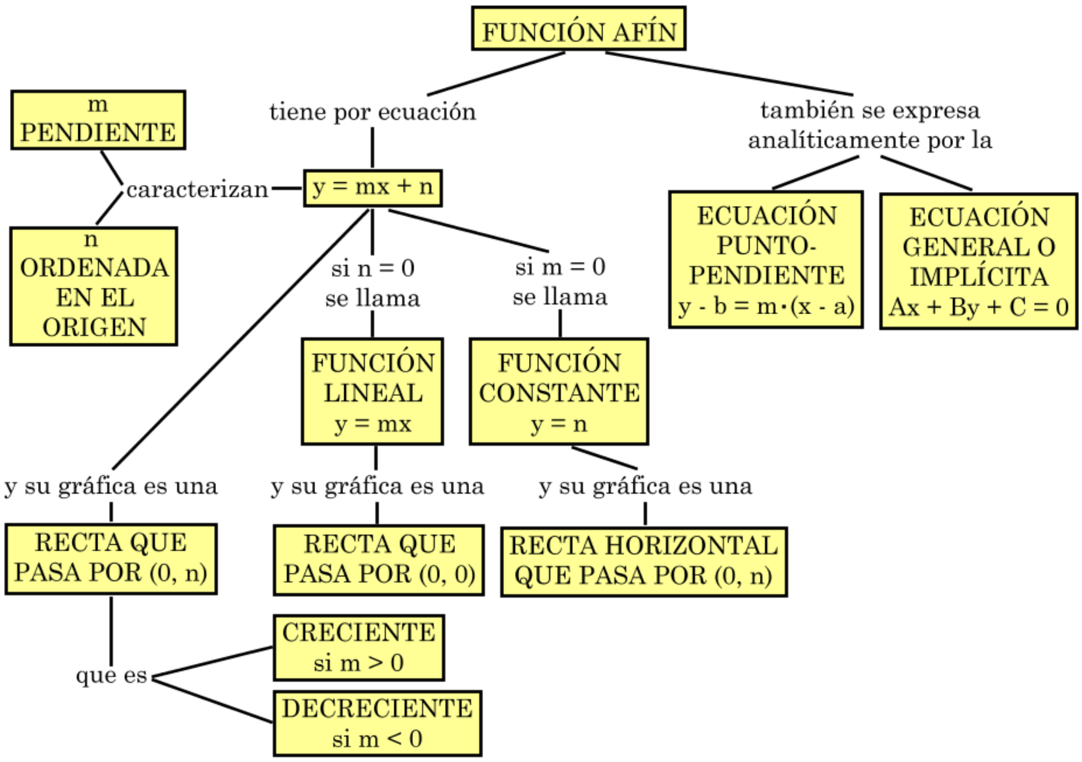
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

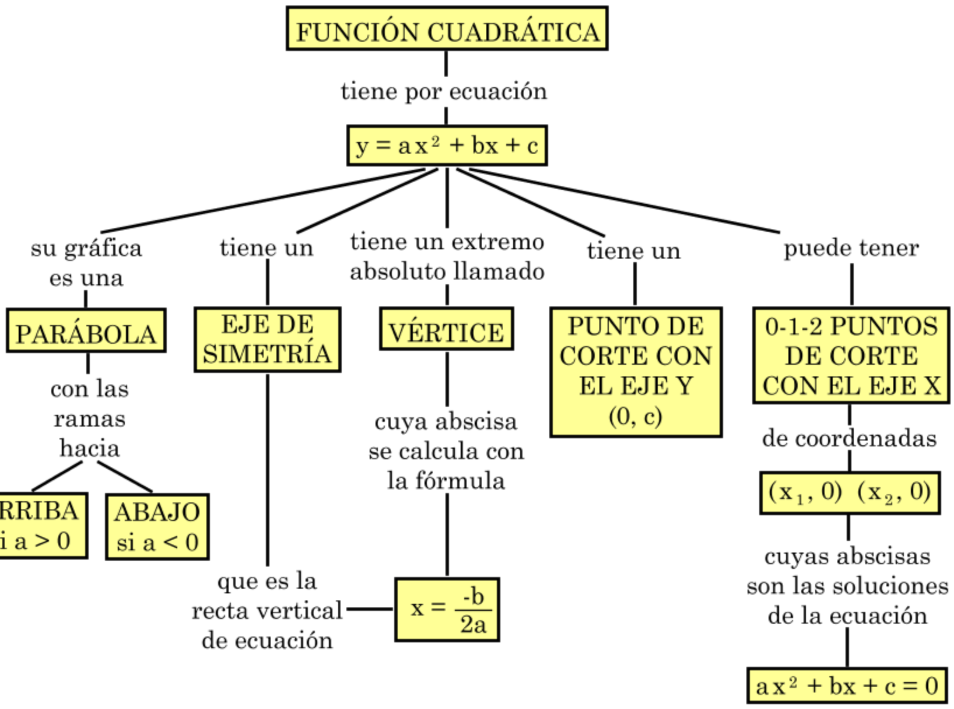
**MATEMÁTICAS DE 3ºESO.**

**UNIDAD 10. FUNCIONES LINEALES Y CUADRÁTICAS.**

IES LA BAHIA

## MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



## 1. Función afín.

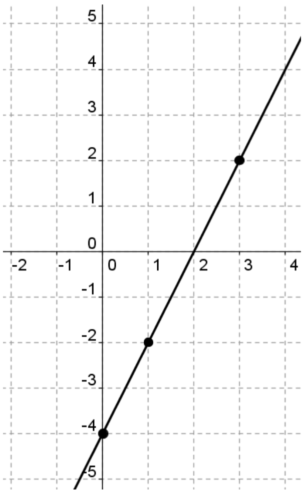
Se llama **función afín o polinómica de primer grado** a la que tiene por expresión analítica $y = mx + n$, donde $m, n \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$.

La gráfica de toda función afín es una **línea recta que pasa por el punto (0, n)** y cuya inclinación viene determinada por el número **m**, llamado **pendiente**. El número **n** se llama **ordenada en el origen** e indica el punto de corte de la recta con el eje Y.

Para averiguar la pendiente **m** de una función afín, hay que elegir dos puntos P(a, b) y Q(c, d) cualesquiera de la recta y calcular $m = \dfrac{d-b}{c-a}$

Para averiguar la ordenada en el origen **n**, basta con obtener el punto de corte de la recta con el eje Y.

Ejemplo 1:




Esta gráfica corresponde a una función afín ya que es una línea recta que no pasa por el punto (0, 0).

Como es creciente, su pendiente tiene signo positivo.

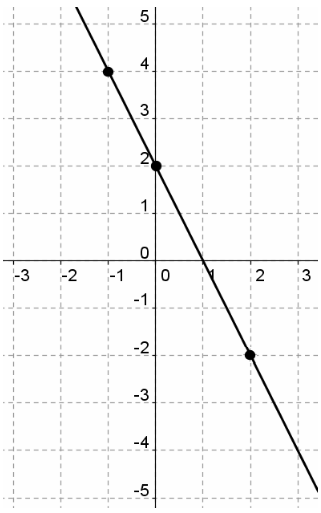
Para averiguar la pendiente m se pueden elegir los puntos P(1, –2) y Q(3, 2)

Se calcula $m = \dfrac{2-(-2)}{3-1} = \dfrac{4}{2} = 2 \quad \Rightarrow \quad m = 2$

Como pasa por el punto (0, –4), su ordenada en el origen es –4

Por lo tanto, su expresión analítica es **y = 2x–4**

Ejemplo 2:




Esta gráfica corresponde a una función afín ya que es una línea recta que no pasa por el punto (0, 0).

Como es decreciente, su pendiente tiene signo negativo.

Para averiguar la pendiente m se pueden elegir los puntos P(–1, 4) y Q(2, –2)

Se calcula $m = \dfrac{-2-4}{2-(-1)} = \dfrac{-6}{3} = -2 \quad \Rightarrow \quad m = -2$

Como pasa por el punto (0, 2), su ordenada en el origen es 2

Por lo tanto, su expresión analítica es **y = –2x+2**

Nota: dos rectas paralelas tienen la misma pendiente.

## 2. Función lineal.

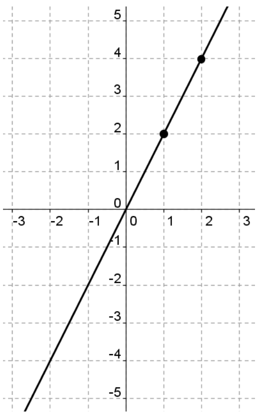
Se llama **función lineal o de proporcionalidad directa** a la que tiene por expresión analítica $y = mx$ donde $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$, es decir, aquella en la que las variables **x** e **y** son directamente proporcionales.

La gráfica de toda función lineal es una **línea recta que pasa por (0, 0)** y cuya inclinación viene determinada por el número **m**, llamado **pendiente**.

La pendiente **m** indica el número de unidades que sube o baja la variable **y** por cada unidad que la variable **x** se desplaza a la derecha:
– si $m > 0$ entonces la gráfica es una recta creciente
– si $m < 0$ entonces la gráfica es una recta decreciente

Para averiguar la pendiente **m** de una función lineal, basta elegir un punto (a, b) cualquiera de la recta (que no sea el punto (0, 0)) y calcular $m = \frac{b}{a}$

Ejemplo 1:




Esta gráfica corresponde a una función lineal ya que es una línea recta que pasa por el punto (0, 0)

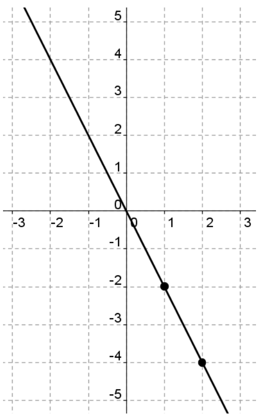
Como es una recta creciente, su pendiente tiene signo positivo.

Para averiguar la pendiente m se puede elegir el punto (2, 4).

Se calcula $m = \frac{4}{2} = 2$

Por lo tanto, su expresión analítica es $\mathbf{y = 2x}$

Ejemplo 2:




Esta gráfica corresponde a una función lineal ya que es una línea recta que pasa por el punto (0, 0)

Como es una recta decreciente, su pendiente tiene signo negativo.

Para averiguar la pendiente m se puede elegir el punto (2, –4).

Se calcula $m = \frac{-4}{2} = -2$

Por lo tanto, su expresión analítica es $\mathbf{y = -2x}$

Nota: obsérvese que la función lineal es un caso particular de la función afín en la que $n = 0$.

### 3. Rectas horizontales y rectas verticales.

Una expresión de la forma **y = k**, donde $k \in \mathbb{R}$, representa el conjunto de todos los puntos cuya segunda coordenada es igual al número k.
Graficamente es una **recta horizontal** que pasa por el punto **(0, k)**.

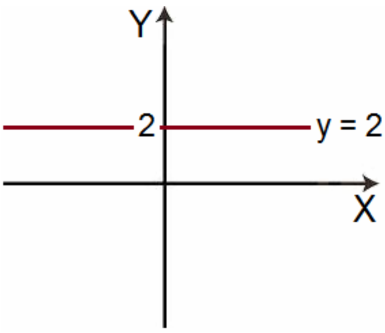
Ejemplo: la recta horizontal $y = 2$ pasa por todos los puntos cuya segunda coordenada es 2.

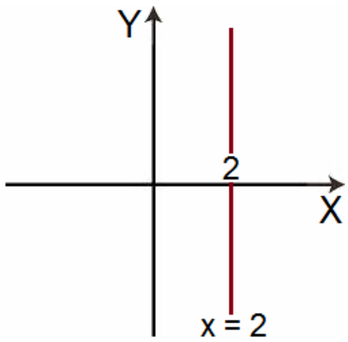
<u>Nota</u>: obsérvese que una recta horizontal es un caso particular de la función lineal en la que la pendiente es $m = 0$.

Una expresión de la forma **x = k**, donde $k \in \mathbb{R}$, representa el conjunto de todos los puntos cuya primera coordenada es igual al número k.
Graficamente es una **recta vertical** que pasa por el punto **(k, 0)**.

Por ejemplo, la recta vertical $x = 2$ pasa por todos los puntos cuya primera coordenada es 2.

A diferencia de las rectas horizontales, **las rectas verticales no son funciones** ya que al mismo valor de **x** corresponden infinitos valores de **y**.




**Los ejes de coordenadas también son rectas del plano**

En particular, los ejes de coordenadas, como rectas horizontal y vertical del plano que son, también tienen sus respectivas ecuaciones:

El eje de abscisas (eje X) es la recta horizontal $y = 0$

El eje de ordenadas (eje Y) es la recta vertical $x = 0$

### 4. Ecuaciones de una recta.

**Ecuación punto – pendiente de una recta**

Dada una recta o función afín de pendiente **m** y que pasa por un punto **(a, b)**, se llama **ecuación punto – pendiente** a la expresión $y - b = m \cdot (x - a)$

Con la ecuación punto – pendiente se puede hallar la expresión analítica de la función.

<u>Ejemplo 1</u>: si una recta o función afín pasa por el punto P(3, 7) y es paralela a otra recta de pendiente 5, entonces su ecuación punto - pendiente es: $y - 7 = 5 \cdot (x - 3)$

$$y - 7 = 5 \cdot (x - 3) \quad \Rightarrow \quad y - 7 = 5x - 15 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 15 + 7 \quad \Rightarrow \quad y = 5x - 8$$

Por lo tanto, su expresión analítica es $y = 5x - 8$

Ejemplo 2: si una recta o función afín pasa por los puntos P(3, –6) y Q(7, 2), se averigua primero su pendiente $m=\frac{2-(-6)}{7-3}=\frac{8}{4}=2 \quad \Rightarrow \quad m=2$

Su ecuación punto – pendiente es: $y-(-6)=2\cdot(x-3)$

$$y-(-6)=2\cdot(x-3) \quad \Rightarrow \quad y+6=2x-6 \quad \Rightarrow \quad y=2x-6-6 \quad \Rightarrow \quad y=2x-12$$

Por lo tanto, su expresión analítica es $y = 2x - 12$

**Ecuación general o implícita de una recta**

Si en la expresión analítica de una recta o función afín $y = mx + n$, se pasan todos los términos a un lado del signo igual, se llega a una expresión del tipo

$$\mathbf{A\,x + B\,y + C = 0}, \text{ donde } A, B, C \in \mathbb{R}$$

A esta expresión se le llama **ecuación general o implícita** de la recta.

Ejemplo 1: para obtener la ecuación general de la recta $y = 5x - 8$, se hace

$$y=5x-8 \quad \Rightarrow \quad 0=5x-8-y \quad \Rightarrow \quad 5x-y-8=0$$

Ejemplo 2: para obtener la expresión analítica de la recta $3x - 2y + 5 = 0$, se hace

$$3x-2y+5=0 \quad \Rightarrow \quad 3x+5=2y \quad \Rightarrow \quad 2y=3x+5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3x+5}{2} \quad \Rightarrow \quad y=\frac{3}{2}x+\frac{5}{2}$$

## 5. Función cuadrática o polinómica de segundo grado.

Se llama **función cuadrática o polinómica de segundo grado** a la que tiene por expresión analítica $y=ax^2+bx+c$, donde a, b, c ∈ ℝ, a ≠ 0. Salvo restricción impuesta en el enunciado o consecuencia del contexto, **el dominio de una función polinómica es todo** ℝ.

La **gráfica** de toda función cuadrática es una curva llamada **parábola.** Ésta siempre tiene un extremo relativo (y absoluto) llamado **vértice**, cuya abscisa es $x_v=\frac{-b}{2a}$.

Si **a > 0**, la parábola tiene sus ramas **hacia arriba** y el **vértice** es el **mínimo absoluto**.

Si **a < 0**, la parábola tiene sus ramas **hacia abajo** y el **vértice** es el **máximo absoluto**.

La parábola tiene un **eje de simetría**, que es la recta vertical que pasa por el vértice, es decir, la recta de ecuación $x=\frac{-b}{2a}$.

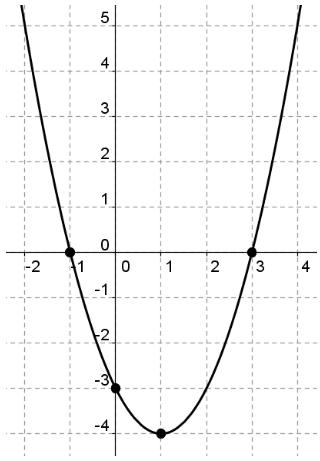
Una parábola **puede cortar al eje X** en **dos puntos** diferentes, tocarlo **en un solo punto** o no tocarlo en **ninguno**. Para averiguarlo, se resuelve la ecuación $ax^2+bx+c=0$

1) Si tiene dos soluciones $x_1$, $x_2$ entonces hay **dos puntos de corte** que son $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$
2) Si tiene una única solución $x_1$, entonces hay **un punto de tangencia** que es $(x_1, 0)$
3) Si no tiene solución, entonces **no hay contacto alguno**.

Una parábola **corta al eje Y** en un único punto, que es **(0, c)**

Además de todo lo dicho, para representar graficamente una parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos por los que pasa, a derecha e izquierda del vértice.

<u>Ejemplo 1</u>: para representar graficamente la función $y = x^2 - 2x - 3$, se hace lo siguiente:




Los coeficientes son: a = 1, b = –2, c = –3

Como a = 1 > 0, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-(-2)}{2\cdot 1} = \dfrac{2}{2} = 1$

La ordenada del vértice es $y_v = 1^2 - 2\cdot 1 - 3 = 1 - 2 - 3 = -4$

Así pues, el vértice es el punto (1, –4) y la recta x = 1 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, –3)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 2x - 3 = 0$

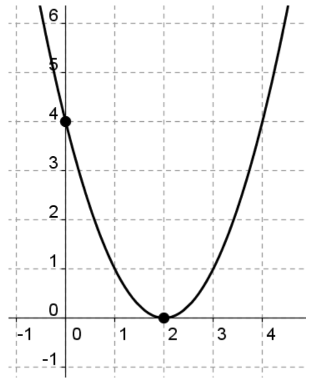
$$x = \frac{+2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}}{2\cdot 1} = \frac{+2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{+2 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{+2 \pm 4}{2} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son los puntos (3, 0) y (–1, 0)

<u>Ejemplo 2</u>: para representar graficamente la función $y = x^2 - 4x + 4$, se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: a = 1, b = –4, c = 4

Como a = 1 > 0, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.




La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-(-4)}{2\cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = 2^2 - 4\cdot 2 + 4 = 4 - 8 + 4 = 0$

Así pues, el vértice es el punto (2, 0) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 4)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 4 = 0$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot 4}}{2\cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{+4 \pm 0}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Por lo tanto, el punto de tangencia con el eje X es el punto (2, 0)

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si x = 1 $\Rightarrow y = 1^2 - 4\cdot 1 + 4 = 1 - 4 + 4 = 1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, 1)

Si x = 3 $\Rightarrow y = 3^2 - 4\cdot 3 + 4 = 9 - 12 + 4 = 1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, 1)

Si x = 4 $\Rightarrow y = 4^2 - 4\cdot 4 + 4 = 16 - 16 + 4 = 4 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, 4)

Ejemplo 3: para representar graficamente la función $y = x^2 - 4x + 5$, se hace lo siguiente:

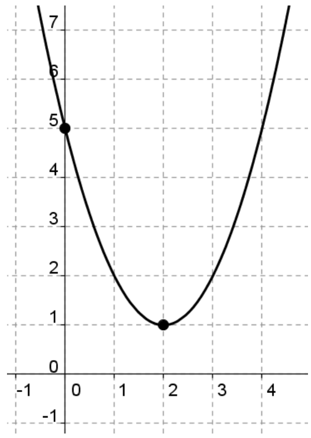
Los coeficientes son: $a = 1$, $b = -4$, $c = 5$

Como $a = 1 > 0$, la parábola tiene sus ramas hacia arriba y el vértice es el mínimo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-(-4)}{2 \cdot 1} = \dfrac{4}{2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = 2^2 - 4 \cdot 2 + 5 = 4 - 8 + 5 = 1$

Así pues, el vértice es el punto (2, 1) y la recta x = 2 es el eje de simetría.




El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 5)

Se resuelve la ecuación $x^2 - 4x + 5 = 0$

$$x = \frac{+4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1} = \frac{+4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{+4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$

Por lo tanto, no hay contacto entre la parábola y el eje X

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si x = 1 $\Rightarrow y = 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 1 - 4 + 5 = 2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, 2)

Si x = 3 $\Rightarrow y = 3^2 - 4 \cdot 3 + 5 = 9 - 12 + 5 = 2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, 2)

Si x = 4 $\Rightarrow y = 4^2 - 4 \cdot 4 + 5 = 16 - 16 + 5 = 5 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, 5)

Ejemplo 4: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 2x + 3$, se hace lo siguiente:

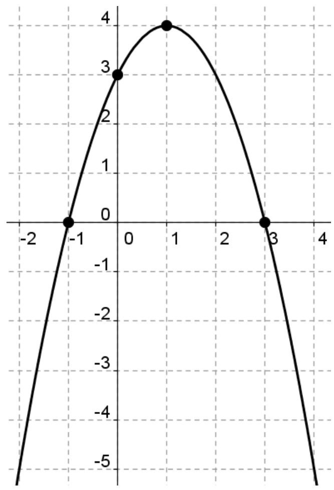
Los coeficientes son: $a = -1$, $b = 2$, $c = 3$

Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-2}{2 \cdot (-1)} = \dfrac{-2}{-2} = 1$

La ordenada del vértice es $y_v = -1^2 + 2 \cdot 1 + 3 = -1 + 2 + 3 = 4$

Así pues, el vértice es el punto (1, 4) y la recta x = 1 es el eje de simetría.




El punto de corte con el eje Y es el punto (0, 3)

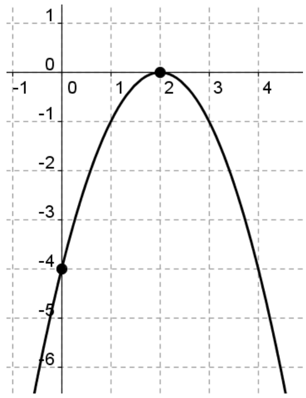
Se resuelve la ecuación $-x^2 + 2x + 3 = 0$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 3}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 12}}{-2} = \frac{-2 \pm \sqrt{16}}{-2} = \frac{-2 \pm 4}{-2} = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Por lo tanto, los puntos de corte con el eje X son los puntos (3, 0) y (–1, 0)

Ejemplo 5: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 4x - 4$ , se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: $a = -1$, $b = 4$, $c = -4$



Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.

La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = -2^2 + 4\cdot 2 - 4 = -4 + 8 - 4 = 0$

Así pues, el vértice es el punto (2, 0) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, –4)

Se resuelve la ecuación $-x^2 + 4x - 4 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-4)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{-2} = \frac{-4 \pm 0}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

Por lo tanto, el punto de tangencia con el eje X es el punto (2, 0)

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1^2 + 4\cdot 1 - 4 = -1 + 4 - 4 = -1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, –1)

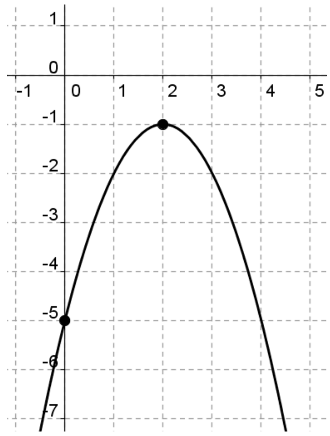
Si $x = 3 \Rightarrow y = -3^2 + 4\cdot 3 - 4 = -9 + 12 - 4 = -1 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, –1)

Si $x = 4 \Rightarrow y = -4^2 + 4\cdot 4 - 4 = -16 + 16 - 4 = -4 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, –4)

Ejemplo 6: para representar graficamente la función $y = -x^2 + 4x - 5$ , se hace lo siguiente:

Los coeficientes son: $a = -1$, $b = 4$, $c = -5$

Como $a = -1 < 0$, la parábola tiene sus ramas hacia abajo y el vértice es el máximo absoluto.



La abscisa del vértice es $x_v = \dfrac{-4}{2\cdot(-1)} = \dfrac{-4}{-2} = 2$

La ordenada del vértice es $y_v = -2^2 + 4\cdot 2 - 5 = -4 + 8 - 5 = -1$

Así pues, el vértice es el punto (2, –1) y la recta x = 2 es el eje de simetría.

El punto de corte con el eje Y es el punto (0, –5)

Se resuelve la ecuación $-x^2 + 4x - 5 = 0$

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(-1)\cdot(-5)}}{2\cdot(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-20}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{-2}$$

Por lo tanto, no hay contacto entre la parábola y el eje X

Para terminar de representar la parábola con mayor precisión, se pueden calcular algunos puntos a derecha e izquierda del vértice:

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1^2 + 4\cdot 1 - 5 = -1 + 4 - 5 = -2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (1, –2)

Si $x = 3 \Rightarrow y = -3^2 + 4\cdot 3 - 5 = -9 + 12 - 5 = -2 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (3, –2)

Si $x = 4 \Rightarrow y = -4^2 + 4\cdot 4 - 5 = -16 + 16 - 5 = -5 \Rightarrow$ La parábola pasa por el punto (4, –5)