



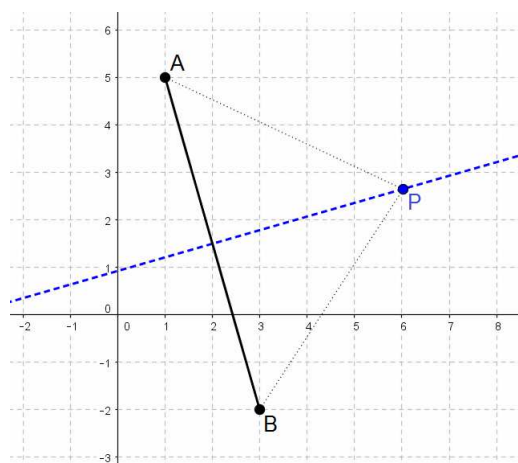
1. Lugares geométricos.

Se llama **lugar geométrico** al conjunto de puntos del plano que cumplen una determinada propiedad. En un sistema de coordenadas cartesianas, se puede averiguar la expresión analítica o ecuación de un lugar geométrico. Para ello, basta considerar un punto (x, y) genérico y expresar algebraicamente la propiedad que lo define.

Ejemplo 1: la **mediatriz** de un segmento \overline{AB} es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de los extremos A y B.

Si los extremos del segmento son los puntos $A(1, 5)$ y $B(3, -2)$, entonces un punto $P(x, y)$ de la mediatriz del segmento \overline{AB} cumple lo siguiente: $d(P, A) = d(P, B)$

$$\begin{aligned} \sqrt{(x-1)^2 + (y-5)^2} &= \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow \\ \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 25 - 10y &= x^2 + 9 - 6x + y^2 + 4 + 4y \\ \Rightarrow 1 - 2x + 25 - 10y - 9 + 6x - 4 - 4y &= 0 \\ \Rightarrow 4x - 14y + 13 &= 0 \end{aligned}$$

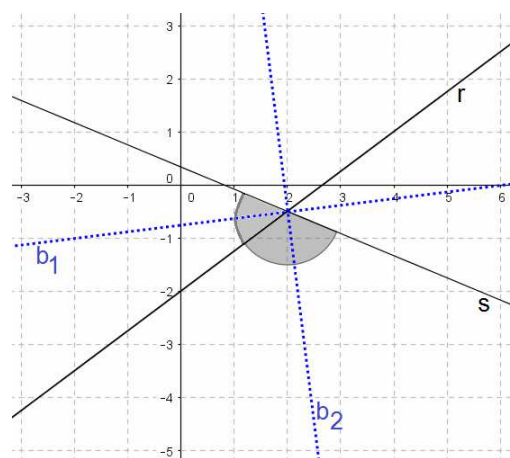


La mediatriz del segmento \overline{AB} tiene por ecuación general $r \equiv 4x - 14y + 13 = 0$

Ejemplo 2: la **bisectriz** de un ángulo cuyos lados están determinados por las rectas r y s , es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de ambas.

Si los lados del ángulo se encuentran en las rectas $r \equiv 3x - 4y - 8 = 0$, $s \equiv 5x + 12y - 4 = 0$, entonces un punto $P(x, y)$ de la bisectriz del ángulo cumple lo siguiente: $d(P, r) = d(P, s)$

$$\begin{aligned} \frac{|3 \cdot x - 4 \cdot y - 8|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} &= \frac{|5 \cdot x + 12 \cdot y - 4|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{3x - 4y - 8}{5} &= \pm \frac{5x + 12y - 4}{13} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{39x - 52y - 104}{65} &= \pm \frac{25x + 60y - 20}{65} \\ \Rightarrow \begin{cases} 39x - 52y - 104 = 25x + 60y - 20 \\ 39x - 52y - 104 = -25x - 60y + 20 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x - 8y - 6 = 0 \\ 16x + 2y - 31 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$



– La bisectriz del primer ángulo tiene por ecuación general $b_1 \equiv x - 8y - 6 = 0$

– La bisectriz del segundo ángulo tiene por ecuación general $b_2 \equiv 16x + 2y - 31 = 0$

2. La circunferencia.

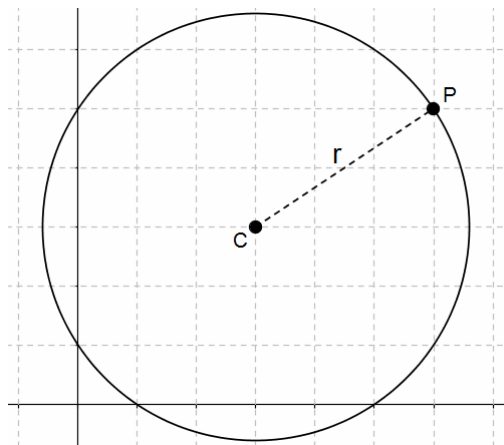
Se llama **circunferencia** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya distancia a un punto fijo C es constante: $d(P, C) = \text{constante} = r$

Al punto fijo se le llama **centro** y a la distancia entre un punto cualquiera de la circunferencia y el centro se le llama **radio**.

La ecuación de una circunferencia de centro $C(a, b)$ y radio r es $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$

La ecuación general de una circunferencia es $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, donde:

$$D = -2a \quad E = -2b \quad F = a^2 + b^2 - r^2$$



Ejemplo 1: la ecuación general de una circunferencia de centro $C(1, 3)$ y radio 5 es

$$x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

Se obtiene desarrollando la ecuación $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2$ e igualando a cero:

$$(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 5^2 \Rightarrow x^2 + 1 - 2x + y^2 + 9 - 6y = 25 \Rightarrow x^2 + y^2 - 2x - 6y - 15 = 0$$

Ejemplo 2: la circunferencia de ecuación general $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 12 = 0$ tiene centro $C(2, 3)$ y radio 5 ya que:

$$D = -2a \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2 \quad E = -2b \Rightarrow -6 = -2b \Rightarrow b = 3$$

$$F = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow -12 = 2^2 + 3^2 - r^2 \Rightarrow -12 = 4 + 9 - r^2 \Rightarrow r^2 = 25 \Rightarrow r = 5$$

Nota: no toda ecuación de la forma $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ representa a una circunferencia, ya que de la relación $F = a^2 + b^2 - r^2$ no siempre se obtiene una solución válida para el radio r .

Ejemplo: la ecuación $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 17 = 0$ no es la ecuación de una circunferencia:

$$D = -2a \Rightarrow 4 = -2a \Rightarrow a = -2 \quad E = -2b \Rightarrow -6 = -2b \Rightarrow b = 3$$

$$F = a^2 + b^2 - r^2 \Rightarrow 17 = (-2)^2 + 3^2 - r^2 \Rightarrow 17 = 4 + 9 - r^2 \Rightarrow r^2 = -4 \quad \text{No tiene solución}$$

Posiciones relativas entre una recta y una circunferencia

1. Una recta t es **tangente** a una circunferencia de centro C y radio $r \Leftrightarrow d(C, t) = r$

2. Una recta t **corta** a la circunferencia en dos puntos $\Leftrightarrow d(C, t) < r$

3. Una recta t y una circunferencia **no se tocan** en ningún punto $\Leftrightarrow d(C, t) > r$

Ejemplo: para hallar la ecuación general de una circunferencia de centro $C(4, -1)$ que sea tangente a la recta $t \equiv 2x + y - 2 = 0$, se halla $d(C, t)$. El valor obtenido debe ser el radio.

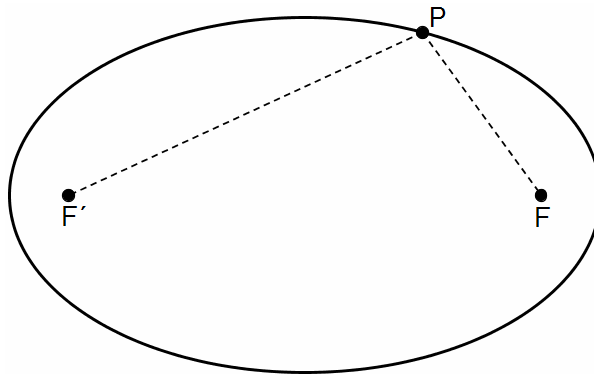
$$d(C, t) = \frac{|2 \cdot 4 + 1 \cdot (-1) - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} \Rightarrow r = \sqrt{5}$$

La circunferencia tiene por ecuación $(x - 4)^2 + (y + 1)^2 = \sqrt{5}^2 \Rightarrow x^2 + y^2 - 8x + 2y + 12 = 0$

3. La elipse.

Se llama **elipse** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya suma de distancias a dos puntos fijos F y F' es constante: $d(P, F) + d(P, F') = \text{constante} = 2a$

A los dos puntos fijos se les llama **focos**.



Elementos de una elipse

Focos: los puntos F y F'

Eje de simetría horizontal: la recta que pasa por los focos F y F'

Eje de simetría vertical: la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$

Centro: el punto de corte C de los ejes de simetría.

Vértices: los puntos de corte A, A', B, B' entre la elipse y los ejes de simetría.

Eje mayor: el segmento $\overline{AA'}$

Eje menor: el segmento $\overline{BB'}$

Distancia focal: la longitud del segmento $\overline{FF'}$

Ejemplo:

Focos: los puntos F(6, 1) y F'(-2, 1)

Ejes de simetría: recta $x = 2$, recta $y = 1$

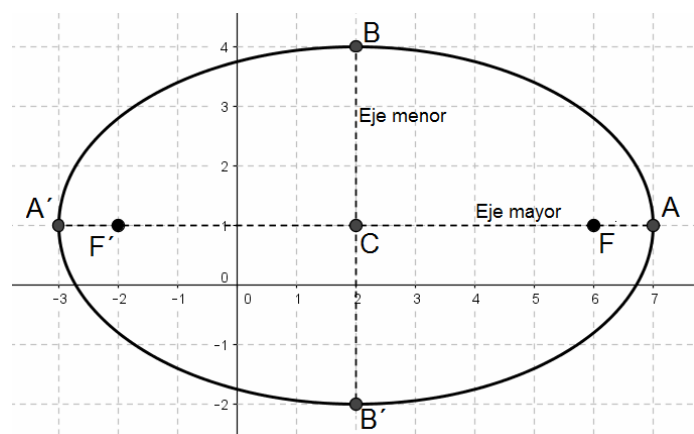
Centro: el punto C(2, 1)

Vértices: A(7, 1) A'(-3, 1) B(2, 4) B'(2, -2)

Eje mayor: segmento $\overline{AA'}$, que mide 10 u

Eje menor: segmento $\overline{BB'}$, que mide 6 u

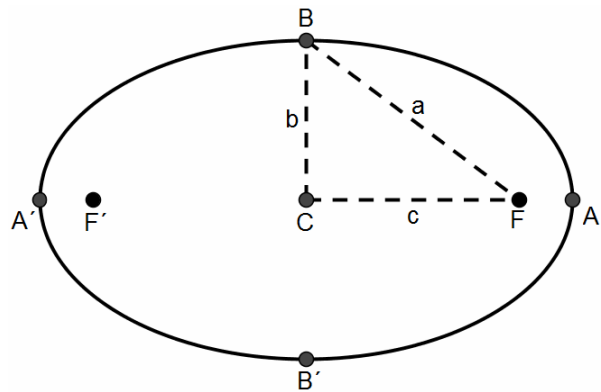
Distancia focal: 8 u



Relaciones métricas

Si se representa por $2a$ la constante suma de distancias a los focos, por $2b$ la longitud del eje menor y por $2c$ la distancia focal, entonces se cumple lo siguiente:

- 1) La longitud del eje mayor $\overline{AA'}$ es $2a$
- 2) $a^2 = b^2 + c^2$



Demostración:

1) El segmento $\overline{AA'}$ se puede escribir como suma $\overline{AA'} = \overline{AF'} + \overline{AF}$

Como $\overline{AF'} = \overline{AF}$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{AF}$

Finalmente, dado que el punto A pertenece a la elipse, entonces $\overline{AA'} = \overline{AF} + \overline{AF'} = 2a$

2) Dado que B es un punto de la elipse, se cumple que $\overline{BF} + \overline{BF'} = 2a$

Como $\overline{BF} = \overline{BF'}$, se deduce que $\overline{BF} = a$

Si $2b$ es la longitud del eje menor, entonces $\overline{BC} = b$

Si $2c$ es la distancia focal, entonces $\overline{CF} = c$

Como los segmentos \overline{BC} , \overline{CF} son los catetos y \overline{BF} la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cumplen el teorema de Pitágoras y por lo tanto $a^2 = b^2 + c^2$

Ecuación reducida de la elipse

Si se sitúan los dos focos de la elipse sobre el eje X, el eje de simetría horizontal sobre el eje X y el eje de simetría vertical sobre el eje Y, entonces:

- El centro tiene coordenadas $C(0, 0)$
- Los focos tienen coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$
- Los vértices del eje mayor tienen coordenadas $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$
- Los vértices del eje menor tienen coordenadas $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$
- El eje mayor mide $2a$, el eje menor mide $2b$ y la distancia focal mide $2c$.
- Todo punto $P(x, y)$ de la elipse cumple la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

A la ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ se le llama **ecuación reducida de la elipse**.

Recuérdese que los valores a , b y c están ligados mediante la relación $a^2 = b^2 + c^2$

Ejemplo:

Focos: los puntos $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$

Ejes de simetría: recta $x = 0$, recta $y = 0$

Centro: el punto $C(0, 0)$

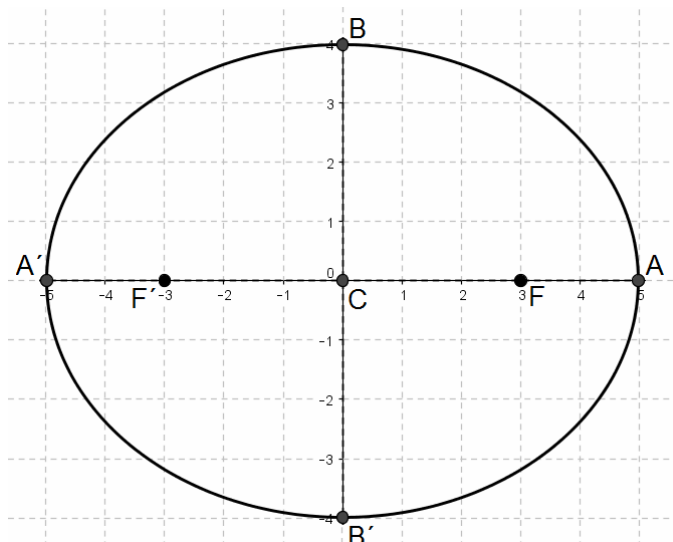
Vértices: $A(5, 0)$ $A'(-5, 0)$ $B(0, 4)$ $B'(0, -4)$

Eje mayor: segmento $\overline{AA'}$, que mide 10 u

Eje menor: segmento $\overline{BB'}$, que mide 8 u

Distancia focal: 6 u

Obsérvese que $a = 5$, $b = 4$, $c = 3$ y que cumplen la relación $a^2 = b^2 + c^2$

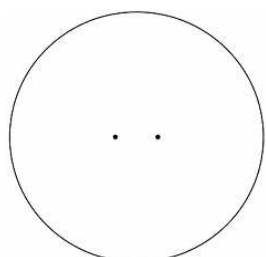


Ecuación reducida de la elipse: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$

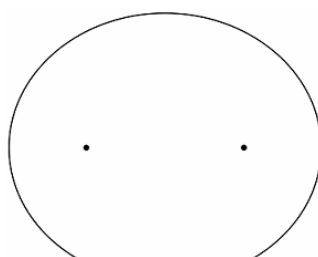
Excentricidad de la elipse

Se llama **excentricidad** de una elipse, al cociente entre la semidistancia focal y el semieje mayor. Se representa por e . Por lo tanto, $e = \frac{c}{a}$

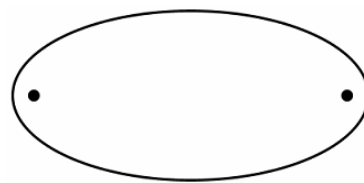
Dado que $c < a$, la excentricidad es siempre un valor comprendido entre 0 y 1: $0 < e < 1$



$e = 0,15$



$e = 0,5$



$e = 0,9$

– Cuanto más se aproxima la excentricidad al valor 0, más redondeada es la elipse. En el caso extremo de que la excentricidad fuese 0, entonces sería $c = 0$, los valores a y b serían iguales y por lo tanto, el lugar geométrico no sería una elipse, sino una circunferencia.

– Cuanto más se aproxima la excentricidad al valor 1, más achatada es la elipse. En el caso extremo de que la excentricidad fuese 1, entonces los valores a y c serían iguales, $b = 0$, y por tanto, el lugar geométrico no sería una elipse, sino un segmento.

Ejemplo: para hallar la ecuación reducida y la excentricidad de una elipse cuya distancia focal es 6 cm y cuyo eje mayor mide 10 cm, se averigua primero la medida del eje menor:

$$2c = 6 \Rightarrow c = 3$$

$$2a = 10 \Rightarrow a = 5$$

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 9 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$$

El eje menor mide 8 cm

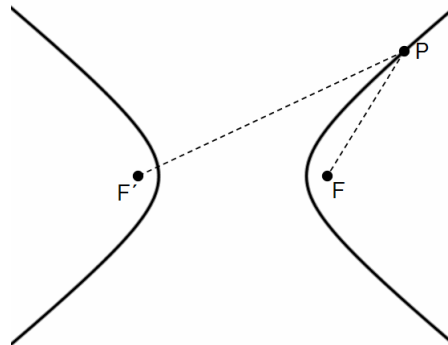
$$\text{Su ecuación reducida es } \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\text{Su excentricidad es } e = \frac{c}{a} = \frac{3}{5} = 0,6$$

4. La hipérbola.

Se llama **hipérbola** al lugar geométrico de los puntos P del plano cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos F y F' es constante: $|d(P, F) - d(P, F')| = \text{constante} = 2a$

A los dos puntos fijos se les llama **focos**.



Elementos de una hipérbola

Focos: los puntos F y F'

Eje de simetría horizontal: la recta que pasa por los focos F y F'

Eje de simetría vertical: la mediatriz del segmento $\overline{FF'}$

Centro: el punto de corte C de los ejes de simetría.

Vértices reales: los puntos de corte A, A' entre la hipérbola y el eje de simetría horizontal.

Vértices imaginarios: los puntos de corte B, B' entre la circunferencia de centro A y radio CF con el eje de simetría vertical.

Eje real: el segmento $\overline{AA'}$ **Eje imaginario:** el segmento $\overline{BB'}$

Distancia focal: la longitud del segmento $\overline{FF'}$

Asíntotas: las rectas que contienen a las diagonales del rectángulo cuyos lados tienen por puntos medios a los vértices A, A', B, B'

Ejemplo:

Focos: los puntos F(7, 2) y F'(-3, 2)

Distancia focal: 10 u

Ejes de simetría: recta x = 2, recta y = 2

Centro: el punto C(2, 2)

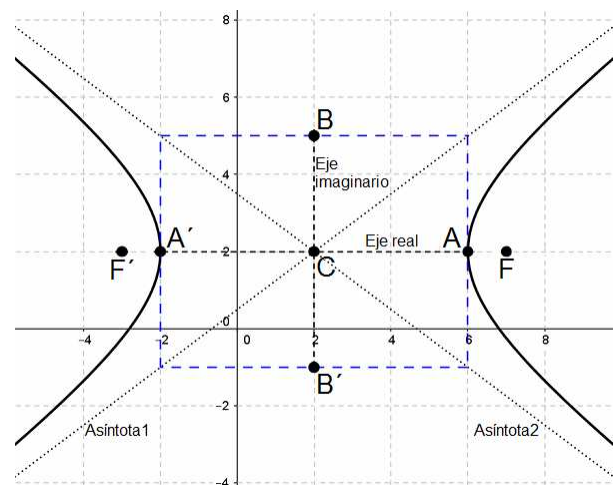
Vértices reales: A(6, 2) A'(-2, 2)

Vértices imaginarios: B(2, 5) B'(2, -1)

Eje real: segmento $\overline{AA'}$, que mide 8 u

Eje imaginario: segmento $\overline{BB'}$, que mide 6 u

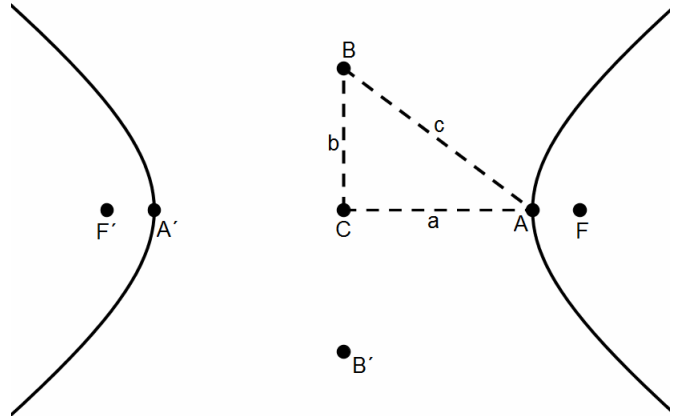
Asíntotas: las rectas $3x - 4y + 2 = 0$, $3x + 4y - 14 = 0$



Relaciones métricas

Si se representa por $2a$ la constante suma de distancias a los focos, por $2b$ la longitud del eje imaginario y por $2c$ la distancia focal, entonces se cumple lo siguiente:

- 1) La longitud del eje real $\overline{AA'}$ es $2a$
- 2) $c^2 = a^2 + b^2$



Demostración:

1) El segmento $\overline{AA'}$ se puede escribir como diferencia $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{AF}$
Como $\overline{AF'} = \overline{AF}$, sustituyendo en la expresión anterior se tiene que $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{AF}$
Finalmente, dado que el punto A pertenece a la hipérbola, entonces $\overline{AA'} = \overline{AF'} - \overline{AF} = 2a$

2) Por la definición de B , se cumple que $\overline{AB} = c$
Si $2b$ es la longitud del eje imaginario, entonces $\overline{BC} = b$
Si $2c$ es la distancia focal, entonces $\overline{AC} = a$
Como los segmentos \overline{BC} , \overline{AC} son los catetos y \overline{AB} la hipotenusa de un triángulo rectángulo, cumplen el teorema de Pitágoras y por lo tanto $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuación reducida de la hipérbola

Si se ubican los dos focos de la hipérbola sobre el eje X , el eje de simetría horizontal sobre el eje X y el eje de simetría vertical sobre el eje Y , entonces:

- El centro tiene coordenadas $C(0, 0)$
- Los focos tienen coordenadas $F(c, 0)$ y $F'(-c, 0)$
- Los vértices reales tienen coordenadas $A(a, 0)$ y $A'(-a, 0)$
- Los vértices imaginarios tienen coordenadas $B(0, b)$ y $B'(0, -b)$
- El eje real mide $2a$, el eje imaginario mide $2b$ y la distancia focal mide $2c$.
- Las asíntotas de la hipérbola son las rectas: $y = \frac{b}{a}x$ $y = -\frac{b}{a}x$
- Todo punto $P(x, y)$ de la hipérbola cumple la siguiente ecuación: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

A la ecuación $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ se le llama **ecuación reducida de la hipérbola**.

Recuérdese que los valores a , b y c están ligados mediante la relación $c^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo:

Focos: los puntos $F(5, 0)$ y $F'(-5, 0)$

Distancia focal: 10 u

Ejes de simetría: recta $x = 0$, recta $y = 0$

Centro: el punto $C(0, 0)$

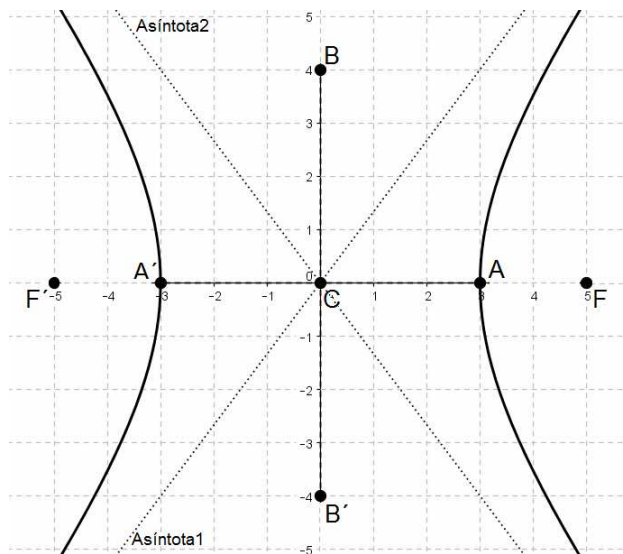
Vértices reales: $A(3, 0)$ $A'(-3, 0)$

Vértices imaginarios: $B(0, 4)$ $B'(0, -4)$

Eje real: segmento $\overline{AA'}$, que mide 6 u

Eje imaginario: segmento $\overline{BB'}$, que mide 8 u

Asíntotas: las rectas $y = \frac{4}{3}x$, $y = -\frac{4}{3}x$



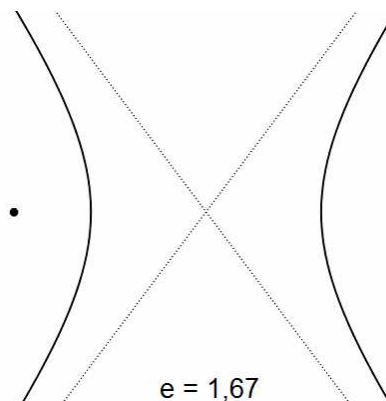
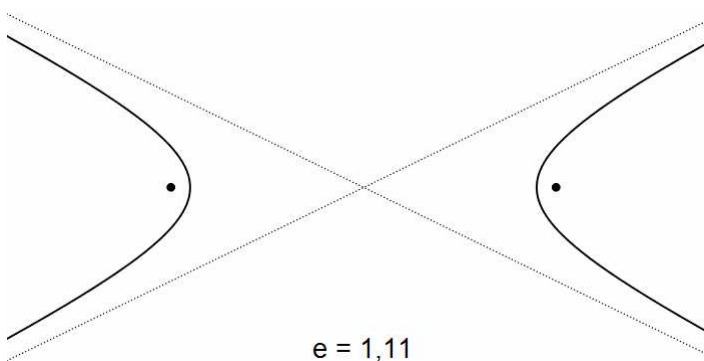
Obsérvese que $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$ y que cumplen la relación $c^2 = a^2 + b^2$

Ecuación reducida de la hipérbola: $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

Excentricidad de la hipérbola

Se llama **excentricidad** de una hipérbola, al cociente entre la semidistancia focal y el semieje real. Se representa por e . Por lo tanto, $e = \frac{c}{a}$

Teniendo en cuenta que $c > a$, la excentricidad es siempre un valor mayor que 1: $e > 1$



Ejemplo: para hallar la ecuación reducida y la excentricidad de una elipse cuya distancia focal es 10 cm y cuyo eje real mide 6 cm, se averigua primero la medida del eje imaginario:

$$2c = 10 \Rightarrow c = 5$$

$$2a = 6 \Rightarrow a = 3$$

$$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 25 = 9 + b^2 \Rightarrow b = 4 \Rightarrow 2b = 8$$

El eje imaginario mide 8 cm

$$\text{Su ecuación reducida es } \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{4^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

$$\text{Su excentricidad es } e = \frac{c}{a} = \frac{5}{3} \cong 1,67$$

5. La parábola.

Se llama **parábola** al lugar geométrico de los puntos P del plano que equidistan de un punto fijo F y de una recta fija d: $d(P, F) = d(P, d)$
Al punto fijo se le llama **foco** y a la recta fija se le llama **directriz**.

Elementos de una parábola

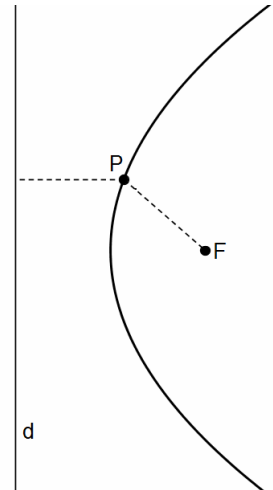
Foco: el punto F

Directriz: la recta d

Eje de simetría: la recta perpendicular a la recta directriz y que pasa por el foco.

Vértice: el punto de corte V entre el eje de simetría y la parábola.

Parámetro: la distancia p del foco a la directriz.



Ejemplo:

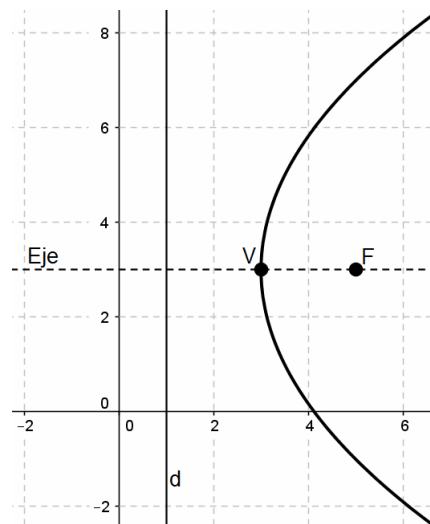
Foco: F(5, 3)

Directriz: recta $x = 1$

Eje de simetría: recta $y = 3$

Vértice: V(3, 3)

Parámetro: $p = d(F, d) = 4$



Ecuación reducida de la parábola

Caso 1. Si se ubican el vértice en el origen de coordenadas y el eje de simetría sobre el eje X, entonces:

– El foco tiene coordenadas $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$

– La recta directriz tiene ecuación $x = -\frac{p}{2}$

– El vértice tiene coordenadas V(0, 0)

– El eje de simetría coincide con el eje X, es decir, su ecuación es $y = 0$

– Todo punto P(x, y) de la parábola cumple la siguiente ecuación: $y^2 = 2px$

A la ecuación $y^2 = 2px$ se le llama **ecuación reducida de la parábola**.

Ejemplo:

Foco: $F(2, 0)$

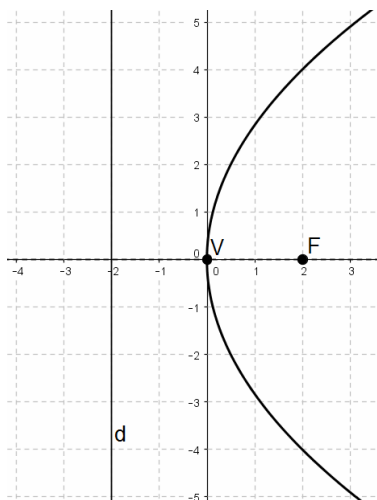
Directriz: recta $x = -2$

Eje de simetría: recta $y = 0$

Vértice: $V(0, 0)$

Parámetro: $p = d(F, d) = 4$

Ecuación reducida
de la parábola: $y^2 = 8x$



Caso 2. Si se ubican el vértice en el origen de coordenadas y el eje de simetría sobre el eje Y, entonces:

– El foco tiene coordenadas $F\left(0, \frac{p}{2}\right)$

– La recta directriz tiene ecuación $y = -\frac{p}{2}$

– El vértice tiene coordenadas $V(0, 0)$

– El eje de simetría coincide con el eje Y, es decir, su ecuación es $x = 0$

– Todo punto $P(x, y)$ de la parábola cumple la siguiente ecuación: $x^2 = 2py$

A la ecuación $x^2 = 2py$ se le llama **ecuación reducida de la parábola**.

Ejemplo:

Foco: $F(0, 2)$

Directriz: recta $y = -2$

Eje de simetría: recta $x = 0$

Vértice: $V(0, 0)$

Parámetro: $p = d(F, d) = 4$

Ecuación reducida de la parábola: $x^2 = 8y$

