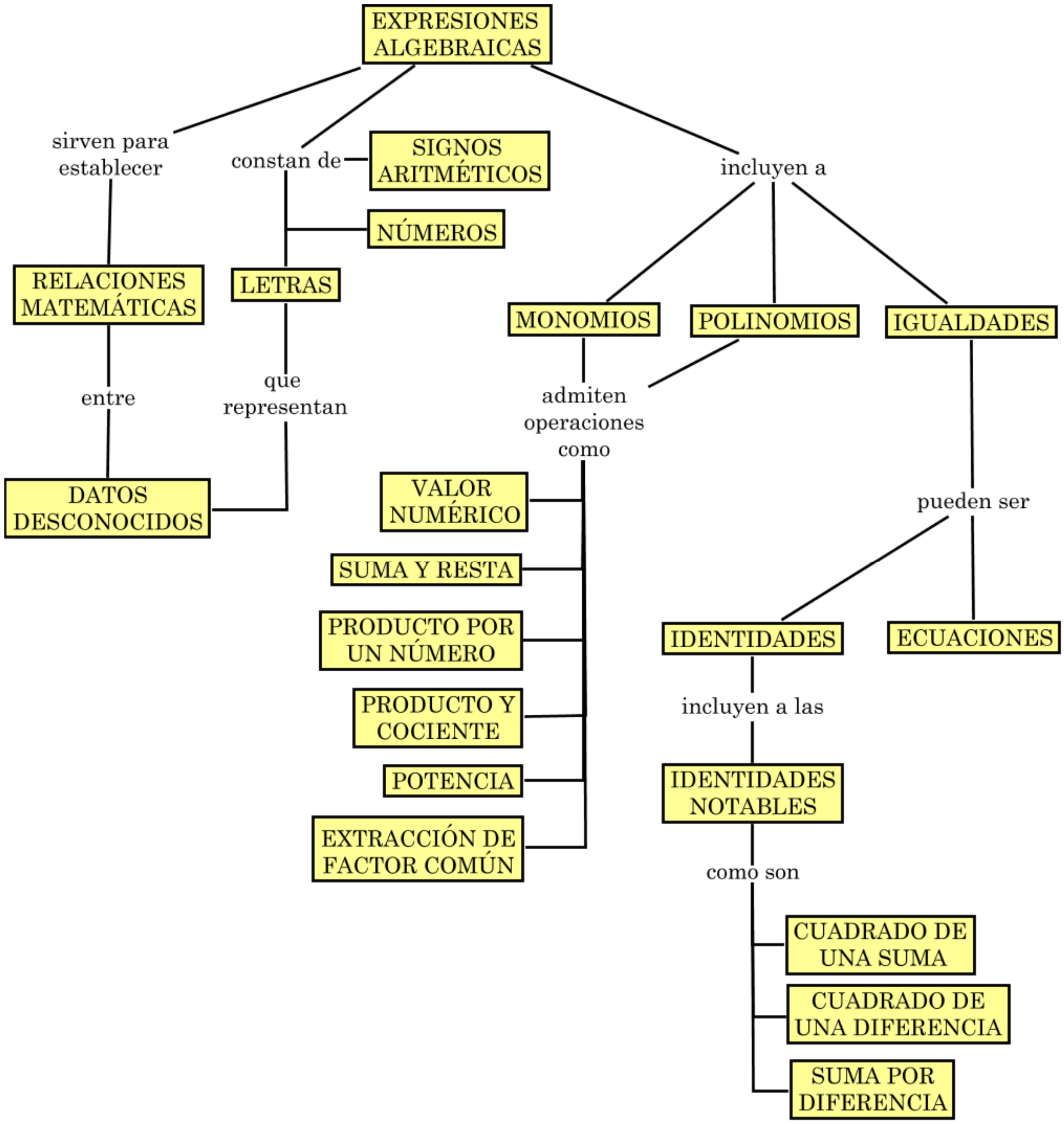
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS DE 2ºESO.

UNIDAD 4. LENGUAJE ALGEBRAICO.

IES LA BAHIA

MAPA CONCEPTUAL DE LA UNIDAD



1. Expresiones algebraicas.

Una **expresión algebraica** es una combinación de números, letras y paréntesis ligados entre sí por los signos de las operaciones: suma, resta, producto, división, potencia, raíz,…

Si entre una letra y un número o bien entre dos letras no aparece ningún signo, se entiende que entre ellas hay un signo de multiplicar.

Por ejemplo, $2 \cdot x$ se suele escribir $2x$ $a \cdot b$ se suele escribir ab

Ejemplos de expresiones algebraicas son:

$2x$ $a-7$ $\pi \cdot r^2$ $4z-5$ m^2+3m-2 $\frac{2n-3}{n-1}$

Las expresiones algebraicas surgen de **traducir** al lenguaje matemático, frases o enunciados en los que aparecen **datos desconocidos que se representan por letras**.

Ejemplos:

Frase	Expresión algebraica	Frase	Expresión algebraica
El doble de m	$2m$	El triple de m	$3m$
Un número x disminuido en 2	$x-2$	Un número x aumentado en 3	$x+3$
La mitad de n	$\frac{n}{2}$	La tercera parte de n	$\frac{n}{3}$
El cuadrado de x	x^2	El cubo de x	x^3
La suma de a y b	$a+b$	La diferencia entre x e y	$x-y$
El producto de m por n	$m \cdot n$	El cociente entre p y q	$\frac{p}{q}$
El siguiente de x	$x+1$	El anterior de x	$x-1$
El doble de x más el triple de y	$2x+3y$	La mitad de n es igual al triple de z	$\frac{n}{2}=3z$
Tres números consecutivos	$x, x+1, x+2$	La raíz cuadrada de la suma de c y d	$\sqrt{c+d}$
Propiedad conmutativa de la suma	$a+b=b+a$	Propiedad conmutativa del producto	$a \cdot b = b \cdot a$

Nota: si entre una letra y un número, entre dos letras, entre una letra y un paréntesis, o entre un número y un paréntesis no aparece escrito ningún signo, hay que interpretar que hay un signo de multiplicar. Por ejemplo, la expresión $4 \cdot (3 \cdot x + 5)$ se suele escribir así: $4\,(3x+5)$

Valor numérico de una expresión algebraica

En una expresión algebraica, el valor de una letra es variable ya que puede representar a más de un número. Se llama **valor numérico de una expresión algebraica** al resultado de sustituir las letras de la expresión por los números propuestos y realizar las operaciones.

Ejemplo 1: el valor numérico de $3x+2y$ para $x=0, y=-1$ es $3 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 0 - 2 = -2$

Ejemplo 2: el valor numérico de x^3+2xy para $x=-2, y=1$ es $(-2)^3 + 2 \cdot (-2) \cdot 1 = -8-4=-12$

Ejemplo 3: el valor numérico de $\frac{2x-4}{y+1}$ para $x=-2, y=1$ es $\frac{2 \cdot (-2) - 4}{1+1} = \frac{-8}{2} = -4$

2. Monomios. Operaciones con monomios.

Se llama **monomio** al producto indicado de un número por una o más letras elevadas a un exponente natural, es decir, $a \cdot x^m\, y^n\, z^p \cdot \ldots$, donde m, n, p,… son números naturales.

– El número representado por la letra **a** se llama **coeficiente**

– El producto de las letras $x^m\, y^n\, z^p \cdot \ldots$ se llama **parte literal**

– El **grado** del monomio es la suma de todos los exponentes: $m + n + p + \ldots$

Ejemplos:

$2x^5y^3$ es un monomio de grado 8, coeficiente 2, parte literal x^5y^3

x^3y^2 es un monomio de grado 5, coeficiente 1, parte literal x^3y^2

$7x^3y^2z$ es un monomio de grado 6, coeficiente 7, parte literal x^3y^2z

$9xy$ es un monomio de grado 2, coeficiente 9, parte literal xy

$-3x$ es un monomio de grado 1, coeficiente -3, parte literal x

Nota: un número se considera un monomio de grado cero ya que todo número real se puede expresar así: $c = c \cdot 1 = c \cdot x^0$

Monomios semejantes son los que tienen la misma parte literal.

Ejemplo: $7x^3y^2 \quad 4x^3y^2$ son semejantes $\qquad 4x^3yz^2 \quad -2x^3yz^2$ son semejantes

$5x^3 \quad -2x^3$ son semejantes $\qquad 3x^2 \quad -7x^2$ son semejantes

$4x^3 \quad 4x^2$ NO son semejantes $\qquad 7x^5y^2 \quad 7x^5$ NO son semejantes

Operaciones con monomios

a) **Suma y resta**: la suma (resta) de monomios semejantes es igual a otro monomio semejante cuyo coeficiente es la suma (resta) de los coeficientes. Si los monomios no son semejantes, la suma (resta) se deja indicada.

Ejemplo 1: $5x^4 - 8x^2 + 9x - 2x^4 + 2x = (5x^4 - 2x^4) - 8x^2 + (9x + 2x) = 3x^4 - 8x^2 + 11x$

Ejemplo 2: $3x^3 - 4x^2 - 2 - 2x^3 + 8x^2 + 1 = (3x^3 - 2x^3) + (-4x^2 + 8x^2) + (-2 + 1) = x^3 + 4x^2 - 1$

Propiedad distributiva: un número delante de un paréntesis, multiplica a todos y cada uno de los términos que se encuentren dentro del paréntesis, teniendo en cuenta la regla de los signos: $C \cdot (A + B) = C \cdot A + C \cdot B$

Ejemplo 1: $7(x - 1) - 4(x + 3) = 7x - 7 - 4x - 12 = (7x - 4x) + (-7 - 12) = 3x - 19$

Ejemplo 2: $5(x^2 + x) - 3(x^2 - 2x) = 5x^2 + 5x - 3x^2 + 6x = (5x^2 - 3x^2) + (5x + 6x) = 2x^2 + 11x$

Ejemplo 3: $4(x + 1) - (x^2 - 1) - (1 + x) - 3(x^2 - 1) = 4x + 4 - x^2 + 1 - 1 - x - 3x^2 + 3 = -4x^2 + 3x + 7$

Ejemplo 4: $x^3 - (x - x^2) + 5(2x - 1) - (1 - 4x^2) = x^3 - x + x^2 + 10x - 5 - 1 + 4x^2 = x^3 + 5x^2 + 9x - 6$

b) **Producto**: el producto de monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el producto de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene multiplicando las potencias de la misma base.

Ejemplo 1: $3x^5 \cdot 2x^4 = (3 \cdot 2) \cdot x^{5+4} = 6x^9$

Ejemplo 2: $-2x^2y \cdot 5xy^2 = (-2 \cdot 5) \cdot x^2y \cdot xy^2 = (-10) \cdot x^{2+1}y^{1+2} = -10x^3y^3$

Ejemplo 3: $(-3x) \cdot (-2x) \cdot 5x = ((-3) \cdot (-2) \cdot 5) \cdot x \cdot x \cdot x = 30x^3$

Ejemplo 4: $3x^4y \cdot 2xy \cdot x^2y^3 = (3 \cdot 2 \cdot 1) \cdot x^4y \cdot xy \cdot x^2y^3 = 6 \cdot x^{4+1+2} \cdot y^{1+1+3} = 6x^7y^5$

c) **Cociente**: el cociente de monomios es igual a otro monomio cuyo coeficiente es el cociente de los coeficientes y cuya parte literal se obtiene dividiendo las potencias de la misma base.

Ejemplo 1: $8x^5y^4 : 2x^2y^3 = \dfrac{8x^5y^4}{2x^2y^3} = \dfrac{8}{2} \cdot x^{5-2} \cdot y^{4-3} = 4x^3y$

Ejemplo 2: $21x^2y^3 : 3y = \dfrac{21x^2y^3}{3y} = \dfrac{21}{3} \cdot x^2 \cdot y^{3-1} = 7x^2y^2$

Ejemplo 3: $10x^2y^2 : 5x^2y^2 = \dfrac{10x^2y^2}{5x^2y^2} = \dfrac{10}{5} \cdot x^{2-2} \cdot y^{2-2} = 2 \cdot x^0 \cdot y^0 = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2$

d) **Potencia**: la potencia de un monomio es igual a otro monomio resultado de elevar cada elemento del monomio al exponente de la potencia.

Ejemplo 1: $(2x^3y^2)^4 = (2^4) \cdot x^{3 \cdot 4} \cdot y^{2 \cdot 4} = 16x^{12}y^8$

Ejemplo 2: $(-3x^3y)^2 = (-3)^2 \cdot x^{3 \cdot 2} \cdot y^{1 \cdot 2} = 9x^6y^2$

Ejemplo 3: $(x^5y^4z^3)^2 = x^{5 \cdot 2} \cdot y^{4 \cdot 2} \cdot z^{3 \cdot 2} = x^{10}y^8z^6$

3. Polinomios.

Entre las expresiones algebraicas, se encuentra un relevante caso particular llamado polinomio. Se llama **polinomio a la suma o resta indicada de dos o más monomios**.

Si el polinomio consta de una sola letra x, se suele representar por P(x), Q(x), ...

Términos de un polinomio son todos y cada uno de los monomios que lo forman.
Si consta de **dos** términos, se suele llamar **binomio**. Por ejemplo, 4x+3 5x+2y x–8y
Si consta de **tres** términos, se suele llamar **trinomio**. Por ejemplo, 3x–y+1 x+7y–z

Ejemplos: $P(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $P(x,y) = 3x^2 - y^2 + 2y$, $Q(x,y) = 5xy - 3x^2$ son polinomios

Los **coeficientes** del polinomio son los coeficientes de los monomios que lo forman.

Se llama **término independiente** (TI) del polinomio al monomio que no tiene parte literal, es decir, al monomio de grado cero, que es un número.

Si en un polinomio existen monomios semejantes, hay que operar con ellos dejando un solo monomio de cada tipo, quedando el polinomio expresado en su forma reducida. En la forma reducida, el **grado** de un polinomio es el grado del monomio de mayor grado.

Ejemplo 1: $x^3 - x^2 - 3x - 1$ es un polinomio de grado 3, coeficientes 1, –1, –3, –1 y TI = –1

Ejemplo 2: $5x^4 + x^3 - x$ es un polinomio de grado 4, coeficientes 5, 1, 0, –1, 0 y no tiene TI

Ejemplo 3: $3x - 5$ es un polinomio de grado 1, coeficientes 3, –5 y TI = –5

Dado $\mathbf{c} \in \mathbb{R}$, se llama **valor numérico del polinomio P(x) en x = c** al número real que resulta de sustituir la letra **x** por **c** y realizar las operaciones. Se representa por P(c).

Ejemplo: el valor numérico de $P(x) = x^2 + 4x - 1$ en $x = -2$ es $P(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 1 = -5$

4. Operaciones con polinomios.

a) **Suma de polinomios**: se suman los monomios semejantes.

Ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$ y $Q(x) = x^4 + 2x^3 - 5x + 2$, entonces

$$P(x) + Q(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1 + x^4 + 2x^3 - 5x + 2 = x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x + 3$$

b) **Resta de polinomios**: se suma al minuendo el opuesto del sustraendo:

$$P(x) - Q(x) = P(x) + (-Q(x))$$

Ejemplo: si $P(x) = x^4 - 3x^2 + 7x + 1$ y $Q(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 2$, entonces

$$P(x) - Q(x) = x^4 - 3x^2 + 7x + 1 - (x^3 + 2x^2 - 5x + 2) =$$
$$x^4 - 3x^2 + 7x + 1 - x^3 - 2x^2 + 5x - 2 = x^4 - x^3 - 5x^2 + 12x - 1$$

c) **Producto de un polinomio por un número**: se multiplican todos y cada uno de los coeficientes del polinomio por el número.

Producto de un polinomio por un monomio: se multiplican todos y cada uno de los términos del polinomio por el monomio.

Ejemplo: si $P(x) = x^3 - 3x^2 + 7x + 1$, entonces $5 \cdot P(x) = 5x^3 - 15x^2 + 35x + 5$

Ejemplo: si $P(x) = 5x^3 + 7x + 1$, entonces

$$3x^2 \cdot P(x) = 3x^2 \cdot 5x^3 + 3x^2 \cdot 7x + 3x^2 \cdot 1 = 15x^5 + 21x^3 + 3x^2$$

d) **Producto de polinomios**: se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos y cada uno de los monomios del segundo polinomio y después se suman los monomios semejantes obtenidos. Obsérvese que grado (P(x) · Q(x)) = grado (P(x)) + grado (Q(x))

Ejemplo: si $P(x) = x^3 - 6x^2 + 2x + 4$ y $Q(x) = 5x^2 + 3x - 2$, entonces

		x^3	$-6x^2$	$+2x$	$+4$
			$5x^2$	$+3x$	-2
		$-2x^3$	$+12x^2$	$-4x$	-8
	$+3x^4$	$-18x^3$	$+6x^2$	$+12x$	
$+5x^5$	$-30x^4$	$+10x^3$	$+20x^2$		
$5x^5$	$-27x^4$	$-10x^3$	$+38x^2$	$+8x$	-8

e) **Extracción de factor común**: consiste en escribir una expresión algebraica como producto de un número o monomio por otra expresión, aplicando la propiedad distributiva del producto respecto de la suma: CA + CB = C (A+B)

El factor común, si existe, es un monomio de coeficiente el m.c.d. de los coeficientes y de parte literal, las letras comunes elevadas al menor exponente.

<u>Ejemplo 1</u>: $5x-5y=5\cdot(x-y)$ <u>Ejemplo 2</u>: $8x^2-6x=2x\cdot(4x-3)$

<u>Ejemplo 3</u>: $3x^4-6x^3+9x^2=3x^2\cdot(x^2-2x+3)$ <u>Ejemplo 4</u>: $5x^2y+10xy^2=5xy\cdot(x+2y)$

<u>Ejemplo 5</u>: $3x^4y^2-2x^3y^3=x^3y^2\cdot(3x-2y)$ <u>Ejemplo 6</u>: $6x^2y-8xy^2=2xy\cdot(3x-4y)$

5. Identidades notables.

Una **identidad** es una igualdad algebraica que es cierta para valores cualesquiera de las letras que en ella intervienen. El cuadrado de una suma, el cuadrado de una diferencia y suma por diferencia son casos particulares de identidades, y se les llama **identidades notables**.

a) Cuadrado de una suma: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$$\begin{array}{r} A+B \\ A+B \\ \hline AB+B^2 \\ A^2+AB \\ \hline A^2+2AB+B^2 \end{array}$$

<u>Ejemplo 1</u>: $(5x+3)^2=(5x)^2+2\cdot5x\cdot3+3^2=25x^2+30x+9$

<u>Ejemplo 2</u>: $\left(\frac{x}{3}+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{x}{3}\right)^2+2\cdot\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{x^2}{9}+\frac{x}{3}+\frac{1}{4}$

<u>Ejemplo 3</u>: $(x^3+5xy)^2=(x^3)^2+2\cdot x^3\cdot5xy+(5xy)^2=x^6+10x^4y+25x^2y^2$

<u>Ejemplo 4</u>: $(x^2y+3x)^2=(x^2y)^2+2\cdot x^2y\cdot3x+(3x)^2=x^4y^2+6x^3y+9x^2$

b) Cuadrado de una diferencia: $(A-B)^2=A^2-2AB+B^2$

$$\begin{array}{r} A-B \\ A-B \\ \hline -AB+B^2 \\ A^2-AB \\ \hline A^2-2AB+B^2 \end{array}$$

<u>Ejemplo 1</u>: $(2x-5)^2=(2x)^2-2\cdot2x\cdot5+5^2=4x^2-20x+25$

<u>Ejemplo 2</u>: $\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{3}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\right)^2-2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{x^2}{4}-\frac{x}{3}+\frac{1}{9}$

<u>Ejemplo 3</u>: $(x^3-7xy)^2=(x^3)^2-2\cdot x^3\cdot7xy+(7xy)^2=x^6-14x^4y+49x^2y^2$

<u>Ejemplo 4</u>: $(x^2-4y)^2=(x^2)^2-2\cdot x^2\cdot4y+(4y)^2=x^4-8x^2y+16y^2$

c) Suma por diferencia: $(A+B)\cdot(A-B)=A^2-B^2$

$$\begin{array}{r} A+B \\ A-B \\ \hline -\cancel{AB}-B^2 \\ A^2+\cancel{AB} \\ \hline A^2\qquad-B^2 \end{array}$$

<u>Ejemplo 1</u>: $(3x+4)\cdot(3x-4)=(3x)^2-4^2=9x^2-16$

<u>Ejemplo 2</u>: $\left(\frac{x}{5}+\frac{1}{7}\right)\cdot\left(\frac{x}{5}-\frac{1}{7}\right)=\left(\frac{x}{5}\right)^2-\left(\frac{1}{7}\right)^2=\frac{x^2}{25}-\frac{1}{49}$

<u>Ejemplo 3</u>: $(x^3+2xy)\cdot(x^3-2xy)=(x^3)^2-(2xy)^2=x^6-4x^2y^2$

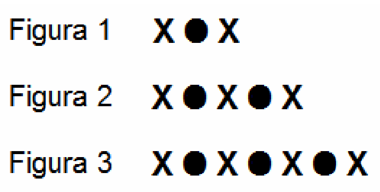
<u>Ejemplo 4</u>: $(xy^2+5)\cdot(xy^2-5)=(xy^2)^2-5^2=x^2y^4-25$

6. Pautas y regularidades.

Una **secuencia** es una lista o serie ordenada de números o figuras en la que cada elemento se puede conocer siguiendo una pauta o ley de formación. Esta ley es una **expresión algebraica** que permite averiguar cualquier elemento de la secuencia, cualquiera que sea la posición que ocupe en ella.

Para comprender mejor este concepto, se pueden utilizar **secuencias geométricas**, listas ordenadas de figuras que siguen un mismo patrón.

Ejemplo 1: si se observan las siguientes figuras, se puede deducir el patrón que siguen, dibujar las figuras cuatro y cinco, respectivamente, y completar la tabla escribiendo finalmente el término general para el número de puntos y equis de la figura **n**



	Puntos	Equis
Figura 1	1	2
Figura 2	2	3
Figura 3	3	4
Figura 4	*4*	*5*
Figura 5	*5*	*6*
……	……	……
Figura n	*n*	*n+1*

Ejemplo 2: si se observan las siguientes figuras, se puede deducir el patrón que siguen, dibujar la figura cuatro y completar la tabla, escribiendo finalmente el término general para el número de puntos y de segmentos en la figura **n**

	Fig. 1	Fig. 2	Fig. 3	Fig. 4	…	Fig. n
Puntos	1	3	*5*	*7*	…	*2n-1*
Segmentos	4	8	*12*	*16*	…	*4n*

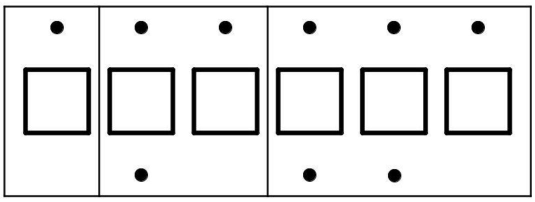


Figura 1 **Figura 2** **Figura 3**