



1. Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

Para ampliar a un ángulo cualquiera las definiciones de las razones trigonométricas, se aplican los siguientes pasos:

1. En un sistema de ejes cartesianos, se traza una circunferencia de radio 1 con centro en el origen O.

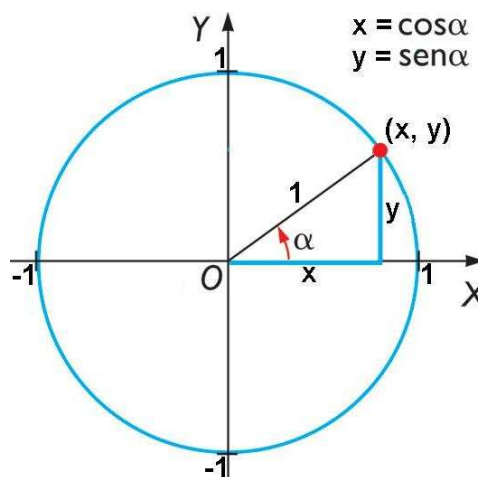
A esta circunferencia se le llama **circunferencia goniométrica**.

2. Dado un ángulo α cualquiera, no necesariamente agudo, se hace coincidir su vértice con el origen O y su lado inferior con el eje OX.

3. El lado superior de α corta a la circunferencia goniométrica en un punto de coordenadas (x, y).

4. Por definición, las razones trigonométricas de α son:

$$\text{sen}\alpha = y \quad \text{cos}\alpha = x \quad \text{tg}\alpha = \frac{y}{x}$$



Las nuevas definiciones son ampliaciones de las definiciones para un ángulo agudo

En efecto, en el caso de que α sea un ángulo agudo, obsérvese que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y}{1} = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{hipotenusa}} \quad \text{cos}\alpha = \frac{x}{1} = \frac{\text{cateto adyacente } \alpha}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\text{cateto opuesto } \alpha}{\text{cateto adyacente } \alpha}$$

¿Por qué se elige la circunferencia goniométrica para ampliar las definiciones?

Las razones trigonométricas de un ángulo agudo no dependen del tamaño del triángulo rectángulo que lo contiene. Por lo tanto, las nuevas definiciones no dependen del radio de la circunferencia elegida y en consecuencia, se puede elegir una circunferencia de radio 1.

Si la circunferencia tuviera radio $r \neq 1$, por semejanza de triángulos, se tendría que:

$$\text{sen}\alpha = \frac{y'}{r} = \frac{y}{1} = y \quad \text{cos}\alpha = \frac{x'}{r} = \frac{x}{1} = x \quad \text{tg}\alpha = \frac{y'}{x'} = \frac{y}{x}$$

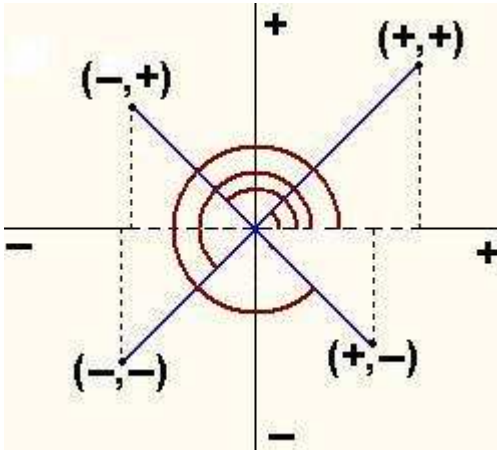
Acotación de las razones trigonométricas

Las razones trigonométricas **seno** y **coseno** toman sólo valores comprendidos entre -1 y 1 .

$$-1 \leq \text{sen}\alpha \leq 1 \quad -1 \leq \text{cos}\alpha \leq 1$$

La razón trigonométrica **tangente** no está acotada, puede tomar cualquier valor real.

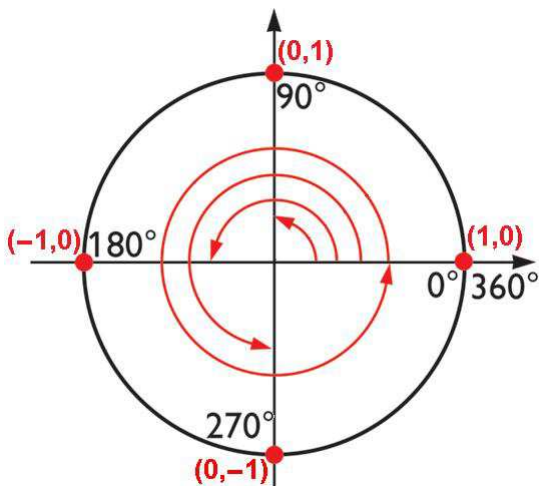
Signo de las razones trigonométricas



$$(x, y) = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

| | $\operatorname{sen} \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\operatorname{tg} \alpha$ |
|----------------------------------|-----------------------------|---------------|----------------------------|
| $0 < \alpha < 90^\circ$ | + | + | + |
| $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ | + | - | - |
| $180^\circ < \alpha < 270^\circ$ | - | - | + |
| $270^\circ < \alpha < 360^\circ$ | - | + | - |

Razones trigonométricas de 0° , 90° , 180° , 270°



$$(x, y) = (\cos \alpha, \operatorname{sen} \alpha)$$

| | | |
|----------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| $\operatorname{sen} 0^\circ = 0$ | $\cos 0^\circ = 1$ | $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$ |
|----------------------------------|--------------------|---------------------------------|

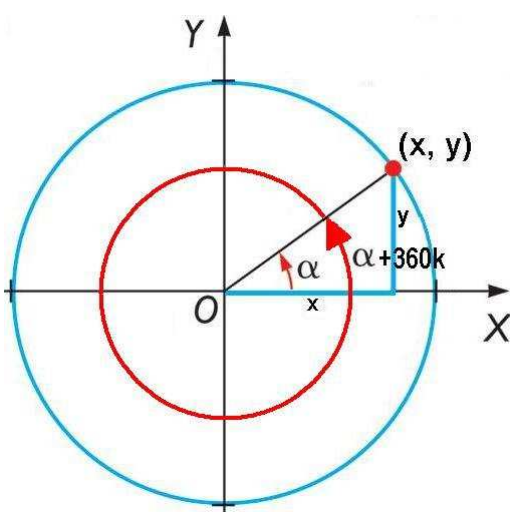
| | | |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------------------|
| $\operatorname{sen} 90^\circ = 1$ | $\cos 90^\circ = 0$ | $\nexists \operatorname{tg} 90^\circ$ |
|-----------------------------------|---------------------|---------------------------------------|

| | | |
|------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|
| $\operatorname{sen} 180^\circ = 0$ | $\cos 180^\circ = -1$ | $\operatorname{tg} 180^\circ = 0$ |
|------------------------------------|-----------------------|-----------------------------------|

| | | |
|-------------------------------------|----------------------|--|
| $\operatorname{sen} 270^\circ = -1$ | $\cos 270^\circ = 0$ | $\nexists \operatorname{tg} 270^\circ$ |
|-------------------------------------|----------------------|--|

| | | |
|------------------------------------|----------------------|-----------------------------------|
| $\operatorname{sen} 360^\circ = 0$ | $\cos 360^\circ = 1$ | $\operatorname{tg} 360^\circ = 0$ |
|------------------------------------|----------------------|-----------------------------------|

Las razones trigonométricas tienen un comportamiento circular



Los ángulos que se diferencian en un número entero de vueltas, tienen las mismas razones trigonométricas.

$$\operatorname{sen}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{sen} \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos(\alpha + 360^\circ k) = \cos \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + 360^\circ k) = \operatorname{tg} \alpha \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Ejemplos:

$$\operatorname{sen} 420^\circ = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{porque } 420^\circ = 360^\circ + 60^\circ$$

$$\operatorname{sen} 750^\circ = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{porque } 750^\circ = 2 \cdot 360^\circ + 30^\circ$$

$$\operatorname{sen} 1125^\circ = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{porque } 1125^\circ = 3 \cdot 360^\circ + 45^\circ$$

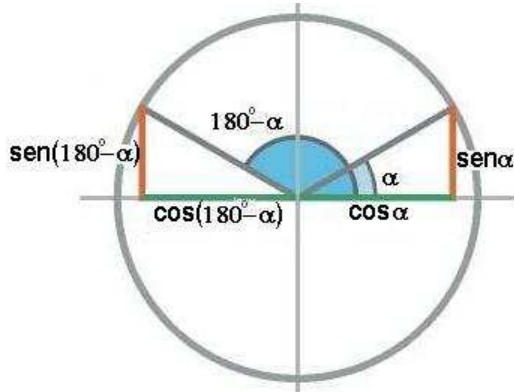
2. Reducción al primer cuadrante.

Si un ángulo pertenece al segundo, tercer o cuarto cuadrante, es posible relacionarlo con otro del primer cuadrante cuyas razones trigonométricas tengan los mismos valores absolutos.

a) Ángulos que suman 180°

$$\operatorname{sen}(180^\circ - \alpha) = \operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha$$



Ejemplos:

$$\operatorname{sen}(120^\circ) = \operatorname{sen} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(120^\circ) = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}(135^\circ) = \operatorname{sen} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(135^\circ) = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

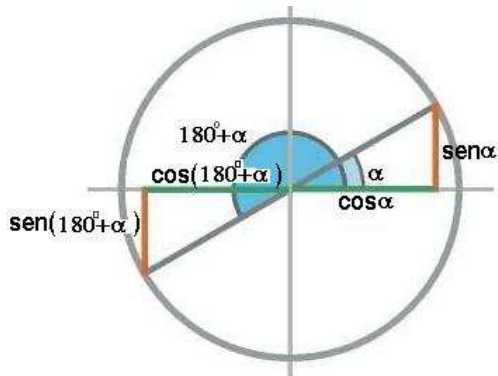
$$\operatorname{sen}(150^\circ) = \operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos}(150^\circ) = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Ángulos que difieren en 180°

$$\operatorname{sen}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(180^\circ + \alpha) = -\operatorname{cos} \alpha$$



Ejemplos:

$$\operatorname{sen}(210^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{cos}(210^\circ) = -\operatorname{cos} 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(225^\circ) = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(225^\circ) = -\operatorname{cos} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

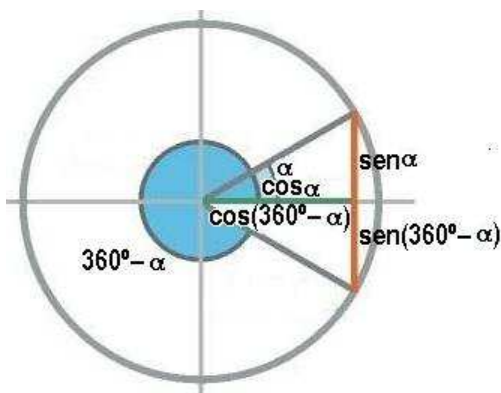
$$\operatorname{sen}(240^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(240^\circ) = -\operatorname{cos} 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

c) Ángulos que suman 360°

$$\operatorname{sen}(360^\circ - \alpha) = -\operatorname{sen} \alpha$$

$$\operatorname{cos}(360^\circ - \alpha) = \operatorname{cos} \alpha$$



Ejemplos:

$$\operatorname{sen}(300^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(300^\circ) = \operatorname{cos} 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{sen}(315^\circ) = -\operatorname{sen} 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{cos}(315^\circ) = \operatorname{cos} 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(330^\circ) = -\operatorname{sen} 30^\circ = -\frac{1}{2}$$

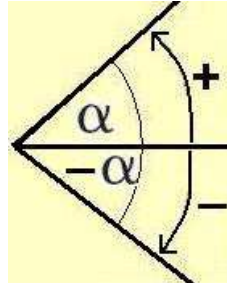
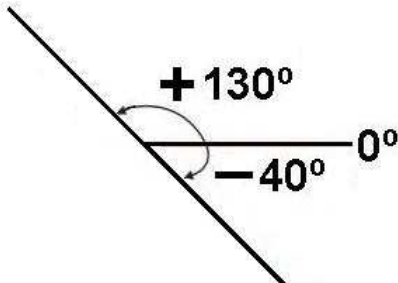
$$\operatorname{cos}(330^\circ) = \operatorname{cos} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. Ángulos opuestos.

Ángulo orientado

Un ángulo tiene signo **negativo** si su sentido de giro es idéntico al de las manecillas del reloj.

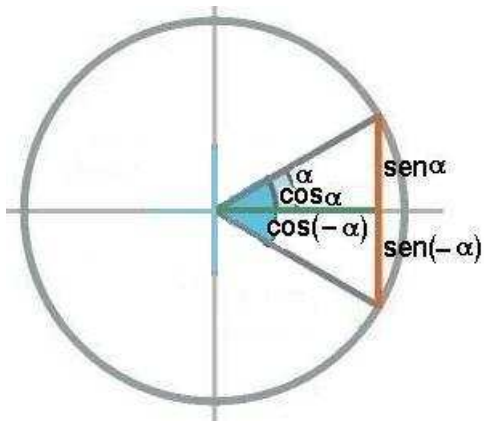
Un ángulo tiene signo **positivo** si su sentido de giro es contrario al de las manecillas del reloj.



$-\alpha$ es el ángulo opuesto de α

Razones trigonométricas de ángulos opuestos

$$\operatorname{sen}(-\alpha) = -\operatorname{sen}\alpha \quad \operatorname{cos}(-\alpha) = \operatorname{cos}\alpha$$



Ejemplos:

$$\operatorname{sen}(-30^\circ) = -\operatorname{sen}30^\circ = -\frac{1}{2} \quad \operatorname{cos}(-30^\circ) = \operatorname{cos}30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(-45^\circ) = -\operatorname{sen}45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \operatorname{cos}(-45^\circ) = \operatorname{cos}45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\operatorname{sen}(-60^\circ) = -\operatorname{sen}60^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \operatorname{cos}(-60^\circ) = \operatorname{cos}60^\circ = \frac{1}{2}$$

4. Razones trigonométricas de la suma y de la diferencia de dos ángulos.

Razones trigonométricas de la suma de dos ángulos

$$F1) \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Demostración F1:

el radio del arco de circunferencia es $R = 1$

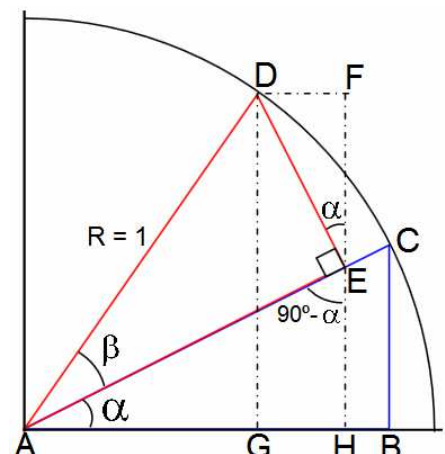
$$\operatorname{sen}\beta = DE \quad \operatorname{cos}\beta = AE \quad \operatorname{sen}(\alpha + \beta) = GD = HF$$

$$\text{Triángulo AEH} \Rightarrow HE = \operatorname{sen}\alpha \cdot AE = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta$$

$$\text{Triángulo EFD} \Rightarrow EF = \operatorname{cos}\alpha \cdot DE = \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}(\alpha + \beta) = HF = HE + EF = \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{cos}\beta + \operatorname{cos}\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$



$$F2) \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Demostración F2:

el radio del arco de circunferencia es $R = 1$

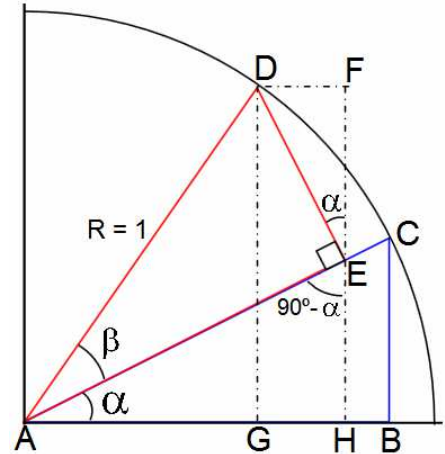
$$\sin \beta = DE \quad \cos \beta = AE \quad \cos(\alpha + \beta) = AG = AH - GH$$

$$\text{Triángulo AEH} \Rightarrow AH = \cos \alpha \cdot AE = \cos \alpha \cdot \cos \beta$$

$$\text{Triángulo EFD} \Rightarrow DF = \sin \alpha \cdot DE = \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Por lo tanto,

$$\cos(\alpha + \beta) = AH - GH = AH - DF = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$



$$F3) \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Demostración F3:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Razones trigonométricas de la diferencia de dos ángulos

$$F4) \sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$F5) \cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

$$F6) \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

Demostración F4:

$$\begin{aligned} \sin(\alpha - \beta) &= \sin(\alpha + (-\beta)) = \sin \alpha \cdot \cos(-\beta) + \cos \alpha \cdot \sin(-\beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot (-\sin \beta) = \\ &= \sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Demostración F5:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha - \beta) &= \cos(\alpha + (-\beta)) = \cos \alpha \cdot \cos(-\beta) - \sin \alpha \cdot \sin(-\beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot (-\sin \beta) = \\ &= \cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta \end{aligned}$$

Demostración F6:

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos(\alpha - \beta)} = \frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta - \cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta + \sin \alpha \cdot \sin \beta} = \frac{\frac{\sin \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} - \frac{\cos \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}}{\frac{\cos \alpha \cdot \cos \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta} + \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\cos \alpha \cdot \cos \beta}} = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

5. Razones trigonométricas del ángulo doble y del ángulo mitad.

Razones trigonométricas del ángulo doble

$$\text{F7) } \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen} \alpha \cdot \cos \alpha \qquad \text{F8) } \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \qquad \text{F9) } \operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

Demostración F7: $\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen}(\alpha + \alpha) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = 2 \cdot \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\alpha$

Demostración F8: $\cos 2\alpha = \cos(\alpha + \alpha) = \cos\alpha \cdot \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha \cdot \operatorname{sen}\alpha = \cos^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha$

Demostración F9: $\operatorname{tg} 2\alpha = \operatorname{tg}(\alpha + \alpha) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha} = \frac{2 \cdot \operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

Razones trigonométricas del ángulo mitad

$$\text{F10) } \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}} \qquad \text{F11) } \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos\alpha}{2}} \qquad \text{F12) } \operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}}$$

Demostración F10:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha = 1 - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \alpha = 1 - 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 1 - \cos \alpha \Rightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 - \cos \alpha}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}} \end{aligned}$$

Demostración F11:

$$\begin{aligned} \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \operatorname{sen}^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \left(1 - \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos \alpha = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 + \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Rightarrow \cos \alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1 \Rightarrow \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1 + \cos \alpha}{2} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}} \end{aligned}$$

Demostración F12:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{2}}}{\pm \sqrt{\frac{1 + \cos \alpha}{2}}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}} = \pm \sqrt{\frac{2 \cdot (1 - \cos \alpha)}{2 \cdot (1 + \cos \alpha)}} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}}$$

6. Transformación de sumas y diferencias en productos.

$$\text{F13) } \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{F14) } \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

$$\text{F15) } \cos\alpha + \cos\beta = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad \text{F16) } \cos\alpha - \cos\beta = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$$

Demostración F13:

En el primer paso se hacen los cambios: $\alpha = x + y$ $\beta = x - y$

En el último paso se deshacen los cambios: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha + \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(x + y) + \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen}y + \operatorname{sen}x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen}y = \\ &= 2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \cos y = 2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Demostración F14:

En el primer paso se hacen los cambios: $\alpha = x + y$ $\beta = x - y$

En el último paso se deshacen los cambios: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\alpha - \operatorname{sen}\beta &= \operatorname{sen}(x + y) - \operatorname{sen}(x - y) = \operatorname{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen}y - (\operatorname{sen}x \cdot \cos y - \cos x \cdot \operatorname{sen}y) = \\ &= \operatorname{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen}y - \operatorname{sen}x \cdot \cos y + \cos x \cdot \operatorname{sen}y = 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen}y = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Demostración F15:

En el primer paso se hacen los cambios: $\alpha = x + y$ $\beta = x - y$

En el último paso se deshacen los cambios: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

$$\begin{aligned} \cos\alpha + \cos\beta &= \cos(x + y) + \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y + \cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y = \\ &= 2 \cdot \cos x \cdot \cos y = 2 \cdot \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

Demostración F16:

En el primer paso se hacen los cambios: $\alpha = x + y$ $\beta = x - y$

En el último paso se deshacen los cambios: $x = \frac{\alpha + \beta}{2}$ $y = \frac{\alpha - \beta}{2}$

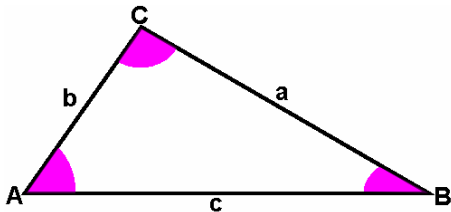
$$\begin{aligned} \cos\alpha - \cos\beta &= \cos(x + y) - \cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y - (\cos x \cdot \cos y + \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y) = \\ &= \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y - \cos x \cdot \cos y - \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y = -2 \cdot \operatorname{sen}x \cdot \operatorname{sen}y = -2 \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \end{aligned}$$

7. Resolución de triángulos.

Resolver un triángulo consiste en averiguar el valor de sus tres lados y sus tres ángulos. Además de las definiciones básicas, para resolver un triángulo se pueden emplear la **estrategia de la altura**, el **teorema de los senos** y el **teorema del coseno**.

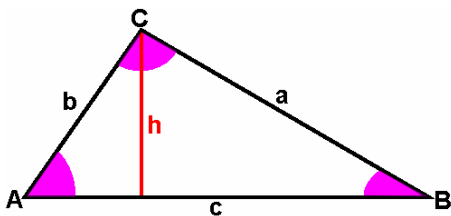
A) Teorema de los senos

En un triángulo cualquiera, los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.



$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$$

Demostración:



Trazando la altura h desde el vértice C , se va a demostrar la primera igualdad $\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$

(De forma análoga y trazando la altura desde A , se demostraría la segunda igualdad $\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C}$).

$$\left. \begin{array}{l} \text{sen}A = \frac{h}{b} \Rightarrow h = b \cdot \text{sen}A \\ \text{sen}B = \frac{h}{a} \Rightarrow h = a \cdot \text{sen}B \end{array} \right\} \Rightarrow b \cdot \text{sen}A = a \cdot \text{sen}B \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B}$$

El teorema de los senos se puede aplicar en los dos casos siguientes:

Caso 1. Que los datos sean dos ángulos y un lado.

Ejemplo: resolver el triángulo cuyos datos son: $A = 55^\circ$, $B = 40^\circ$, $c = 15$ cm

Primero se calcula el ángulo que falta: $C = 180^\circ - (A + B) = 180^\circ - 95^\circ \Rightarrow C = 85^\circ$

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow \frac{a}{\text{sen}55^\circ} = \frac{15}{\text{sen}85^\circ} \Rightarrow a = \frac{15 \cdot \text{sen}55^\circ}{\text{sen}85^\circ} \cong 12,33 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{\text{sen}B} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow \frac{b}{\text{sen}40^\circ} = \frac{15}{\text{sen}85^\circ} \Rightarrow b = \frac{15 \cdot \text{sen}40^\circ}{\text{sen}85^\circ} \cong 9,68 \text{ cm}$$

Caso 2. Que los datos sean dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.

Ejemplo: resolver el triángulo cuyos datos son: $A = 20^\circ$, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm

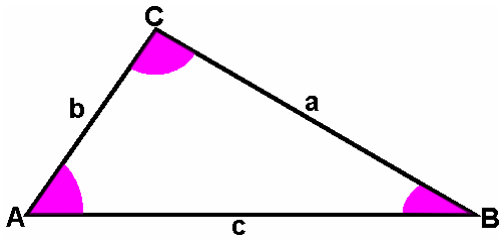
$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{b}{\text{sen}B} \Rightarrow \frac{3}{\text{sen}20^\circ} = \frac{4}{\text{sen}B} \Rightarrow \text{sen}B = \frac{4 \cdot \text{sen}20^\circ}{3} \Rightarrow B \cong 27^\circ$$

Ahora ya se puede calcular el ángulo que falta: $C = 180^\circ - (A + B) \cong 180^\circ - 47^\circ \Rightarrow C \cong 133^\circ$

$$\frac{a}{\text{sen}A} = \frac{c}{\text{sen}C} \Rightarrow \frac{3}{\text{sen}20^\circ} = \frac{c}{\text{sen}133^\circ} \Rightarrow c = \frac{3 \cdot \text{sen}133^\circ}{\text{sen}20^\circ} \Rightarrow c \cong 6,42 \text{ cm}$$

B) Teorema del coseno

En un triángulo cualquiera, el cuadrado de uno de sus lados es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble del producto de ambos por el coseno del ángulo que forman.

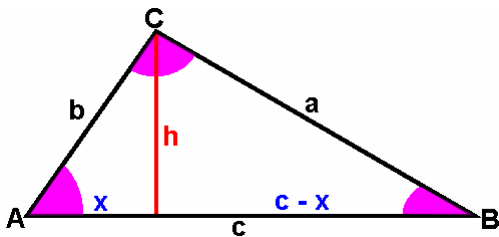


$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C$$

Demostración:



Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la derecha, se tiene que:

$$a^2 = h^2 + (c - x)^2$$

Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo de la izquierda, se tiene que:

$$b^2 = h^2 + x^2 \Rightarrow h^2 = b^2 - x^2$$

Si se sustituye h^2 en la primera expresión, queda: $a^2 = b^2 - x^2 + (c - x)^2$

$$a^2 = b^2 - x^2 + c^2 + x^2 - 2 \cdot c \cdot x \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot c \cdot x$$

Del triángulo de la izquierda se deduce que: $\cos A = \frac{x}{b} \Rightarrow x = b \cdot \cos A$

Sustituyendo $x = b \cdot \cos A$ en la expresión anterior queda: $a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A$

(De forma análoga se demostrarían la segunda y tercera igualdades).

El teorema del coseno se puede aplicar en los dos casos siguientes:

Caso 1. Que los datos sean dos lados y el ángulo que forman.

Ejemplo: resolver el triángulo cuyos datos son: $C = 58^\circ$, $a = 7$ cm, $b = 10$ cm

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos C \Rightarrow c^2 = 7^2 + 10^2 - 2 \cdot 7 \cdot 10 \cdot \cos 58^\circ \Rightarrow c^2 = 149 - 140 \cdot \cos 58^\circ \Rightarrow \\ \Rightarrow c = \sqrt{149 - 140 \cdot \cos 58^\circ} \Rightarrow c \cong 8,65 \text{ cm}$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} \Rightarrow \frac{7}{\sin A} = \frac{8,65}{\sin 58^\circ} \Rightarrow \sin A = \frac{7 \cdot \sin 58^\circ}{8,65} \Rightarrow A \cong 43^\circ$$

El ángulo que falta es: $B = 180^\circ - (A + C) \cong 180^\circ - 101^\circ \Rightarrow B \cong 79^\circ$

Caso 2. Que los datos sean los tres lados.

Ejemplo: resolver el triángulo cuyos datos son: $a = 10$ cm , $b = 8$ cm, $c = 13$ cm

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos A \Rightarrow 10^2 = 8^2 + 13^2 - 2 \cdot 8 \cdot 13 \cdot \cos A \Rightarrow 100 = 233 - 208 \cdot \cos A \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \cos A = \frac{133}{208} \Rightarrow A \cong 50^\circ$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \frac{10}{\sin 50^\circ} = \frac{8}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{8 \cdot \sin 50^\circ}{10} \Rightarrow B \cong 38^\circ$$

$$\text{El ángulo que falta es: } C = 180^\circ - (A + B) \cong 180^\circ - 88^\circ \Rightarrow C \cong 92^\circ$$

Nota 1: el teorema del coseno también se puede aplicar en el caso en el que los datos sean dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (caso 2 del teorema de los senos).

Nota 2: existen dos triángulos distintos con los siguientes datos: $A = 30^\circ$, $a = 3$ cm, $b = 4$ cm.