y unidad para representarlas. Por ejemplo, contextos en los que aparecen magnitudes **con dos sentidos** son:

– Un lugar geográfico puede encontrarse por encima o por debajo del nivel del mar.

– El saldo de una cuenta bancaria puede tener superávit o déficit.

– La temperatura en una zona puede estar por encima o por debajo de cero grados.

– El año en que ocurrió un hecho histórico pudo ser antes o después de Cristo.

Para representar los valores que toman este tipo de magnitudes, se usan números a los que se les antepone un signo + ó – , dependiendo del sentido de la magnitud. Si tienen signo + se les llama números **enteros positivos** y si tienen signo – se les llama **enteros negativos**.

El conjunto de los números **enteros** es $\mathbb{Z} = \{ \ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Obsérvese que el conjunto de los números **naturales**, $\mathbb{N} = \{ 0, 1, 2, 3, \ldots\}$, está incluido en el conjunto de los números enteros: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$

Nota: salvo que estén formando parte de operaciones combinadas, no es necesario escribir el signo + delante de los números positivos. Es decir, $+3 = 3$; $+11 = 11$; $+19 = 19$ …

Signo de una fracción

a) Si el numerador y el denominador tienen distinto signo, entonces la **fracción** es **negativa**.

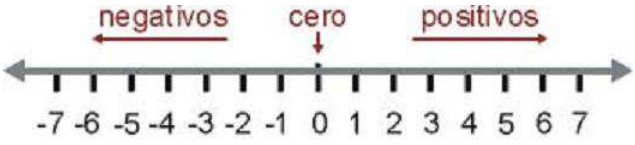
$\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$ Ejemplos: $\frac{-4}{7} = -\frac{4}{7}$ $\frac{4}{-7} = -\frac{4}{7}$

b) Si el numerador y el denominador tienen el mismo signo, entonces la **fracción** es **positiva**.

$\frac{-a}{-b} = \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b} = \frac{a}{b}$ Ejemplos: $\frac{-4}{-7} = \frac{4}{7}$ $\frac{+4}{+7} = \frac{4}{7}$

Representación y orden en $\mathbb{Z}$

Para representar números enteros, se traza una línea recta y se marca en el centro de la recta el número 0. A continuación, se marca el número 1 a la derecha del cero, quedando así establecida la distancia equivalente a una unidad. Los enteros **positivos** se marcan a la **derecha** del cero y los **negativos** a la **izquierda** del cero, repitiendo la unidad anterior tantas veces como sea necesario.



Orden en $\mathbb{Z}$: las relaciones de orden entre **a**, **b** $\in \mathbb{Z}$, se expresan de las siguientes formas:

(1) **a < b** se lee "**a** es menor que **b**" (2) $a \leq b$ se lee "**a** es menor o igual que **b**"

(3) **a > b** se lee "**a** es mayor que **b**" (4) $a \geq b$ se lee "**a** es mayor o igual que **b**"

Obsérvese que entre dos números negativos, el menor de los dos es el que se encuentra más lejos del cero.

Ejemplos: $-5 < -3$ $-3 < 2$ $-4 > -8$ $3 > -6$ $-5 < 0$ $5 > 0$

Opuesto y valor absoluto de un número entero

Dado un número entero **n**, se dice que el **opuesto de n** es **–n**. Por lo tanto, dos números son **opuestos** si se diferencian solo en el signo.

Por ejemplo, los números 3 y –3 son opuestos; los números 5 y –5 son opuestos; los números 7 y –7 son opuestos, …

Dado un número entero **n**, se dice que el **valor absoluto de n** es la distancia entre **n** y el 0. Por lo tanto, el valor absoluto de un número es el valor que resulta al prescindir de su signo. Se representa por |n|.

Ejemplos: $|+3| = 3$ $|-3| = 3$ $|+5| = 5$ $|-5| = 5$

Obsérvese que dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto ya que ambos están situados a la misma distancia del cero.

2. Operaciones con números enteros.

A) Suma y resta de números enteros

Paso 1. Se resuelven los paréntesis teniendo en cuenta que el signo negativo delante de un paréntesis cambia de signo a todos los números que están dentro del paréntesis.

Paso 2. Se agrupan y se suman los números positivos por un lado.

Paso 3. Se agrupan y se suman los números negativos por otro lado, escribiendo con signo negativo el resultado final.

Paso 4. Se restan los resultados anteriores y se pone delante el signo del mayor de ellos.

Ejemplo 1: $10 - (-2) + (-5) - (+12) - (-4) + 3 - (+7) = 10 +2 -5 -12 +4 +3 -7 =$

$= 10 +2 +4 +3 -5 -12 -7 = +19 - 24 = -5$

Ejemplo 2: $1 - (+6) - (-4) - (-2) - (+3) + (-2) +1 = 1 -6 +4 +2 -3 -2 +1 =$

$= 1 +4 +2 +1 -6 -3 -2 = +8 - 11 = -3$

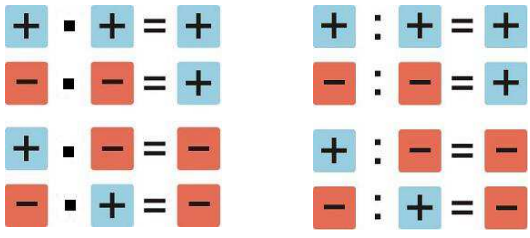
B) Multiplicación y división de números enteros

Paso 1. Se multiplican o se dividen de forma natural.

Paso 2. Delante del resultado se pone:

el signo + si ambos son del mismo signo o,

el signo – si ambos son de signo contrario.



Ejemplos: $(-6)\cdot 6 = -36$ $(-6)\cdot(-4) = +24$

$(-8) : (-4) = +2$ $(-8) : 2 = -4$

Nota: si a los signos de la suma, resta, producto o cociente le sigue un número negativo, éste se debe escribir entre paréntesis.

Mal escrito: 7 + –3 Bien escrito: 7 + (–3) Mal escrito: 7 – –3 Bien escrito: 7 – (–3)

Mal escrito: 7 · –3 Bien escrito: 7 · (–3) Mal escrito: 7 : –3 Bien escrito: 7 : (–3)

3. Potencias de exponente entero.

A) Potencia de base entera y exponente natural

Dados los números **a** $\in \mathbb{Z}$, **n** $\in \mathbb{N}$, se llama **potencia** de **base a** y **exponente n** al producto del número **a** por sí mismo **n** veces. Se representa por a^n.

Ejemplos: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ $\quad (-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$ $\quad (-1)^4 = (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = 1$

Signo de una potencia de base entera y exponente natural

1. Si la **base** tiene signo **positivo**, el resultado siempre tiene signo **positivo**. Da lo mismo que el exponente sea par o impar.

Ejemplos: $(+2)^3 = (+2) \cdot (+2) \cdot (+2) = +8$ $\qquad (+3)^4 = (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) \cdot (+3) = +81$

2. Si la **base** tiene signo **negativo** y el **exponente** es **par**, el resultado tiene signo **positivo**.

Ejemplos: $(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$ $\qquad (-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = +16$

3. Si la **base** tiene signo **negativo** y el **exponente** es **impar**, el resultado tiene signo **negativo**.

Ejemplos: $(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = -27$ $\qquad (-2)^5 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -32$

Propiedades de las potencias

P1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

Ejemplo: $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3)^6$ porque $(-3)^2 \cdot (-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = (-3)^6$

P2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

Ejemplo: $\dfrac{(-3)^5}{(-3)^3} = (-3)^2$ porque $\dfrac{(-3)^5}{(-3)^3} = \dfrac{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)} = (-3) \cdot (-3) = (-3)^2$

P3. $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

Ejemplo: $((-5)^2)^3 = (-5)^6$ porque $((-5)^2)^3 = (-5)^2 \cdot (-5)^2 \cdot (-5)^2 = (-5)^6$

P4. $a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ Ejemplo: $5^3 \cdot 2^3 = (5 \cdot 2)^3 = (10)^3 = 1000$

P5. $\dfrac{a^m}{b^m} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^m$ Ejemplo: $\dfrac{10^3}{5^3} = \left(\dfrac{10}{5}\right)^3 = 2^3 = 8$

P6. $a^0 = 1$ porque $a^0 = a^{n-n} = \dfrac{a^n}{a^n} = 1$ Ejemplos: $7^0 = 1$ $\quad (-3)^0 = 1$

B) Potencia de base fraccionaria y exponente natural

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \quad b \neq 0 \quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, la **potencia** de **base** $\frac{a}{b}$ y **exponente n** se escribe $\left(\frac{a}{b}\right)^n$ y equivale a multiplicar la base $\frac{a}{b}$ por sí misma **n** veces.

Ejemplo 1: $\left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2} = \frac{243}{32}$ $\left(\frac{3}{2}\right)^5$ tiene base $\frac{3}{2}$ y exponente 5

Ejemplo 2: $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{5}\right) = -\frac{8}{125}$ $\left(-\frac{2}{5}\right)^3$ tiene base $-\frac{2}{5}$ y exponente 3

Propiedades de las potencias

Las potencias de base fraccionaria cumplen las mismas propiedades que las potencias de base un número entero.

P1. $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n}$ P2. $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n}$ P3. $\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m\cdot n}$

P4. $\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)^m$ P5. $\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{c}{d}\right)^m = \left(\frac{a}{b}:\frac{c}{d}\right)^m$ P6. $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

Ejemplo 1: $\left(\frac{3}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$ Ejemplo 2: $\left(\frac{3}{4}\right)^6 : \left(\frac{3}{4}\right)^4 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

Ejemplo 3: $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6 = \frac{64}{729}$ Ejemplo 4: $\left(\frac{3}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\cdot\frac{10}{3}\right)^3 = \left(\frac{30}{15}\right)^3 = 2^3 = 8$

Ejemplo 5: $\left(\frac{2}{9}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{9}:\frac{1}{3}\right)^2 = \left(\frac{6}{9}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$ Ejemplo 6: $\left(\frac{7}{9}\right)^0 = 1$ $\left(-\frac{7}{9}\right)^0 = 1$

C) Potencia de base entera y exponente entero negativo

Dados **a** $\in \mathbb{Z}$, **n** $\in \mathbb{N}$, la **potencia** de **base a** y **exponente negativo** **–n** equivale a una fracción de numerador 1 y denominador a^n.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Demostración: $a^{-n} = a^{0-n} = \frac{a^0}{a^n} = \frac{1}{a^n}$

Ejemplos: $5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$ $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$ $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$

Ejemplos: $\frac{5^3}{5^7} = 5^{-4} = \frac{1}{5^4} = \frac{1}{625}$ $\qquad (2^{-2})^3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^3 = \frac{1^3}{(2^2)^3} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$

$$5^4 \cdot 5^{-6} = 5^4 \cdot \frac{1}{5^6} = \frac{5^4}{5^6} = 5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25}$$

Ejemplos: $(-2)^{-3} = \frac{1}{(-2)^3} = \frac{1}{-8} = -\frac{1}{8}$ $\qquad -5^{-2} = -\frac{1}{5^2} = -\frac{1}{25}$ $\qquad -2^{-3} = -\frac{1}{2^3} = -\frac{1}{8}$

D) Potencia de base fraccionaria y exponente entero negativo

Dados $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ $\quad b \neq 0$ $\quad \mathbf{n} \in \mathbb{N}$, la **potencia** de **base** $\frac{a}{b}$ y **exponente negativo –n** equivale a una potencia de base $\frac{b}{a}$ y exponente **n**.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

Demostración: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \frac{1}{\frac{a^n}{b^n}} = \frac{1}{1} : \frac{a^n}{b^n} = \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplos: $\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} = \left(\frac{5}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ $\qquad \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \left(\frac{2}{1}\right)^3 = \frac{2^3}{1^3} = 8$ $\qquad \left(\left(\frac{1}{3}\right)^{-3}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{-6} = \left(\frac{3}{1}\right)^6 = \frac{3^6}{1^6} = 729$

4. Raíces cuadradas y raíces cúbicas.

A) Raíz cuadrada de un número racional

Dado x entero o fraccionario de signo positivo, se llama **raíz cuadrada de x** a un número cuyo cuadrado es igual a **x**. La raíz cuadrada de x se representa por $\sqrt{x}$.

$$\sqrt{x} = r \quad \Leftrightarrow \quad r^2 = x$$

Ejemplos: $\sqrt{25} = 5$ $\qquad \sqrt{81} = 9$ $\qquad \sqrt{121} = 11$ $\qquad \sqrt{361} = 19$ $\qquad \sqrt{576} = 24$

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6} \qquad \sqrt{\frac{1}{16}} = \frac{1}{4} \qquad \sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} \qquad \sqrt{\frac{64}{9}} = \frac{8}{3} \qquad \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{9}{7}$$

De la definición se deduce lo siguiente:

– Un número positivo tiene dos raíces cuadradas opuestas.

Ejemplo: $r^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad r = \pm 3 \quad$ porque $\quad 3^2 = 9 \quad$ y $\quad (-3)^2 = 9$

– Un número negativo no tiene raíz cuadrada.

Ejemplo: $\sqrt{-9}$ no existe ($\nexists \sqrt{-9}$) porque no hay ningún número cuyo cuadrado sea –9.

Interpretación geométrica: $\sqrt{x}$ es el lado de un cuadrado de área **x**.

Ejemplo: si un pintor quiere hacer un mural cuadrado de 36 m², el ancho y largo del mural deben medir $\sqrt{36} = 6$ m , respectivamente. No se puede decir que un lado "mida –6 m".

B) Raíz cúbica de un número racional

Dado $x \in \mathbb{Q}$, se llama **raíz cúbica de x** al número cuyo cubo es igual a **x**. La raíz cúbica de x se representa por $\sqrt[3]{x}$.

$$\sqrt[3]{x} = r \quad \Leftrightarrow \quad r^3 = x$$

Todos los números tienen una raíz cúbica. Un número y su raíz cúbica tienen el mismo signo.

Ejemplo 1: $\sqrt[3]{8} = 2$ porque $2^3 = 8$ Ejemplo 2: $\sqrt[3]{-8} = -2$ porque $(-2)^3 = -8$

Interpretación geométrica: $\sqrt[3]{x}$ es la arista de un cubo de volumen **x**.

Si se desea fabricar una caja cúbica de 27 m³ de volumen, el largo, ancho y alto de la caja deben medir $\sqrt[3]{27} = 3$ m , respectivamente.

5. Jerarquía de las operaciones.

El orden de ejecución de las operaciones combinadas con paréntesis, potencias o/y raíces, multiplicaciones o/y divisiones, sumas o/y restas, es el siguiente:

Paso 1. Se resuelven las operaciones que hay dentro de los **paréntesis**. Si hay paréntesis encajados, se resuelven de dentro hacia fuera.

Paso 2. Se resuelven las **potencias** o/y **raíces**.

Paso 3. Se se resuelven las **multiplicaciones** o/y **divisiones**. Si éstas se encuentran seguidas, tiene prioridad la que se encuentre más a la izquierda.

Paso 4. Se se resuelven las **sumas** o/y **restas**. Si éstas se encuentran seguidas, tiene prioridad la que se encuentre más a la izquierda.

Ejemplo 1: $3 \cdot 5^2 - \sqrt{16} \cdot 5^2 = 3 \cdot 25 - 4 \cdot 25 = 75 - 100 = -25$

Ejemplo 2: $\sqrt{4} \cdot (-\sqrt{9}) + 2^2 \cdot (-1 - 2) = 2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-3) = -6 - 12 = -18$

Ejemplo 3: $\sqrt{49} - 5 \cdot (-3) + \sqrt{16} \cdot (-5) - 2^3 = 7 + 15 - 20 - 8 = 22 - 28 = -6$

Ejemplo 4: $9 - ((4 \cdot 3^2) - (1 + 4 \cdot 7)) = 9 - ((4 \cdot 9) - (1 + 28)) = 9 - (36 - 29) = 9 - 7 = 2$

Ejemplo 5: $-[(-4 \cdot 2^3) - (1 + 7 \cdot (-6))] = -[(-4 \cdot 8) - (1 - 42)] = -(-32 + 41) = +32 - 41 = -9$