DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 5. TRIGONOMETRÍA.

IES LA BAHIA

ACTIVIDADES

1. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

1. Calcular las restantes razones trigonométricas del ángulo α en los siguientes casos:

a) $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{3} \quad \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ b) $\cos\alpha = \frac{3}{5} \quad 270^\circ < \alpha < 360^\circ$ c) $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4} \quad 90^\circ < \alpha < 180^\circ$

d) $\sec\alpha = -2 \quad \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ e) $\text{cosec}\alpha = -\frac{5}{3} \quad \alpha \in \text{IIIC}$ f) $\text{cotg}\alpha = -\frac{3}{4} \quad \alpha \in \text{IIC}$

2. Averiguar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin usar la calculadora:

a) 1 110º b) 780º c) 405º d) 1 440º e) 3 690º

2. Reducción al primer cuadrante.

3. Aplicando la reducción al primer cuadrante, calcular las razones trigonométricas siguientes:

a) sen150º b) cos135º c) tg300º d) sec225º

e) cosec120º f) cotg240º g) sen315º h) cos210º

i) tg330º j) sec150º k) cosec300º l) cotg225º

4. Averiguar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin usar la calculadora:

a) 840º b) 510º c) 1215º

5. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $2\cos^2 x + \text{sen}x = 2$ b) $\text{sen}^2 x = \frac{1}{4}$ c) $\cos^2 x = \frac{1}{4}$

d) $\frac{2}{3}\text{sen}x + 7\,\text{sen}x = \frac{23}{6}$ e) $(1 + \text{tg}^2 x)\cdot\cos x = 1$ f) $\text{cotg}x + \frac{\text{sen}x}{1+\cos x} = 2$

g) $\sec x = \sqrt{2}\cdot\text{cotg}x$ h) $\text{cotg}^2 x = 1 - \text{cosec}x$ i) $4\,\text{sen}x = \text{cosec}x$

j) $\text{sen}x = \cos x$ k) $\text{sen}x = -\cos x$ l) $\text{sen}x + \cos x = 3$

m) $\cos^2 x + \text{sen}x\cdot\cos x = 1$ n) $\cos x = \frac{2\text{tg}x}{1+\text{tg}^2 x}$ ñ) $2\text{tg}x = \frac{1}{\cos^2 x}$

6. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\text{sen}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ b) $\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ c) $\text{sen}\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\text{sen}\left(3x-\frac{\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\text{tg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=-1$ f) $\cos(2x-\pi)=0$

g) $\text{sen}\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}$ h) $\sec 3x=\frac{2}{\sqrt{3}}$ i) $\text{tg}\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$

j) $\text{tg}3x=1$ k) $\text{sen}2x=\frac{-1}{2}$ l) $\text{sen}3x=\frac{\sqrt{3}}{2}$

3. Ángulos opuestos.

7. Averiguar las razones trigonométricas de los siguientes ángulos sin usar la calculadora:

a) –225º b) –660º c) –1770º

4. Razones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

8. Sabiendo que el ángulo $\alpha\in \text{IC}$ y que $\text{sen}\alpha=\frac{3}{5}$, que el ángulo $\beta\in \text{IIC}$ y que $\text{sen}\beta=\frac{5}{13}$, hallar las razones trigonométricas del: a) ángulo suma $\alpha+\beta$ b) ángulo diferencia $\alpha-\beta$

9. Sabiendo que $\text{tg}\alpha=\frac{1}{2}$, hallar: a) $\text{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$ b) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$

10. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{\text{tg}\alpha+\text{tg}\beta}{\text{cotg}\alpha+\text{cotg}\beta}=\text{tg}\alpha\cdot\text{tg}\beta$ b) $\text{sen}^2\alpha-\cos^2\beta=\text{sen}^2\beta-\cos^2\alpha$

c) $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\alpha+\text{sen}(\pi+\alpha)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=1$ d) $\cos\alpha\cdot\cos(\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\text{sen}(-\alpha)=-1$

e) $\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)=\text{sen}^2\alpha-\text{sen}^2\beta$ f) $\text{sen}\alpha\cdot\text{sen}(\alpha+\beta)+\cos\alpha\cdot\cos(\alpha+\beta)=\cos\beta$

g) $-\text{sen}(\alpha+\beta)\cdot\text{sen}(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\cos^2\beta$ h) $\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\text{sen}^2\beta$

i) $1-\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)=\text{sen}^2\alpha+\text{sen}^2\beta$ j) $\frac{\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)}{\text{sen}(\alpha+\beta)+\text{sen}(\alpha-\beta)}=-\text{tg}\beta$

11. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\text{sen}x$ b) $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\text{sen}x$ c) $\text{sen}\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\text{sen}x$ d) $\text{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\text{tg}x$

5. Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad.

12. Sabiendo que el ángulo $\alpha \in IIC$ y que $\text{sen}\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, hallar las razones trigonométricas del:

a) ángulo doble 2α b) ángulo mitad $\frac{\alpha}{2}$

13. Sabiendo que el ángulo $\alpha \in IVC$ y que $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, que el ángulo $\beta \in IIC$ y que $\text{sen}\beta = \frac{5}{13}$, hallar las siguientes razones trigonométricas:

a) $\text{sen}(\alpha - \beta)$ b) $\text{tg}(\pi + \beta)$ c) $\text{sen}2\beta$ d) $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

14. Sabiendo que $\alpha \in IIC$ y que $\text{tg}\alpha = \frac{-1}{4}$, hallar el seno y el coseno del ángulo doble 2α.

15. Sabiendo que el ángulo $\alpha \in IIC$ y que $\text{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2$, hallar el seno y el coseno del ángulo α.

16. Sabiendo que el ángulo $\alpha \in IC$ y que $\text{tg}(2\alpha) = \sqrt{8}$, hallar el seno y el coseno del ángulo α.

17. Averiguar si son ciertas o falsas las siguientes igualdades. Justifica la respuesta.

a) $\text{sen}(\alpha + \beta) = \text{sen}\alpha + \text{sen}\beta$ b) $\text{sen}(2\alpha) = 2\text{sen}\alpha$ c) $\cos(2\alpha) = 2\cos\alpha$ d) $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\text{sen}\alpha}{2}$

18. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \text{sen}^2\alpha$

b) $\frac{1 + \cos 2\alpha}{2} = \cos^2\alpha$

c) $(1 + \cos 2\alpha) \cdot \text{tg}\alpha = \text{sen}2\alpha$

d) $(\text{sen}\alpha + \cos\alpha)^2 - (1 + \text{sen}2\alpha) = 0$

e) $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) \cdot (\cos\alpha + \text{sen}\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos 2\alpha$

f) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) - \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = 2\text{tg}2\alpha$

g) $\text{sen}(\pi - \alpha) \cdot \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \text{sen}(-\alpha) \cdot \cos(\pi + \alpha) = \text{sen}2\alpha$

h) $6\text{sen}^2\alpha + 8\cos^2\alpha - 7 = \cos 2\alpha$

i) $\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\frac{\text{sen}\alpha}{2}$

j) $4\text{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \text{sen}^2\alpha$

k) $\left(\text{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \text{sen}\alpha = 1$

l) $\frac{\text{sen}\alpha \cdot \cos\alpha}{\cos^2\alpha - \text{sen}^2\alpha} = \frac{\text{tg}2\alpha}{2}$

m) $2 \cdot \text{sen}(\alpha + \beta) \cdot \cos(\alpha - \beta) = \text{sen}2\alpha + \text{sen}2\beta$

n) $\text{tg}\alpha \cdot (1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha) - \text{sen}\alpha = \text{sen}2\alpha$

19. Obtener una expresión para el $\operatorname{sen}3\alpha$ en función del $\operatorname{sen}\alpha$ y una expresión para el $\cos 3\alpha$ en función del $\cos\alpha$.

20. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2x + \operatorname{sen}x = 1$ b) $\cos 2x + \cos x = 0$ c) $\cos^2 x - \cos 2x \cdot \cos x = 0$

d) $\operatorname{sen}x + \cos 2x = 0$ e) $1 + \cos 2x = \sqrt{3}\cos x$ f) $\operatorname{tg}2x = \operatorname{cotg}x$

g) $\operatorname{sen}2x = -\sqrt{3}\cos x$ h) $6\cos^2 x + \cos 2x = 5$ i) $\operatorname{sen}2x = 2\cos x$

j) $\operatorname{sen}^2 x - \cos^2 x = \frac{1}{2}$ k) $\cos 2x = 1 + 4\operatorname{sen}x$

21. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2x = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ b) $\operatorname{sen}^2 x + \cos 2x = \frac{1}{4}$ c) $\operatorname{sen}2x = \cos x$

d) $\cos 2x = \cos x$ e) $\cos 2x - 2\cos x + 1 = 0$ f) $\cos 2x + 2\cos^2 x = 0$

g) $\operatorname{tg}x = \operatorname{tg}(2x + \pi)$ h) $\operatorname{sen}2x = \operatorname{sen}x$ i) $2\operatorname{sen}x \cdot \cos x = 1$

j) $\operatorname{sen}2x = \operatorname{tg}x$ k) $\cos 2x = \operatorname{sen}x$ l) $\operatorname{sen}2x \cdot \cos x = 6\operatorname{sen}^3 x$

m) $\cos 2x = -\operatorname{sen}x$ n) $\operatorname{tg}x = 2\operatorname{sen}^2 x$ ñ) $\operatorname{tg}x + \cos 2x = 1$

6. Transformación de sumas y diferencias en productos.

22. Transforma en productos las siguientes sumas o diferencias y luego calcula el resultado final sin usar la calculadora:

a) sen75º + sen15º b) sen75º – sen15º c) cos75º + cos15º

d) cos75º – cos15º e) sen105º – sen15º f) cos105º + cos15º

23. Demostrar las siguientes identidades:

a) $\frac{\cos 3\alpha - \cos\alpha}{\operatorname{sen}3\alpha - \operatorname{sen}\alpha} = -\operatorname{tg}2\alpha$ b) $\frac{\operatorname{sen}3\alpha - \operatorname{sen}5\alpha}{\cos 3\alpha + \cos 5\alpha} = -\operatorname{tg}\alpha$

24. Resolver las siguientes ecuaciones trigonométricas:

a) $\cos 2x + \cos x = 0$ b) $\cos 4x + \cos 2x = 0$ c) $\cos 4x + \cos 2x = \cos x$

d) $\cos 4x - \cos 2x = -\operatorname{sen}x$ e) $\cos 3x - \cos x = -\operatorname{sen}x$ f) $\cos 2x - \cos 6x = \operatorname{sen}5x + \operatorname{sen}3x$

g) $\operatorname{sen}3x - \cos x = -\operatorname{sen}x$ h) $\operatorname{sen}2x + \operatorname{sen}4x = -\operatorname{sen}3x$ i) $\operatorname{sen}3x - \operatorname{sen}x = \cos 2x$

7. Resolución de triángulos.

25. Resolver los siguientes triángulos:

a) a = 6 cm, B = 45º, A = 75º   b) A = 90º, B = 30º, a = 6 cm   c) a = 20 cm, B = 45º, C = 65º

d) a = 10 cm, B = 45º, C = 75º   e) a = 20 cm, B = 45º, C = 75º   f) b = 12 cm, A = 15º, B = 30º

26. Resolver los siguientes triángulos:

a) a = 9 cm, b = 5,4 cm, c = 6 cm   b) b = 40 cm, c = 30 cm, A = 60º   c) a = 2,1 cm, b = 4 cm, c = 5,7 cm

27. Resolver los siguientes triángulos y calcular también su área:

a) A = 75º, B = 35º, a = 30 cm   b) A = 100º, B = 30º, b = 20 cm

c) A = 60º, B = 45º, b = 20 cm   d) A = 30º, b = 3 cm, c = 4 cm

28. ¿Es posible que exista un triángulo con las siguientes medidas? Justificar la respuesta.

a) a = 3 cm, b = 2 cm, c = 6 cm   b) a = 5 cm, b = 32 cm, c = 4 cm

c) b = 5 cm, c = 40 cm, B = 60º   d) b = 6 cm, c = 2 cm, C = 30º

29. Un avión vuela entre dos ciudades A y B que distan 7 km en línea recta. Las visuales al avión desde A y B forman ángulos de 45º y 37º con la horizontal, respectivamente.

a) Calcular la distancia del avión a cada ciudad.

b) Calcular la altura a la que se encuentra el avión.

c) Si una persona se encuentra en la vertical justo debajo del avión, calcular la distancia a la que se encuentra de cada ciudad.

30. Un río tiene las dos orillas paralelas. Desde dos puntos A y B de la misma orilla se observa un punto P de la orilla opuesta situado entre A y B. Las visuales forman con la dirección de la orilla ángulos de 45º y 60º respectivamente. Calcular la anchura del río sabiendo que la distancia entre los puntos A y B es de 12,62 m.

31. Desde dos puntos A y B que distan 60 m, se dirigen dos visuales a la copa de un árbol situado entre los puntos A y B en la recta que los une. Desde A se ve la copa bajo un ángulo de 50º y desde el punto B bajo un ángulo de 40º. Calcular:

a) La altura del árbol.

b) La distancia de los puntos A y B al pie del árbol, respectivamente.

32. Un avión que vuela horizontalmente, al encontrarse sobre la vertical de un punto A situado en el suelo, ve la torre de control del aeropuerto bajo un ángulo de depresión de 25º. Después de desplazarse 1 000 m en línea recta, ve ahora la misma torre bajo un ángulo de depresión de 47º. Calcular la altura a la que vuela el avión y la distancia del punto A a la torre de control.

33. Desde mi casa veo la fuente de la plaza mayor y también veo el ayuntamiento. El ángulo formado por dichas visuales es de 30º. La distancia desde mi casa a la fuente es de $40\sqrt{2}$ m y la distancia de la fuente al ayuntamiento es de 40 m. Calcular la distancia de mi casa al ayuntamiento.

34. Se va a construir un túnel para conectar dos puntos A y B. Se toma como referencia una antena de comunicaciones C situada entre ambos puntos. Las visuales desde los puntos A y B a la antena C forman ángulos de 53º y 45º, respectivamente, con la línea AB. La distancia entre los punto A y C es de 250 m. Calcular la longitud del túnel.

35. Una parcela en el campo de forma triangular tiene por lados 20, 22 y 30 m, respectivamente. Averiguar los ángulos de la parcela.

36. Tres pueblos A, B y C están unidos por carreteras en línea recta. Se sabe que la distancia entre A y B es de 10 km, y entre B y C es de 12 km. El ángulo formado por las carreteras AB y BC es de 120º. Calcular la distancia entre los pueblos A y C.

37. Calcular la longitud de los lados de un romboide cuyas diagonales miden 20 y 16 cm, respectivamente. Las diagonales se cortan formando un ángulo de 37º.

38. Los lados de un romboide miden 9 cm y 16 cm, respectivamente. Los ángulos del romboide son 52° y 128º, respectivamente. Hallar la longitud de las diagonales.

39. a) En una circunferencia de 6 cm de radio se traza una cuerda de 9 cm. Calcular el ángulo central que abarca dicha cuerda.

b) En una circunferencia de 16 cm de diámetro se traza una cuerda de 4 cm. Calcular el ángulo central que abarca dicha cuerda.

40. a) Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de radio 6 cm.

b) Calcular el lado de un pentágono regular inscrito en una circunferencia de diámetro 50 cm.

41. Desde un punto situado en el suelo, se observa el punto más alto de una montaña bajo un ángulo de 20º. Tras desplazarnos en línea recta 1 km en dirección a la base de la montaña, ahora se observa dicho punto bajo un ángulo de 35º. Calcular la altura de la montaña.

42. Una torre de comunicaciones situada sobre una montaña, se ve desde un punto P del suelo bajo un ángulo de 67º. Si nos acercamos a la montaña 30 m desde el punto P, vemos ahora la torre bajo un ángulo de 70º y la montaña bajo un ángulo de 66º. Calcular la altura de la torre.

SOLUCIONES

1. a) $\cos\alpha = -2\sqrt{2}/3$, $tg\alpha = \sqrt{2}/4$; b) $sen\alpha = -4/5$, $tg\alpha = -4/3$; c) $sen\alpha = 3/5$, $\cos\alpha = -4/5$; d) $sen\alpha = \sqrt{3}/2$, $\cos\alpha = -1/2$, $tg\alpha = -\sqrt{3}$; e) $sen\alpha = -3/5$, $\cos\alpha = -4/5$, $tg\alpha = 3/4$; f) $sen\alpha = 4/5$, $\cos\alpha = -3/5$, $tg\alpha = -4/3$

2. a) 1/2, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$; b) $\sqrt{3}/2$, 1/2, $\sqrt{3}$; c) $\sqrt{2}/2$, $\sqrt{2}/2$, 1; d) 0, 1, 0; e) 1, 0, no existe.

3. a) 1/2; b) $-\sqrt{2}/2$; c) $-\sqrt{3}$; d) $-\sqrt{2}$; e) $2\sqrt{3}/3$; f) $\sqrt{3}/3$; g) $-\sqrt{2}/2$; h) $-\sqrt{3}/2$; i) $-\sqrt{3}/3$; j) $-2\sqrt{3}/3$; k) $-2\sqrt{3}/3$; l) 1

4. a) $\sqrt{3}/2$, –1/2, $-\sqrt{3}$; b) 1/2, $-\sqrt{3}/2$, $-\sqrt{3}/3$; c) $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, –1

5. a) $x_1 = 0º$, $x_2 = 180º$, $x_3 = 30º$, $x_4 = 150º$; b) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$, $x_3 = 210º$, $x_4 = 330º$; c) $x_1 = 60º$, $x_2 = 120º$, $x_3 = 240º$, $x_4 = 300º$; d) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$; e) $x_1 = 0º$; f) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$; g) $x_1 = 45º$, $x_2 = 135º$; h) $x_1 = 90º$, $x_2 = 210º$, $x_3 = 330º$; i) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$, $x_3 = 210º$, $x_4 = 330º$; j) $x_1 = 45º$, $x_2 = 225º$; k) $x_1 = 135º$, $x_2 = 315º$; l) No tiene solución; m) $x_1 = 0º$, $x_2 = 180º$, $x_3 = 45º$, $x_4 = 225º$; n) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$; ñ) $x_1 = 45º$, $x_2 = 225º$

6. a) $x_1 = 60º$; $x_2 = 180º$; b) $x_1 = 45º$; $x_2 = 165º$; c) $x_1 = 30º$; $x_2 = 50º$; d) $x_1 = 25º$; $x_2 = 45º$; e) $x_1 = 360º$, $x_2 = 180º$; f) $x_1 = 135º$, $x_2 = 225º$; g) $x_1 = 45º$, $x_2 = 105º$; h) $x_1 = 10º$; $x_2 = 110º$; i) $x_1 = 35º$, $x_2 = 95º$; j) $x_1 = 15º$, $x_2 = 75º$; k) $x_1 = 105º$, $x_2 = 165º$; l) $x_1 = 20º$, $x_2 = 40º$

7. a) $\sqrt{2}/2$, $-\sqrt{2}/2$, –1; b) $\sqrt{3}/2$, 1/2, $\sqrt{3}$; c) 1/2, $\sqrt{3}/2$, $\sqrt{3}/3$

8. a) –16/65, –63/65, 16/63; b) –56/65, –33/65, 56/33

9. a) $tg(\alpha+45º) = 3$; b) $tg(45º–\alpha) = 1/3$

11. a) $x_1 = 15º$, $x_2 = 195º$; b) $x_1 = 45º$, $x_2 = 225º$; c) $x_1 = 135º$, $x_2 = 315º$; d) No tiene solución.

12. a) $-4\sqrt{5}/9$, –1/9, $4\sqrt{5}$; b) $\sqrt{30}/6$, $\sqrt{6}/6$, $\sqrt{5}$

13. a) 33/65; b) –5/12; c) –120/169; d) $-2\sqrt{5}/5$

14. $sen2\alpha = –8/17$; $\cos2\alpha = 15/17$

15. $sen\alpha = 4/5$; $\cos\alpha = –3/5$

16. $sen\alpha = \sqrt{3}/3$, $\cos\alpha = \sqrt{6}/3$

17. Ninguna es cierta.

19. $sen3\alpha = 3sen\alpha – 4sen^3\alpha$; $\cos3\alpha = 4\cos^3\alpha – 3\cos\alpha$

20. a) $x_1 = 0º$, $x_2 = 180º$, $x_3 = 30º$, $x_4 = 150º$; b) $x_1 = 60º$, $x_2 = 300º$, $x_3 = 180º$; c) $x_1 = 90º$, $x_2 = 270º$, $x_3 = 0º$, $x_4 = 120º$, $x_5 = 240º$; d) $x_1 = 90º$, $x_2 = 210º$, $x_3 = 330º$; e) $x_1 = 90º$, $x_2 = 270º$, $x_3 = 30º$, $x_4 = 330º$; f) $x_1 = 30º$, $x_2 = 210º$, $x_3 = 150º$, $x_4 = 330º$; g) $x_1 = 90º$, $x_2 = 270º$, $x_3 = 240º$, $x_4 = 300º$; h) $x_1 = 30º$, $x_2 = 150º$, $x_3 = 210º$, $x_4 = 330º$; i) $x_1 = 90º$, $x_2 = 270º$; j) $x_1 = 60º$, $x_2 = 120º$, $x_3 = 240º$, $x_4 = 300º$; k) $x_1 = 0º$, $x_2 = 180º$

21. a) $x_1 = 90^o$, $x_2 = 210^o$, $x_3 = 330^o$; b) $x_1 = 60^o$, $x_2 = 120^o$, $x_3 = 240^o$, $x_4 = 300^o$;
c) $x_1 = 30^o$, $x_2 = 150^o$, $x_3 = 90^o$, $x_4 = 270^o$; d) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 120^o$, $x_3 = 240^o$; e) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 90^o$, $x_3 = 270^o$;
f) $x_1 = 60^o$, $x_2 = 120^o$, $x_3 = 240^o$, $x_4 = 300^o$; g) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$;
h) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 60^o$, $x_4 = 300^o$; i) $x_1 = 45^o$, $x_2 = 225^o$;
j) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 45^o$, $x_4 = 315^o$, $x_5 = 135^o$, $x_6 = 225^o$; k) $x_1 = 270^o$, $x_2 = 30^o$, $x_3 = 150^o$;
l) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 30^o$, $x_4 = 150^o$, $x_5 = 210^o$, $x_6 = 330^o$; m) $x_1 = 90^o$, $x_2 = 210^o$, $x_3 = 330^o$;
n) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 45^o$, $x_4 = 225^o$; ñ) $x_1 = 0^o$; $x_2 = 180^o$; $x_3 = 45^o$; $x_4 = 225^o$

22. a) $\sqrt{6}/2$; b) $\sqrt{2}/2$; c) $\sqrt{6}/2$; d) $-\sqrt{2}/2$; e) $\sqrt{2}/2$; f) $\sqrt{2}/2$

24. a) $x_1 = 60^o$, $x_2 = 180^o$; b) $x_1 = 30^o$, $x_2 = 90^o$, $x_3 = 270^o$; c) $x_1 = 90^o$, $x_2 = 270^o$, $x_3 = 20^o$, $x_4 = 100^o$;
d) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 10^o$, $x_4 = 50^o$; e) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 180^o$, $x_3 = 15^o$, $x_4 = 75^o$;
f) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 45^o$, $x_3 = 90^o$, $x_4 = 270^o$, $x_5 = 30^o$, $x_6 = 150^o$; g) $x_1 = 90^o$, $x_2 = 270^o$, $x_3 = 15^o$, $x_4 = 75^o$;
h) $x_1 = 0^o$, $x_2 = 60^o$, $x_3 = 120^o$, $x_4 = 240^o$; i) $x_1 = 45^o$, $x_2 = 135^o$, $x_3 = 30^o$, $x_4 = 150^o$

25. a) b = 4,4 cm, c = 5,4 cm, C = 60º; b) C = 60º, b = 3 cm, c = 5,2 cm;
c) A = 70º, b = 15 cm, c = 19,3 cm; d) A = 60º, b = 8,16 cm, c = 11,15 cm;
e) A = 60º, b = 16,3 cm, c = 22,3 cm; f) C = 135º, a = 6,2 cm, c = 16,97 cm

26. a) A = 105º, B = 35º, C = 40º; b) a = 36 cm, B = 74º, C = 46º; c) A = 15º, B = 30º, C = 135º

27. a) C = 70º, b = 17,81 cm, c = 29,19 cm, S = 251,03 cm^2;
b) C = 50º, a = 39,39 cm, c = 30,64 cm, S = 301,73 cm^2
c) C = 75º, a = 24,49 cm, c = 27,32 cm, S = 236,59 cm^2; d) B = 47º, C = 103º, a = 2,05 cm, S = 3 cm^2

28. Ninguno es posible.

29. a) Aprox. a 4,25 km de A y a 5 km de B; b) Aprox. 3,01 km;
c) Aprox. a 3,01 km de A y a 3,99 km de B.

30. Aprox. 8 m

31. a) Aprox. 29,54 m; b) Aprox. 24,79 m y 35,21 m, respectivamente.

32. La altura a la que vuela el avión es aprox. 825,09 m y la distancia del punto A a la torre de control es aprox. 1 769,41 m

33. Aprox. 77,27 m

34. Aprox. 350,11 m

35. Aprox. 42º, 47º, 91º, respectivamente.

36. Aprox. 19,08 km

37. Aprox. 6,02 cm y 17,08 cm, respectivamente.

38. Las diagonales miden aprox. 22,68 cm y 12,64 cm respectivamente.

39. a) Aprox. 97º; b) Aprox. 29º

40. a) Aprox. 7,05 cm; b) Aprox. 29,39 cm

41. Aprox. 742 m

42. Aprox. 90,49 m