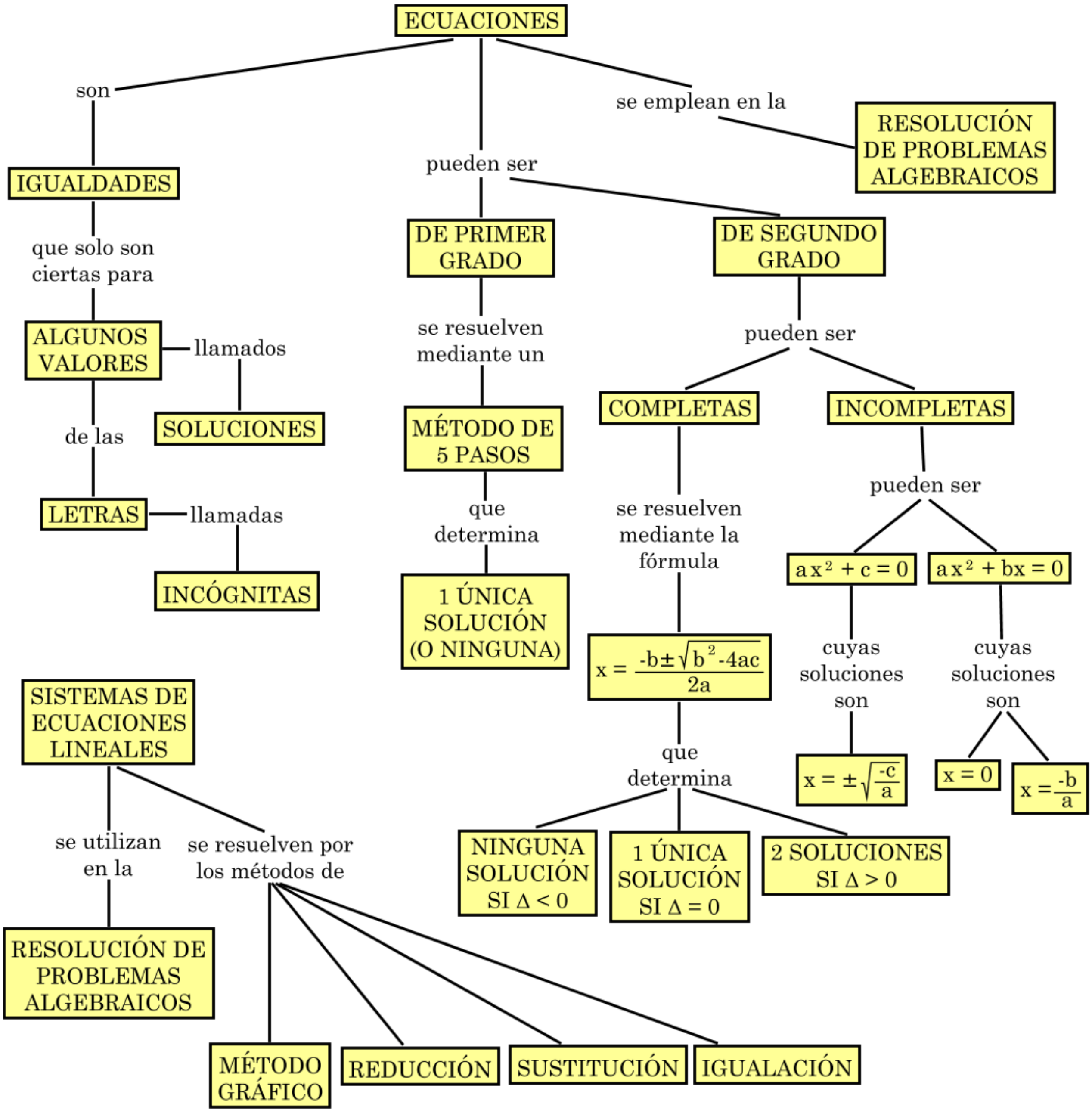
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 2ºESO.

UNIDAD 4. ECUACIONES. SISTEMAS DE ECUACIONES.

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Ecuaciones de primer grado.

Una **ecuación de primer grado con una incógnita** es una igualdad algebraica en la que interviene una sola letra llamada **incógnita**, elevada a uno.

Se llama **solución** de la ecuación a todo número que, sustituido en el lugar de la incógnita, verifica la igualdad.

Ejemplo 1: $x = 2$ es solución de la ecuación $4+3x-7=1+x$ porque $4+3\cdot 2-7=1+2$

Ejemplo 2: $x = 5$ **no** es solución de la ecuación $4+3x-7=1+x$ porque $4+3\cdot 5-7\neq 1+5$

Ejemplo 3: $x=-1$ es solución de la ecuación $x^2-2x=3$ porque $(-1)^2-2\cdot(-1)=1+2=3$

Ejemplo 4: $x=4$ **no** es solución de la ecuación $x^2-3x=5$ porque $4^2-3\cdot 4=16-12=4\neq 5$

Resolver una ecuación significa hallar todas las soluciones posibles. Para resolver una ecuación de primer grado con una incógnita, se aplica el siguiente método basado en 5 pasos:

Ejemplo 1: resolver la ecuación $\dfrac{2x-7}{4}-2(x-3)=5-\dfrac{3(x-1)}{4}$

Paso 1. Se eliminan adecuadamente los paréntesis. $\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{2x-6}{1}=\dfrac{5}{1}-\dfrac{3x-3}{4}$

Paso 2. Si hay denominadores, se pasan todas las fracciones a denominador común usando el m.c.m. de los denominadores. Tras esto, se seleccionan solo los numeradores precedidos de sus signos correspondientes, teniendo en cuenta que **un signo menos delante de una fracción cambia de signo a todos y cada uno de los términos del numerador**.

m.c.m.(4, 1) = 4 ; $\dfrac{2x-7}{4}-\dfrac{8x-24}{4}=\dfrac{20}{4}-\dfrac{3x-3}{4}$; $2x-7-8x+24=20-3x+3$

Paso 3. Se agrupan a un lado del signo igual los términos que multiplican a la incógnita **x**, mientras que los números se agrupan en el lado contrario, teniendo en cuenta que **todo término que pase de un lado al otro del signo igual, tiene que ser cambiado de signo**.

$2x-8x+3x=20+3+7-24$

Paso 4. Se reducen los términos semejantes en cada lado del signo igual, llegándose finalmente a una situación del tipo $a\cdot x=b$, donde $a, b \in \mathbb{R}$.

$-3x=6$

Paso 5. En la expresión $ax=b$, pueden darse tres casos:

Caso 1. Si $a = 0$ y $b \neq 0$, entonces la ecuación **no tiene solución**.

Caso 2. Si $a = 0$ y $b = 0$, entonces **cualquier número es solución (ecuación ≡ identidad)**.

Caso 3. Si $a \neq 0$, entonces la incógnita **x** se despeja así: $x=\dfrac{b}{a}$, que es la **única solución**.

$x=\dfrac{6}{-3}$; $x=-2$ **es la única solución**

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x+2)}{6}=1$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x+1}{3}-\frac{2x+4}{6}=\frac{1}{1}$

Paso 2. m.c.m.(3, 6, 1) = 6 ; $\frac{2x+2}{6}-\frac{2x+4}{6}=\frac{6}{6}$; $2x+2-2x-4=6$

Paso 3. $2x-2x=6-2+4$

Paso 4. $0x=8$ $\Rightarrow$ **la ecuación no tiene solución**

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $\frac{x+1}{3}-\frac{2(x-2)}{6}=1$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x+1}{3}-\frac{2x-4}{6}=\frac{1}{1}$

Paso 2. m.c.m.(3, 6, 1) = 6 ; $\frac{2x+2}{6}-\frac{2x-4}{6}=\frac{6}{6}$; $2x+2-2x+4=6$

Paso 3. $2x-2x=6-2-4$

Paso 4. $0x=0$ $\Rightarrow$ **cualquier número es solución (la ecuación es una identidad)**

Resolución de problemas

Problema 1. Una balanza en equilibrio tiene en el plato de la derecha una pesa de 2 kg y cuatro latas, y en el plato de la izquierda tiene una pesa de 3 kg y dos latas. Averigua el peso de una lata.

Se llama **x** al peso de una lata. Se traduce el enunciado a una ecuación: $2+4x=3+2x$

Se resuelve la ecuación $2+4x=3+2x$, obteniéndose como solución $x=\frac{1}{2}$

Respuesta: una lata pesa 0,5 kg.

Problema 2. La quinta parte de un saco de cemento más 15 kilos pesan lo mismo que la mitad de un saco de cemento. ¿Cuánto pesa un saco de cemento?

Se llama **x** al peso de un saco de cemento. Se traduce el enunciado a una ecuación: $\frac{x}{5}+15=\frac{x}{2}$

Se resuelve la ecuación $\frac{x}{5}+15=\frac{x}{2}$, obteniéndose como solución x = 50

Respuesta: un saco de cemento pesa 50 kg.

Problema 3. La cuarta parte de un número más la quinta parte de ese mismo número es igual a nueve. ¿Cuál es ese número?

Se llama **x** al número que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$

Se resuelve la ecuación $\frac{x}{4}+\frac{x}{5}=9$, obteniéndose como solución x = 20

Respuesta: el número es 20.

Problema 4. La diferencia entre los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 21. ¿Cuáles son dichos números?

Si se llama **x** al primer número, entonces **x+1** sería el segundo número que se quiere averiguar.
Se traduce el enunciado a una ecuación: $(x+1)^2 - x^2 = 21$

Se resuelve la ecuación $(x+1)^2 - x^2 = 21$, obteniéndose como solución x = 10

Respuesta: los números son 10 y 11.

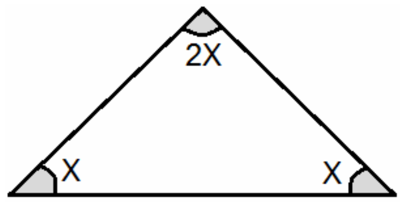
Problema 5. En un triángulo isósceles, el ángulo desigual mide el doble de lo que vale cada uno de los ángulos iguales. Calcula el valor de los tres ángulos.

Si se llama **x** a cada uno de los ángulos iguales, entonces **2x** sería el ángulo desigual.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x + x + 2x = 180$
(ya que la suma de los ángulos de cualquier triángulo es 180º)

Se resuelve la ecuación $x + x + 2x = 180$, obteniéndose como solución x = 45

Respuesta: los dos ángulos iguales miden 45º cada uno y el ángulo desigual mide 90º.



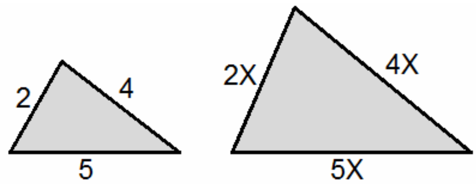
Problema 6. Un triángulo tiene 33 cm de perímetro y es semejante a otro cuyos lados son 2 cm, 4 cm, 5 cm. ¿Cuáles son las dimensiones del triángulo?

Si se llama **x** a la razón de semejanza, entonces **2x**, **4x** y **5x** serían los lados del triángulo.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $2x + 4x + 5x = 33$

Se resuelve la ecuación $2x + 4x + 5x = 33$, obteniéndose como solución x = 3

Respuesta: los lados del triángulo miden 6 cm, 12 cm y 15 cm, respectivamente.



Problema 7. Un señor tiene 60 años y su hijo tiene 30 años. ¿Cuántos años hace que el padre tenía el triple de la edad del hijo?

Si se llama **x** al número de años que hay que retroceder en el tiempo, entonces

	HOY	HACE **x** AÑOS
EDAD DEL PADRE	**60**	**60 – x**
EDAD DEL HIJO	**30**	**30 – x**

Se traduce el enunciado a una ecuación: $60 - x = 3 \cdot (30 - x)$

Se resuelve la ecuación $60 - x = 3 \cdot (30 - x)$, obteniéndose como solución x = 15

Respuesta: hace 15 años.

Problema 8. **Una señora tiene 45 años y su hijo 11 años. ¿Dentro de cuántos años la edad de la madre será el doble de la edad del hijo?**

Si se llama **x** al número de años que hay que avanzar en el tiempo, entonces

	HOY	DENTRO DE **x** AÑOS
EDAD DE LA MADRE	**45**	**45 + x**
EDAD DEL HIJO	**11**	**11 + x**

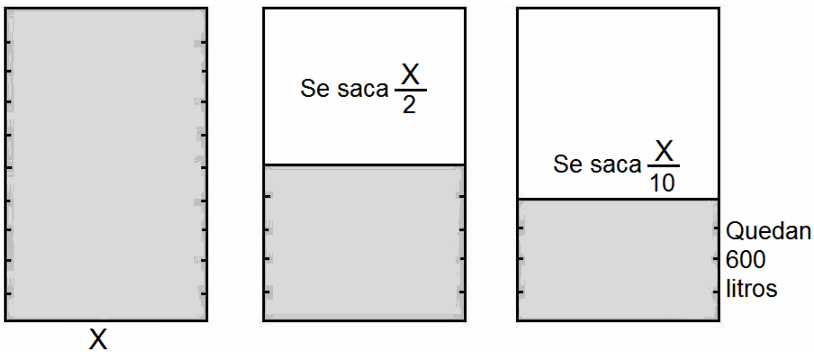
Se traduce el enunciado a una ecuación: $45+x=2\cdot(11+x)$

Se resuelve la ecuación $45+x=2\cdot(11+x)$, obteniéndose como solución x = 23

Respuesta: dentro de 23 años.

Problema 9. **De un depósito lleno de agua se saca primero la mitad, y después, la décima parte del agua que contiene. Si en el depósito quedan aún 600 litros, ¿cuál es la capacidad del depósito?**

Si se llama **x** a la capacidad del depósito, entonces $\frac{x}{2}$ es la mitad y $\frac{x}{10}$ es la décima parte del agua que contiene.



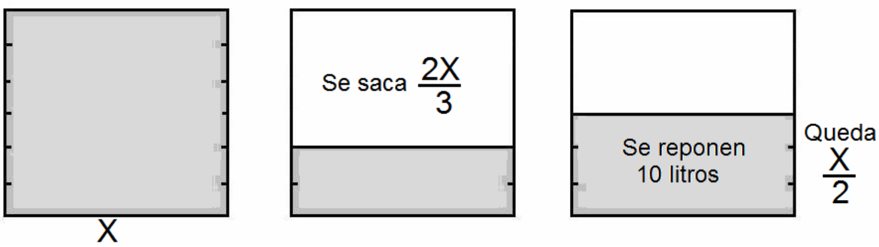
Se traduce el enunciado a una ecuación: $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=600$

Se resuelve la ecuación $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{10}=600$, obteniéndose como solución x = 1 500

Respuesta: la capacidad del depósito es 1 500 litros.

Problema 10. **Se han consumido las dos terceras partes de un bidón de combustible. Se reponen 10 litros, quedando lleno hasta la mitad. Calcula la capacidad del bidón.**

Si se llama **x** a la capacidad del bidón, entonces $\frac{2x}{3}$ representa los dos tercios y $\frac{x}{2}$ la mitad de su capacidad.



Se traduce el enunciado a una ecuación: $x-\frac{2x}{3}+10=\frac{x}{2}$

Se resuelve la ecuación $x-\frac{2x}{3}+10=\frac{x}{2}$, obteniéndose como solución x = 60

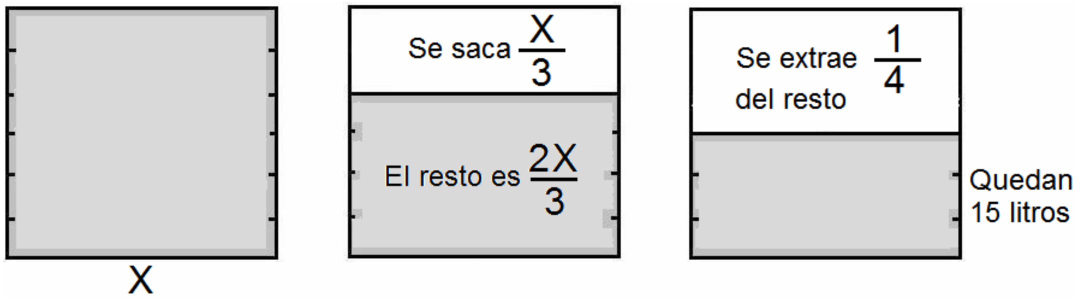
Respuesta: la capacidad del bidón es 60 litros.

Problema 11. De un bidón lleno de agua se saca primero una tercera parte del agua que contiene, y después, la cuarta parte del resto. Si en el bidón quedan aún 15 litros, ¿cuál es la capacidad del bidón?

Si se llama **x** a la capacidad del bidón, entonces $\frac{x}{3}$ es una tercera parte de su capacidad

Por lo tanto, el resto serían las dos terceras partes de su capacidad, es decir, $\frac{2x}{3}$

La cuarta parte del resto sería $\frac{1}{4}$ de $\frac{2x}{3}$, es decir $\frac{1\cdot 2x}{4\cdot 3}$



Se traduce el enunciado a una ecuación: $x-\frac{x}{3}-\frac{1\cdot 2x}{4\cdot 3}=15$

Se resuelve la ecuación $x-\frac{x}{3}-\frac{2x}{12}=15$, obteniéndose como solución x = 30

Respuesta: la capacidad del bidón es 30 litros.

2. Ecuaciones de segundo grado.

Una **ecuación de segundo grado con una incógnita** es una igualdad algebraica en la que interviene una sola letra llamada **incógnita**, elevada a dos.

La forma general de una ecuación de segundo grado con una incógnita es la expresión reducida

$$ax^2+bx+c=0\text{, donde a, b, c} \in \mathbb{R}\text{, siendo } a\neq 0$$

Se llama **solución** de la ecuación a cualquier número que sustituido en el lugar de la incógnita, verifica la igualdad.

Ejemplo: $x = 3$ es solución de la ecuación $x^2-6x+9=0$ porque $3^2-6\cdot 3+9=9-18+9=0$

Para resolver una ecuación de segundo grado escrita en la forma general, se aplica la siguiente fórmula:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Pueden darse tres casos:

1. Si el discriminante $\Delta=b^2-4ac>0$, entonces la ecuación tiene dos soluciones distintas.
2. Si el discriminante $\Delta=b^2-4ac=0$, entonces la ecuación tiene una única solución (doble).
3. Si el discriminante $\Delta=b^2-4ac<0$, entonces la ecuación no tiene solución.

Ejemplo 1: resolver la ecuación $3x^2 - 2x - 5 = 0$

Los coeficientes de esta ecuación son $a = 3, b = -2, c = -5$. Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-5)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{6} = \frac{2 \pm 8}{6} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+8}{6} = \dfrac{10}{6} = \dfrac{5}{3} \\ x_2 = \dfrac{2-8}{6} = \dfrac{-6}{6} = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, **hay dos soluciones**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta = 64 > 0$

Ejemplo 2: resolver la ecuación $x^2 - 6x + 9 = 0$

Los coeficientes de esta ecuación son $a = 1, b = -6, c = 9$. Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{+6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm \sqrt{36-36}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{6 \pm 0}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{6+0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{6-0}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, **hay una única solución**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta = 0$

Ejemplo 3: resolver la ecuación $5x^2 + 2x + 1 = 0$

Los coeficientes de esta ecuación son $a = 5, b = 2, c = 1$. Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 5 \cdot 1}}{2 \cdot 5} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{10} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{10} \quad \textbf{no existe}$$

Por lo tanto, **no hay solución**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta = -16 < 0$

Ejemplo 4: resolver la ecuación $x - \dfrac{1+x^2}{2} = \dfrac{2(x^2-1)}{3}$

Paso 1. Se eliminan adecuadamente los paréntesis. $x - \dfrac{1+x^2}{2} = \dfrac{2x^2-2}{3}$

Paso 2. Si hay denominadores, se pasan todas las fracciones a denominador común usando el m.c.m. de los denominadores. Tras esto, se seleccionan solo los numeradores precedidos de sus signos correspondientes, teniendo en cuenta que **un signo menos delante de una fracción cambia de signo a todos y cada uno de los términos del numerador**.

m.c.m.(2, 3) = 6; $\dfrac{6x}{6} - \dfrac{3+3x^2}{6} = \dfrac{4x^2-4}{6}$; $6x - 3 - 3x^2 = 4x^2 - 4$

Paso 3. Se agrupan todos los términos a un lado del signo igual dejando en el lado contrario solamente al cero. **Todo término que pasa de un lado al otro del signo igual, cambia de signo**.

$0 = -6x + 3 + 3x^2 + 4x^2 - 4$

Paso 4. Se reducen los términos semejantes, llegándose finalmente a la forma general $ax^2+bx+c=0$, donde a, b, c $\in \mathbb{R}$, siendo $a \neq 0$.

$7x^2-6x-1=0$

Los coeficientes de esta ecuación son a = 7, b = −6, c = −1. Se aplica la fórmula:

$$x=\frac{+6\pm\sqrt{(-6)^2-4\cdot 7\cdot(-1)}}{2\cdot 7}=\frac{+6\pm\sqrt{36+28}}{14}=\frac{+6\pm\sqrt{64}}{14}=\frac{+6\pm 8}{14}=$$

$$=\begin{cases} x_1=\dfrac{+6+8}{14}=\dfrac{14}{14}=1 \\ x_2=\dfrac{+6-8}{14}=\dfrac{-2}{14}=\dfrac{-1}{7} \end{cases}$$

Por lo tanto, **hay dos soluciones**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta=64>0$

Ejemplo 5: para resolver la ecuación $\frac{x}{2}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-(1-x)}{3}$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x}{2}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-1+x}{3}$

Paso 2. m.c.m.(2, 12, 3) = 12 ; $\frac{6x}{12}-\frac{x^2+5}{12}=\frac{-4+4x}{12}$; $6x-x^2-5=-4+4x$

Paso 3. $0=-6x+x^2+5-4+4x$

Paso 4. $x^2-2x+1=0$

Los coeficientes de esta ecuación son a = 1, b = −2, c = 1. Se aplica la fórmula:

$$x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{2\pm 0}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Por lo tanto, **hay una única solución**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta=0$

Ejemplo 6: para resolver la ecuación $\frac{x^2}{2}-\frac{3(x+2)}{2}=\frac{x-20}{4}$, se hace lo siguiente:

Paso 1. $\frac{x^2}{2}-\frac{3x+6}{2}=\frac{x-20}{4}$

Paso 2. m.c.m.(2, 4) = 4 ; $\frac{2x^2}{4}-\frac{6x+12}{4}=\frac{x-20}{4}$; $2x^2-6x-12=x-20$

Paso 3. $2x^2-6x-12-x+20=0$

Paso 4. $2x^2-7x+8=0$

Los coeficientes de esta ecuación son a = 2, b = −7, c = 8. Se aplica la fórmula:

$$x=\frac{7\pm\sqrt{(-7)^2-4\cdot 2\cdot 8}}{2\cdot 2}=\frac{7\pm\sqrt{49-64}}{4}=\frac{7\pm\sqrt{-15}}{4}\ \textbf{no existe}$$

Por lo tanto, **la ecuación no tiene solución**. Obsérvese que el discriminante es $\Delta=-15<0$

Ecuaciones de segundo grado incompletas

Se denomina **incompleta** a aquella ecuación de segundo grado en la que falta el término de primer grado o el término independiente:

$$ax^2 + c = 0 \qquad\qquad ax^2 + bx = 0$$

Aunque las ecuaciones incompletas se pueden resolver aplicando la fórmula para el caso general, existen métodos más breves para resolver cada una de ellas, respectivamente.

a) Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

$$ax^2 + c = 0 \;\Rightarrow\; ax^2 = -c \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-c}{a} \;\Rightarrow\; \text{las soluciones son } x_1 = +\sqrt{\frac{-c}{a}} \text{ y } x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

La ecuación tiene **dos soluciones** solo si $\frac{-c}{a} > 0$ y **ninguna solución** si $\frac{-c}{a} < 0$

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $x^2 - 9 = 0$, se hace lo siguiente:

$$x^2 - 9 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 9 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{9} \;\Rightarrow\; \text{las soluciones son } x_1 = +3 \text{ y } x_2 = -3$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $2x^2 - 50 = 0$, se hace lo siguiente:

$$2x^2 = 50 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{50}{2} \;\Rightarrow\; x^2 = 25 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{25} \;\Rightarrow\; \text{las soluciones son } x_1 = +5 \text{ y } x_2 = -5$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $3x^2 + 9 = 0$, se hace lo siguiente:

$$3x^2 = -9 \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-9}{3} \;\Rightarrow\; x^2 = -3 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{-3} \;\Rightarrow\; \text{la ecuación no tiene solución.}$$

b) Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

$$ax^2 + bx = 0 \;\Rightarrow\; x\cdot(ax+b) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \\ \Rightarrow\; ax + b = 0 \;\Rightarrow\; ax = -b \;\Rightarrow\; x_2 = \frac{-b}{a} \end{array} \right.$$

La ecuación tiene **dos soluciones**. Una de ellas siempre es x = 0.

Ejemplo 1: para resolver la ecuación $2x^2 - 18x = 0$, se hace lo siguiente:

$$2x^2 - 18x = 0 \;\Rightarrow\; x\cdot(2x-18) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \\ \Rightarrow\; 2x - 18 = 0 \;\Rightarrow\; 2x = 18 \;\Rightarrow\; x = \frac{18}{2} \;\Rightarrow\; x_2 = 9 \end{array} \right.$$

Ejemplo 2: para resolver la ecuación $3x^2 + 6x = 0$, se hace lo siguiente:

$$3x^2 + 6x = 0 \;\Rightarrow\; x\cdot(3x+6) = 0 \left\langle \begin{array}{l} \Rightarrow\; x = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \\ \Rightarrow\; 3x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; 3x = -6 \;\Rightarrow\; x = \frac{-6}{3} \;\Rightarrow\; x_2 = -2 \end{array} \right.$$

Ejemplo 3: para resolver la ecuación $x^2 + x = 0$, se hace lo siguiente:

$$x^2 + x = 0 \;\Rightarrow\; x(x+1) = 0 \;\Rightarrow\; x = 0 \text{ ó } x + 1 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 0 \quad x_2 = -1$$

Resolución de problemas

<u>Problema 1</u>. Restando 57 al cuadrado de un número, se obtiene 64. Averígualo.

Se llama **x** al número que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x^2 - 57 = 64$

Se resuelve la ecuación $x^2 - 57 = 64$, obteniéndose como soluciones $x_1 = +11$ y $x_2 = -11$.

<u>Respuesta</u>: el número es 11 ó –11

<u>Problema 2</u>. La diferencia entre un número y su cuadrado es 6. ¿Cuál es el número?

Se llama **x** al número que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x^2 - x = 6$

Se resuelve la ecuación $x^2 - x = 6$, obteniéndose como soluciones $x_1 = +3$ y $x_2 = -2$.

<u>Respuesta</u>: el número es +3 ó –2

<u>Problema 3</u>. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 221. ¿Cuáles son los dos números?

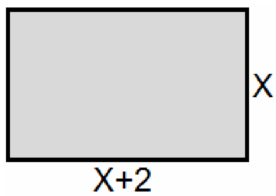
Si se llama **x** al primer número, entonces **x+1** sería el segundo número que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x^2 + (x+1)^2 = 221$

Se resuelve la ecuación $x^2 + (x+1)^2 = 221$, que tiene soluciones $x_1 = +10$ y $x_2 = -11$.

<u>Respuesta</u>: los números son 10 y 11

<u>Problema 4</u>. Un rectángulo de 80 m² de superficie tiene de largo 2 m más que de ancho. Halla sus dimensiones.



Si se llama **x** al ancho del rectángulo, entonces **x+2** sería el largo.

Se traduce el enunciado a una ecuación: $x \cdot (x+2) = 80$

Se resuelve la ecuación $x \cdot (x+2) = 80$, obteniéndose como soluciones $x_1 = 8$ y $x_2 = -10$.

La solución $x_2 = -10$ se descarta ya que el ancho no puede ser una cantidad negativa.

<u>Respuesta</u>: tiene 8 m de ancho por 10 m de largo.

3. Sistemas de ecuaciones lineales.

Una **ecuación lineal de primer grado con dos incógnitas** es una expresión algebraica del tipo $ax + by = c$, donde **a**, **b**, **c** $\in \mathbb{R}$.

Las letras **x**, **y** se llaman **incógnitas** y los números representados por las letras **a**, **b** se llaman **coeficientes**. El número representado por la letra **c** se llama término independiente.

Ejemplo: $3x - 7y = 1$ es una ecuación de primer grado con dos incógnitas.

Se llama **solución** de la ecuación a una pareja de números que sustituidos en el lugar de las incógnitas, satisfacen la igualdad.

Ejemplo 1: $\{ x = -1, y = 7 \}$ es otra solución de la ecuación $2x + y = 5$ porque $2 \cdot (-1) + 7 = 5$

Ejemplo 2: $\{ x = 3, y = 2 \}$ **no** es solución de la ecuación $2x + y = 5$ porque $2 \cdot 3 + 2 = \mathbf{8}$

Un **sistema lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas** es una pareja de ecuaciones

$$\begin{cases} a_1 \cdot x + b_1 \cdot y = c_1 \\ a_2 \cdot x + b_2 \cdot y = c_2 \end{cases} \quad \text{donde } \mathbf{a_1}, \mathbf{b_1}, \mathbf{c_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{b_2}, \mathbf{c_2} \in \mathbb{R}.$$

Se llama **solución del sistema** a cualquier pareja de números que sustituidos de forma ordenada en el lugar de cada incógnita, satisfacen simultaneamente las dos ecuaciones.

Ejemplo 1: $\{ x = 2, y = 1 \}$ es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot 2 + 1 = 5 \\ 2 - 2 \cdot 1 = 0 \end{cases}$

Ejemplo 2: $\{ x = -1, y = 7 \}$ **no** es solución del sistema $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ porque $\begin{cases} 2 \cdot (-1) + 7 = 5 \\ -1 - 2 \cdot 7 = -15 \neq 0 \end{cases}$

Resolver un sistema significa hallar todas las soluciones posibles. Los métodos algebraicos de resolución de sistemas son tres: sustitución, igualación y reducción.

a) Método de sustitución

Consiste en despejar una de las incógnitas de una de las ecuaciones y a continuación sustituir, entre paréntesis, la expresión resultante en la otra ecuación.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} -2x + y = -5 \\ 3x + 2y = 11 \end{cases}$ por sustitución:

1º) Se despeja la incógnita **y** de la primera ecuación $\Rightarrow$ $y = -5 + 2x$

2º) Se sustituye $y = -5 + 2x$ en la segunda ecuación $\Rightarrow$ $3x + 2 \cdot (-5 + 2x) = 11$

3º) Se resuelve la ecuación $3x + 2 \cdot (-5 + 2x) = 11$ $\Rightarrow$ $x = 3$

4º) Se sustituye el valor obtenido $x = 3$ en $y = -5 + 2x$ $\Rightarrow$ $y = -5 + 2 \cdot 3 = 1$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 3, y = 1 }**

Nota: el método de sustitución se aconseja si alguno de los coeficientes del sistema es 1 ó –1.

b) Método de reducción

Consiste en multiplicar cada una de las dos ecuaciones por los números adecuados para que las ecuaciones resultantes tengan en común alguno de los dos términos y a continuación, restar ambas ecuaciones.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} 5x - 3y = 50 \\ 4x + y = 23 \end{cases}$ por reducción:

1º) Se multiplica la primera ecuación por 4 $\Rightarrow$ $20x - 12y = 200$

2º) Se multiplica la segunda ecuación por 5 $\Rightarrow$ $20x + 5y = 115$

3º) Se restan las ecuaciones resultantes $\Rightarrow$ $-17y = 85$

4º) Se resuelve la ecuación $-17y = 85$ $\Rightarrow$ $y = -5$

5º) Se sustituye el valor obtenido $y = -5$ en $5x - 3y = 50$ $\Rightarrow$ $5x + 15 = 50$ y $\Rightarrow$ $x = 7$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 7, y = –5 }**

c) Método de igualación

Consiste en despejar la misma incógnita de cada una de las dos ecuaciones y a continuación, igualar las expresiones resultantes.

Ejemplo: para resolver el sistema $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - 2y = 9 \end{cases}$ por igualación:

1º) Se despeja la incógnita **x** de la primera ecuación $\Rightarrow$ $x = 3 - y$

2º) Se despeja la incógnita **x** de la segunda ecuación $\Rightarrow$ $x = 9 + 2y$

3º) Se igualan las expresiones obtenidas $\Rightarrow$ $3 - y = 9 + 2y$

4º) Se resuelve la ecuación $3 - y = 9 + 2y$ $\Rightarrow$ $y = -2$

5º) Se sustituye el valor obtenido $y = -2$ en la expresión $x = 9 + 2y$ $\Rightarrow$ $x = 9 + 2 \cdot (-2) = 5$

Por lo tanto, la solución del sistema es **{ x = 5, y = –2 }**

Resolución de problemas

<u>Problema 1</u>. La suma de dos números es 16 y su diferencia 4. Hallarlos.

Se llaman **x** e **y** a los números que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 4 \end{cases}$ $\Rightarrow$ $\{ x = 10, y = 6 \}$

<u>Respuesta</u>: los números son 10 y 6.

Problema 2. Descomponer 33 en dos sumandos de modo que dos quintos del primero más un tercio del segundo sea igual a 12.

Se llaman **x** e **y** a los dos sumandos de la descomposición de 33 que se quiere averiguar.

Se traduce el enunciado a un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=33 \\ \dfrac{2x}{5}+\dfrac{1y}{3}=12 \end{cases}$

Se resuelve el sistema equivalente $\begin{cases} x+y=33 \\ 6x+5y=180 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 15, y = 18 \}$

Respuesta: los dos sumandos son 15 y 18.

Problema 3. En un corral hay conejos y gallinas. En total, hay 25 cabezas y 80 patas. Calcula el número de animales de cada clase.

Se llaman **x** al número de conejos e **y** al número de gallinas.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x+y=25 \\ 4x+2y=80 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 15, y = 10 \}$

Respuesta: 15 conejos y 10 gallinas.

Problema 4. Dos artículos valen juntos 376 €. Uno de ellos cuesta 124 € más que el otro. ¿Cuánto vale cada artículo?

Se llaman **x** al precio de un artículo e **y** al precio del otro.

Se traduce el enunciado a un sistema y se resuelve: $\begin{cases} x+y=376 \\ x=y+124 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 250, y = 126 \}$

Respuesta: un artículo cuesta 250 € y el otro 126 €.

Problema 5. Un comerciante tiene garbanzos de dos clases: la clase A a 0,5 €/kg y la clase B a 0,4 €/kg. Quiere vender 100 kg de mezcla a 0,48 €/kg. ¿Cuántos kg tiene que tomar de cada clase?

Se llaman **x** al número de kg de la clase A e **y** al número de kg de la clase B.

Se traduce el enunciado a un sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x+y=100 \\ 0{,}5x+0{,}4y=48 \end{cases}$

Coste de **x** kg de la clase A	$0{,}5 \cdot x$ (en €)
Coste de **y** kg de la clase B	$0{,}4 \cdot y$ (en €)
Coste de 100 kg de mezcla	$0{,}48 \cdot 100 = 48$ €

Se resuelve el sistema $\begin{cases} x+y=100 \\ 0{,}5x+0{,}4y=48 \end{cases} \Rightarrow \{ x = 80, y = 20 \}$

Respuesta: 80 kg de la clase A y 20 kg de la clase B.