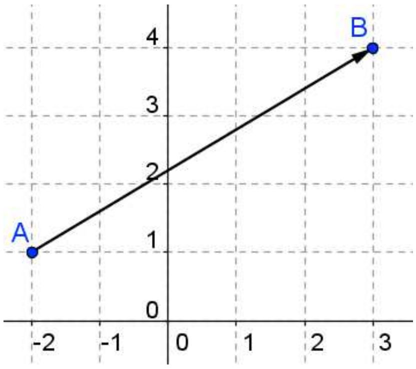
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1ºBACHILLERATO.

UNIDAD 6. GEOMETRÍA ANALÍTICA.

1. Vector fijo. Vector libre. Coordenadas de un vector.

Un **vector fijo** es un segmento orientado con origen en un punto A y extremo en un punto B. Se representa por $\overrightarrow{AB}$.

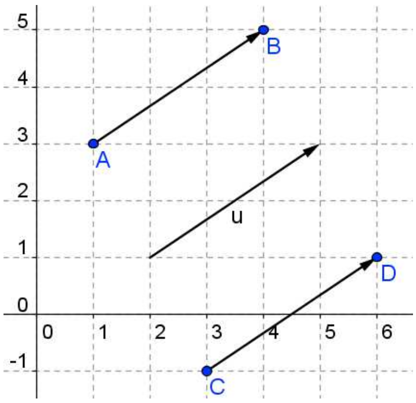


Los elementos de un vector fijo son: módulo, dirección y sentido.

Su módulo es la longitud del segmento AB.
El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Su dirección es la de la recta que lo contiene, es decir, la de la recta que pasa por los puntos A y B.
Su sentido es el que va del origen A al extremo B.

Vector libre es cualquiera de los vectores fijos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Se representa por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$... El conjunto de los vectores libres del plano se representa por V^2.

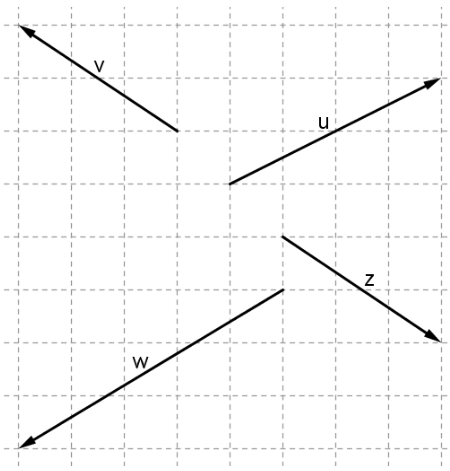


Ejemplo: los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, representan al mismo vector vector libre $\vec{u}$.

De la definición se deduce que **un vector libre puede ubicarse en cualquier lugar del plano** o que el origen de un vector libre puede ser cualquier punto del plano.

Coordenadas de un vector

Se llaman coordenadas de un vector al par ordenado de números reales (a, b) que expresan el número de unidades de desplazamiento (horizontal, vertical) para ir desde su origen a su extremo.

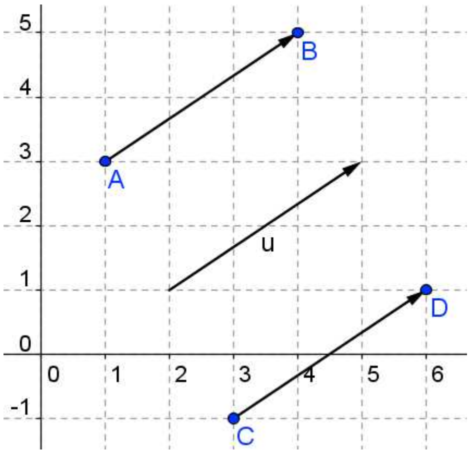


Ejemplo: las coordenadas de estos vectores son:

$\vec{u} = (4, 2)$ $\quad \vec{v} = (-3, 2)$ $\quad \vec{w} = (-5, -3)$ $\quad \vec{z} = (3, -2)$

Coordenadas de un vector determinado por dos puntos

De lo anterior se deduce que si dos puntos P y Q del plano tienen coordenadas P(a, b) y Q(c, d), entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ son $\overrightarrow{PQ} = (c - a, d - b)$



Ejemplo:

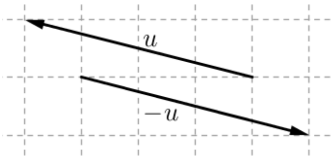
Los puntos A(1, 3) y B(4, 5) determinan el vector $\overrightarrow{AB} = (4-1, 5-3) = (3, 2)$

Los puntos C(3, –1) y D(6, 1) determinan el vector $\overrightarrow{CD} = (6-3, 1-(-1)) = (3, 2)$

Nótese que los vectores $\overrightarrow{AB} = (3, 2)$ y $\overrightarrow{CD} = (3, 2)$, que tienen las mismas coordenadas, representan al mismo vector libre $\vec{u} = (3, 2)$

Vectores opuestos

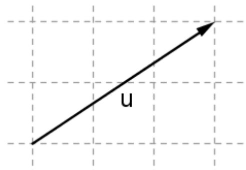
Dado un vector $\vec{u} \in V^2$, se llama **vector opuesto** de $\vec{u}$ al que tiene el mismo módulo y la misma dirección pero sentido contrario.



Si el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $\vec{u} = (a, b)$, el **vector opuesto** de $\vec{u}$ es $-\vec{u} = (-a, -b)$.

Ejemplo: los vectores $\vec{u} = (-4, 1)$ y $-\vec{u} = (4, -1)$ son opuestos

Módulo de un vector dado por sus coordenadas



El módulo de un vector $\vec{u}$ = (a, b) es el número real positivo $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Para obtener esta fórmula basta con aplicar el teorema de Pitágoras.

Ejemplo: el módulo del vector $\vec{u} = (3, 2)$ es $|\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$

Se llama **vector unitario** al que tiene módulo igual a uno. Para conseguir un vector unitario a partir de otro y con su misma dirección y sentido, basta con dividir las coordenadas del vector dado por su módulo.

Ejemplo 1: $\vec{u} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ es unitario ya que $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Ejemplo 2: un vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u} = (3, 2)$ sería el vector $\vec{v} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right) = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13}\right)$

Vectores ortogonales

Dos vectores son ortogonales si forman un ángulo recto. Dado un vector $\vec{u}$ = (a, b), el vector de la forma $\vec{v}$ = (–b, a) es ortogonal al vector $\vec{u}$

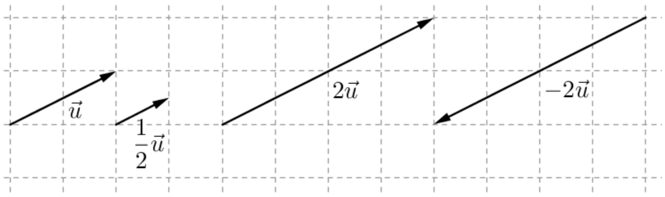
2. Operaciones con vectores.

a) Producto de un vector por un número real

Dados $k \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V^2$, el producto de k por $\vec{u}$ es igual a otro vector $k \cdot \vec{u}$ que tiene:

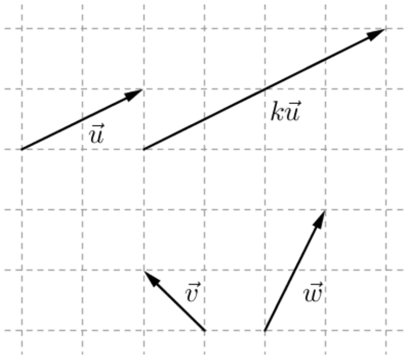
– la misma dirección que $\vec{u}$
– el mismo sentido que $\vec{u}$ si $k > 0$ y sentido contrario al de $\vec{u}$ si $k < 0$
– de módulo, $|k|$ veces el módulo de $\vec{u}$ $\quad |k \cdot \vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$

Analíticamente, si $\vec{u} = (a,b) \quad \Rightarrow \quad k \cdot \vec{u} = (k \cdot a, k \cdot b)$



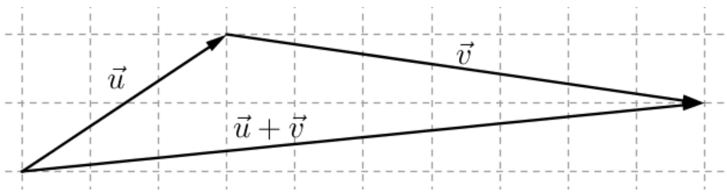
Los vectores en el plano que tienen la misma dirección son vectores **paralelos**, como $\vec{u}$ y $k \cdot \vec{u}$.
Son vectores cuyas coordenadas son proporcionales.

Los vectores en el plano que tienen distinta dirección son vectores **no paralelos**, como $\vec{v}$ y $\vec{w}$.
Son vectores de coordenadas no proporcionales.



b) Suma de vectores

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^2$, la suma de ambos es igual a otro vector $\vec{u} + \vec{v}$ que se obtiene mediante la regla conocida como **Regla del paralelogramo**: al trasladar el origen del vector $\vec{v}$ sobre el extremo del vector $\vec{u}$, el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el que tiene como origen, el origen de $\vec{u}$ y como extremo, el extremo de $\vec{v}$.

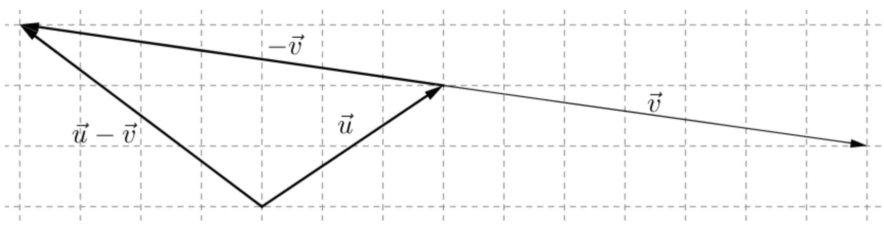


Analíticamente, dados $\vec{u} = (a,b)$ $\vec{v} = (c, d) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (a + c, b + d)$

<u>Ejemplo</u>: dados $\vec{u} = (3, 2)$, $\vec{v} = (7, -1)$, el vector suma es $\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (7, -1) = (10, 1)$

c) Resta o diferencia de vectores

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^2$, la resta de ambos es igual a otro vector $\vec{u} - \vec{v}$ que se obtiene sumándole al vector $\vec{u}$ el opuesto del vector $\vec{v}$, es decir, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.



Analíticamente, dados $\vec{u} = (a, b)$ $\vec{v} = (c, d)$ $\Rightarrow$ $\vec{u} - \vec{v} = (a - c, b - d)$

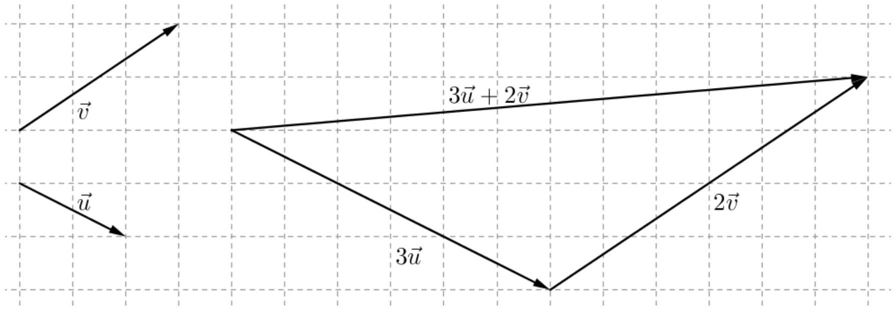
<u>Ejemplo 1</u>: dados $\vec{u} = (3, 2), \vec{v} = (7, -1)$, el vector diferencia es $\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (7, -1) = (-4, 3)$

<u>Ejemplo 2</u>: dados los vectores $\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (-2, 1), \vec{w} = (1, -4)$, el vector $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$ es:

$$\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = (1, 3) - ((-2, 1) - (1, -4)) = (1, 3) - (-3, 5) = (4, -2)$$

d) Combinación lineal de vectores

Dados $p, q \in \mathbb{R}$ y los vectores $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$, se llama **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ al vector $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v}$



Analíticamente, dados $p, q \in \mathbb{R}$, $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ $\Rightarrow$ $p \cdot \vec{u} + q \cdot \vec{v} = (p \cdot a + q \cdot c, p \cdot b + q \cdot d)$

<u>Ejemplo 1</u>: dados los vectores $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (3, 2)$, la combinación lineal $3\vec{u} + 2\vec{v}$ es el vector $3 \cdot (2, -1) + 2 \cdot (3, 2) = (6, -3) + (6, 4) = (12, 1)$

<u>Ejemplo 2</u>: dados los vectores $\vec{u} = (-1, 0), \vec{v} = (2, -1), \vec{w} = (3, 4)$, la combinación lineal $\vec{u} + 2\vec{v} - 3\vec{w}$ es el vector $(-1, 0) + 2 \cdot (2, -1) - 3 \cdot (3, 4) = (-1, 0) + (4, -2) - (9, 12) = (-6, -14)$

Base de vectores

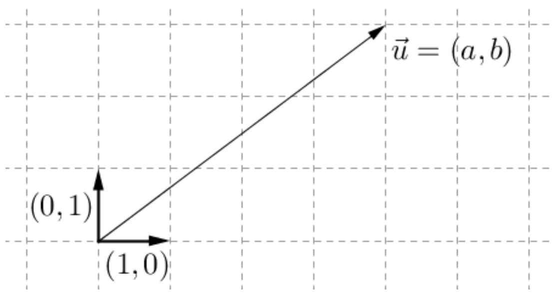
Se llama **base de vectores** del plano a una pareja $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ de vectores **no nulos linealmente independientes**. Se representa por $B = \{ \vec{u}_1, \vec{u}_2 \}$.

Si los dos vectores de una base son ortogonales (forman un ángulo de 90º), se dice que forman una **base ortogonal**. Si los dos vectores de una base, además de ortogonales, son unitarios, se dice que forman una **base ortonormal**.

Al conjunto de vectores B = { (1, 0), (0, 1) } se le llama **base canónica**.

Esta base es ortonormal porque sus vectores son ortogonales y unitarios.

La base canónica se suele utilizar para representar vectores sobre una cuadrícula.



Si un vector tiene coordenadas $\vec{u} = (a, b)$, éstas son sus **coordenadas respecto de la base canónica**, ya que $\vec{u} = a \cdot (1, 0) + b \cdot (0, 1)$

Todo vector del plano se puede expresar como combinación lineal de los vectores de una base. Dados $\vec{v} \in V^2$ y una base B = { $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ }, a los números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2$, se les llama **coordenadas del vector $\vec{v}$ respecto de la base B**, es decir, $\vec{v}_B = (x, y)$

<u>Ejemplo</u>: los vectores $\vec{u}_1 = (1, 3)$, $\vec{u}_2 = (2, 1)$ forman una base B = { $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ } ya que son l.i.

Para averiguar las coordenadas del vector $\vec{v} = (1, -7)$ respecto de la base B, hay que encontrar dos números $x, y \in \mathbb{R}$ tales que $\vec{v} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2$

$(1, -7) = x \cdot (1, 3) + y \cdot (2, 1) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{r} x + 2y = 1 \\ 3x + y = -7 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad x = -3, y = 2$ Por lo tanto, $\vec{v}_B = (-3, 2)$

3. Producto escalar de vectores.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^2$, se llama **producto escalar** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ al número real que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entendiendo como tal al menor de los dos ángulos posibles en el sentido de recorrido de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Propiedades

P1. El producto escalar del vector $\vec{0}$ por otro vector cualquiera es el número 0.

P2. Dos vectores no nulos son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0, \text{ siendo } \vec{u} \neq \vec{0}, \ \vec{v} \neq \vec{0}$$

<u>Demostración</u>: si $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Por otra parte, si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, con $\vec{u} \neq \vec{0}$, $\vec{v} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$

P3. El módulo de un vector equivale a la raíz cuadrada del producto escalar de dicho vector por sí mismo. Es decir, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$

<u>Demostración</u>: $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \cdot 1 = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$

Expresión analítica del producto escalar de dos vectores

Dados dos vectores $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (c, d)$ respecto de una base ortonormal B = { $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ }:

El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\vec{u} \bullet \vec{v} = a \cdot c + b \cdot d$

<u>Demostración</u>:

$$\begin{aligned} \vec{u} \bullet \vec{v} &= (a \cdot \vec{u}_1 + b \cdot \vec{u}_2) \bullet (c \cdot \vec{u}_1 + d \cdot \vec{u}_2) = \\ &= (a \cdot c) \cdot (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_1) + (a \cdot d) \cdot (\vec{u}_1 \bullet \vec{u}_2) + (b \cdot c) \cdot (\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_1) + (b \cdot d) \cdot (\vec{u}_2 \bullet \vec{u}_2) = \\ &= (a \cdot c) \cdot 1 + (a \cdot d) \cdot 0 + (b \cdot c) \cdot 0 + (b \cdot d) \cdot 1 = a \cdot c + b \cdot d \end{aligned}$$

<u>Ejemplo</u>: el producto escalar de $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (3, 1)$ es $\vec{u} \bullet \vec{v} = 1 \cdot 3 + (-2) \cdot 1 = 3 - 2 = 1$

Expresión analítica del coseno del ángulo formado por dos vectores

El ángulo α formado por dos vectores $\vec{u}, \vec{v}$ es $\alpha = \arccos\left(\dfrac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$

<u>Demostración</u>:

Sea α el ángulo formado por $\vec{u}, \vec{v}$. Despejando α del producto escalar se tiene que:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

<u>Ejemplo</u>: el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (1, -2)$, $\vec{v} = (1, 1)$ es

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1 \cdot 1 + (-2) \cdot 1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2}}\right) = \arccos\left(\frac{-1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 108^{\circ}$$

Obtención de un vector ortogonal (normal) a uno dado

Para obtener un vector ortogonal (normal) a uno dado, primero se cambian de orden sus coordenadas y después se cambia de signo sólo a una de las dos.

Los vectores $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{n} = (-b, a)$ son ortogonales ya que $\vec{u} \bullet \vec{n} = a \cdot (-b) + b \cdot a = -ab + ba = 0$
También son ortogonales los vectores $\vec{u} = (a, b)$ y $\vec{n} = (b, -a)$

<u>Ejemplo</u>: un vector ortogonal al vector $\vec{u} = (3, 5)$ es $\vec{n} = (-5, 3)$. También lo es $\vec{n} = (5, -3)$.

<u>4. Puntos y rectas en el plano.</u>

Una recta en el plano es un conjunto formado por infinitos puntos alineados. Una recta en el plano queda determinada de dos formas:

a) Dando **un punto** por el que pase y un vector que indique su dirección, al que se llama **vector de dirección**.

b) Dando **dos puntos** por los que pase.

Un vector de dirección de una recta es **cualquier vector paralelo a la recta**, es decir, cualquier vector que tenga la misma dirección que la recta. En un vector de dirección lo importante no es su módulo, sino la dirección que determina.

<u>Ejemplo</u>: dada la recta que pasa por P(–5, 1) y Q(–1, 3), un vector de dirección sería $\overrightarrow{PQ} = (4, 2)$
El vector $\vec{u} = (2, 1)$, paralelo al vector $\overrightarrow{PQ}$, también sería un vector de dirección de dicha recta.

Pendiente de una recta

Se llama **pendiente de una recta** a la tangente del ángulo que forma la recta con la horizontal. Se representa por m.

Si $\vec{u} = (u_1, u_2)$ es un vector de dirección de la recta, entonces $m = \operatorname{tg}\alpha = \dfrac{u_2}{u_1}$

<u>Ejemplo</u>: la recta que pasa por P(–5, 1) y Q(–1, 3) tiene como dirección la determinada por el vector $\vec{u} = (4, 2)$. Luego su pendiente es $m = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

5. Ecuaciones de una recta en el plano.

a) Ecuación vectorial $r \equiv (x, y) = (a, b) + t \cdot (u_1, u_2)\ ;\ t \in \mathbb{R}$ donde:

(x, y) son las coordenadas de un punto general de la recta (de los infinitos que tiene)

(a, b) son las coordenadas de un punto concreto de la recta

$\vec{u} = (u_1, u_2)$ es un vector de dirección de la recta

Si una recta r pasa por un punto P y tiene como vector de dirección $\vec{u}$, entonces cualquier punto obtenido mediante la **traslación** $P + t \cdot \vec{u}$ ($t \in \mathbb{R}$), también pertenece a la recta r.

Ejemplo: la recta r que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuación vectorial $r \equiv (x, y) = (-2, 5) + t \cdot (3, 1)\ ;\ t \in \mathbb{R}$

Obsérvese que haciendo variar el valor del **parámetro t**, se van obteniendo los distintos puntos que forman la recta:

Valor de t	...	t = 2	t = 1	t = 0	t = –1	t = –2	...
Punto	...	(4, 7)	(1, 6)	(–2, 5)	(–5, 4)	(–8, 3)	...

Igualmente, obsérvese que una recta tiene tantos puntos como valores diferentes puede tomar el parámetro $t \in \mathbb{R}$. Por lo tanto, la recta está formada por infinitos puntos alineados.

b) Ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = a + t \cdot u_1 \\ y = b + t \cdot u_2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

Se obtienen de la ecuación vectorial al igualar las coordenadas.

Ejemplo: la recta r que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuaciones paramétricas $r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 5 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

c) Ecuación en forma continua $r \equiv \dfrac{x - a}{u_1} = \dfrac{y - b}{u_2}$

Se obtiene de las ecuaciones paramétricas despejando el parámetro t en cada una de ellas e igualando las expresiones resultantes.

Ejemplo: la recta r que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuación en forma continua $r \equiv \dfrac{x + 2}{3} = \dfrac{y - 5}{1}$

d) Ecuación general o implícita $r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad A, B, C \in \mathbb{R}$

Se obtiene de la ecuación en forma continua efectuando los productos cruzados y dejando todos los términos a un lado del signo igual.

Ejemplo: la recta r que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuación general $r \equiv x - 3y + 17 = 0$

$$\frac{x + 2}{3} = \frac{y - 5}{1} \quad \Rightarrow \quad 1 \cdot (x + 2) = 3 \cdot (y - 5) \quad \Rightarrow \quad x + 2 = 3y - 15 \quad \Rightarrow \quad x - 3y + 17 = 0$$

Información que se puede extraer de la ecuación general $Ax + By + C = 0$

1. De la ecuación general se puede obtener **un vector de dirección de la recta**: $\vec{v} = (-B, A)$

Demostración:

$$\frac{x-a}{u_1} = \frac{y-b}{u_2} \Rightarrow u_2 \cdot (x-a) = u_1 \cdot (y-b) \Rightarrow u_2 \cdot x - u_1 \cdot y - a \cdot u_2 + b \cdot u_1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A = u_2 \,, B = -u_1 \Rightarrow (u_1, u_2) = (-B, A)$$

Ejemplo: la recta de ecuación $r \equiv x - 3y + 17 = 0$ tiene como vector de dirección $\vec{u} = (3, 1)$

2. De la ecuación general se puede obtener **un vector normal a la recta**: $\vec{n} = (A, B)$

Demostración: el vector $\vec{n} = (A, B)$ es ortogonal al vector de dirección $\vec{v} = (-B, A)$ ya que su producto escalar es cero: $\vec{u} \bullet \vec{v} = A \cdot (-B) + B \cdot A = -AB + BA = 0$

Ejemplo: la recta de ecuación $r \equiv x - 3y + 17 = 0$ tiene como vector normal $\vec{n} = (1, -3)$

e) Ecuación explícita $y = mx + n \quad m, n \in \mathbb{R}$

Se obtiene de la ecuación general despejando la coordenada **y**.
m es la pendiente de la recta **n** es la ordenada en el origen

Ejemplo: la recta que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuación explícita $y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-5}{1} \Rightarrow x + 2 = 3y - 15 \Rightarrow x - 3y + 17 = 0 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{17}{3}$$

f) Ecuación punto – pendiente $y - b = m \cdot (x - a)$ donde:

(a, b) son las coordenadas de un punto concreto de la recta **m** es la pendiente de la recta

Ejemplo: la recta que pasa por el punto P(–2, 5) y cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (3, 1)$ tiene como ecuación punto – pendiente $y - 5 = \frac{1}{3} \cdot (x + 2)$ ya que $m = \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{3}$

Un **haz de rectas secantes** en el plano es el conjunto de todas las rectas que pasan por un punto dado P(a, b). Su ecuación es $y - b = m \cdot (x - a) \,;\, m \in \mathbb{R}$

Al variar m, manteniendo fijo el punto P, se obtienen las infinitas rectas que pasan por P.

Ejemplo: la ecuación del haz de rectas que pasan por P(1, 3) es $y - 3 = m \cdot (x - 1) \,;\, m \in \mathbb{R}$

6. Ángulo formado por dos rectas.

Si dos rectas se cortan en un punto, se forman cuatro ángulos iguales dos a dos. Se llama ángulo formado por dichas rectas a uno de los dos ángulos menores posibles.

Si $\vec{u}$, $\vec{v}$ son las direccciones de dos rectas **r** y **s** respectivamente, entonces el ángulo α formado por dichas rectas es el ángulo formado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Para hallar dicho ángulo, hay que despejar α en la expresión $\cos\alpha = \dfrac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$

Ejemplo: para hallar el ángulo formado por las rectas $r \equiv 2x - 5y + 1 = 0$, $s \equiv 4x - 3y - 5 = 0$ se deducen primero sus vectores directores: $\vec{u} = (5, 2)$, $\vec{v} = (3, 4)$ y a continuación se calcula

$$\cos\alpha = \frac{|5 \cdot 3 + 2 \cdot 4|}{\sqrt{5^2 + 2^2} \cdot \sqrt{3^2 + 4^2}} \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{23}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{25}} \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 31^{\circ}$$

A) Rectas paralelas

■ Si los respectivos vectores directores de dos rectas tienen la misma dirección (sus coordenadas son proporcionales), entonces las rectas son paralelas (o iguales).

Demostración: si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección, entonces tienen que ser de la forma $\vec{u} = (a, b)$, $\vec{v} = (ka, kb)$

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \bullet \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|ka^2 + kb^2|}{\sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{k^2a^2 + k^2b^2}} = \frac{|k| \cdot (a^2 + b^2)}{\sqrt{k^2} \cdot (a^2 + b^2)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 0^{\circ} \quad \Rightarrow \quad r \parallel s \ \text{paralelas}$$

Ejemplo: las rectas $r \equiv 3x - 5y + 1 = 0$, $s \equiv 6x - 10y - 5 = 0$ son paralelas ya que sus vectores de dirección son $\vec{u} = (5, 3)$ y $\vec{v} = (10, 6)$, respectivamente, que expresan la misma dirección.

■ Si dos rectas tienen la misma pendiente, entonces son paralelas (o iguales).

Demostración: sean $\vec{u} = (u_1, u_2)$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ los vectores directores de ambas rectas, respectivamente. Si tienen la misma pendiente, entonces $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_2}{v_1}$

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{v_2}{v_1} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_2}{v_2} = \frac{u_1}{v_1} = k \quad \Rightarrow \quad (u_1, u_2) = k \cdot (v_1, v_2) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \parallel \vec{v}$$

Ejemplo: las rectas $r \equiv y = 3x - 1$, $s \equiv y = 3x + 1$ son paralelas ya que ambas tienen pendiente 3.

B) Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares si y solo si el producto escalar de sus respectivos vectores directores es cero, o lo que es lo mismo: sus vectores de dirección forman un ángulo recto.

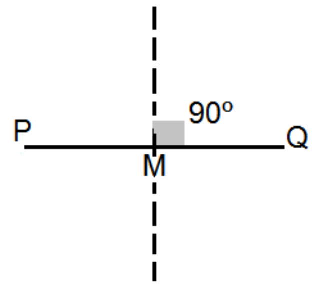
$\vec{u}$, $\vec{v}$ vectores directores de r y s, respectivamente: $\qquad r \perp s \iff \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Ejemplo: las rectas $r \equiv 3x - 5y + 1 = 0$, $s \equiv 10x + 6y - 7 = 0$ son perpendiculares ya que sus direcciones son $\vec{u} = (5, 3)$ y $\vec{v} = (-6, 10)$, respectivamente, cuyo producto escalar es cero.

C) Mediatriz de un segmento

La mediatriz de un segmento es la recta perpendicular al segmento que pasa por su punto medio.

Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento, es decir, cualquier punto de la mediatriz se encuentra a la misma distancia de P que de Q.



Para determinar la mediatriz, es necesario calcular el punto medio entre los extremos del segmento.

Dados dos puntos P(a, b) y Q(c, d), el punto medio M del segmento $\overline{PQ}$ es $M\left(\frac{a+c}{2}, \frac{b+d}{2}\right)$

Ejemplo: para calcular la recta mediatriz del segmento de extremos P(1, –2) y Q(9, 4), primero se calcula el punto medio entre P y Q, que es M(5, 1)

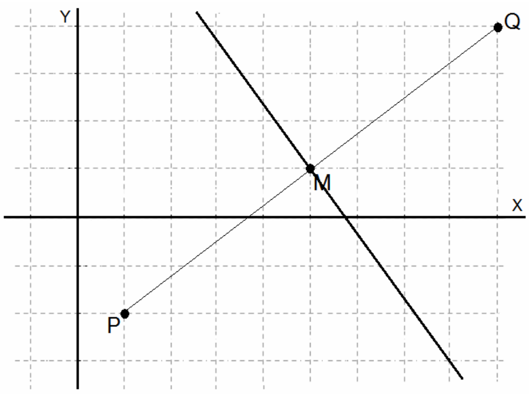
$$M\left(\frac{1+9}{2}, \frac{2+4)}{2}\right) \quad M(5,1)$$

Se calcula el vector $\overrightarrow{PQ} = (8, 6)$

La dirección de la mediatriz debe formar un ángulo de 90º con el vector $\overrightarrow{PQ}$, por lo tanto, dicha dirección es la del vector $\vec{u} = (-6, 8)$

Finalmente, la mediatriz es $r \equiv \frac{x-5}{-6} = \frac{y-1}{8}$

$\Rightarrow \; r \equiv 8x + 6y - 46 = 0 \quad \Rightarrow \; r \equiv 4x + 3y - 23 = 0$



7. Posición relativa de dos rectas.

Analizar la posición relativa de dos rectas consiste en averiguar si son secantes, paralelas o son la misma recta.

Dadas las rectas $r \equiv Ax + By + C = 0 \qquad s \equiv A'x + B'y + C' = 0$ pueden darse tres casos:

Caso 1. Si $\frac{A}{A'} \neq \frac{B}{B'}$ entonces las rectas son **secantes**. Las coordenadas del punto de corte vienen dadas por la única solución del sistema.

Ejemplo: las rectas $r \equiv x + y - 4 = 0$, $s \equiv 3x + 2y - 11 = 0$ son secantes ya que $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{2}$

El punto de corte es P(3, 1) ya que la solución del sistema $\begin{cases} x + y - 4 = 0 \\ 3x + 2y - 11 = 0 \end{cases}$ es { x = 3, y = 1 }

Caso 2. Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} \neq \frac{C}{C'}$ entonces las rectas son **paralelas**. No tienen ningún punto en común.

Ejemplo: las rectas $r \equiv x - 2y - 5 = 0$, $s \equiv 2x - 4y - 3 = 0$ son paralelas ya que $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-5}{-3}$

Un **haz de rectas paralelas** en el plano es el conjunto de todas las rectas paralelas a una recta dada $r \equiv Ax + By + C = 0$. Su ecuación es $Ax + By + k = 0;\ k \in \mathbb{R}$

Al variar k, manteniendo fijos los valores A y B, se obtienen las infinitas rectas paralelas a las recta r.

Ejemplo: la ecuación del haz de rectas paralelas a $r \equiv 4x + 3y - 5 = 0$ es $4x + 3y + k = 0;\ k \in \mathbb{R}$

Si de entre todas ellas, se desea hallar la que pasa por un determinado punto, por ejemplo, el punto P(1, 2), se sustituyen x = 1, y = 2 en $4x + 3y + k = 0$ y luego se despeja el parámetro k:

$$4 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + k = 0 \quad \Rightarrow \quad k = -10$$

Luego la recta que pasa por el punto P(1, 2) y es paralela a $r \equiv 4x + 3y - 5 = 0$ es la recta $4x + 3y - 10 = 0$

Caso 3. Si $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ entonces son **la misma recta**. Se tocan en todos los puntos, cuyas coordenadas vienen dadas por las infinitas soluciones del sistema.

Ejemplo: las rectas $r \equiv x + 2y + 5 = 0$, $s \equiv 3x + 6y + 15 = 0$ son la misma recta ya que $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15}$

8. Distancias en el plano.

A) Distancia entre dos puntos

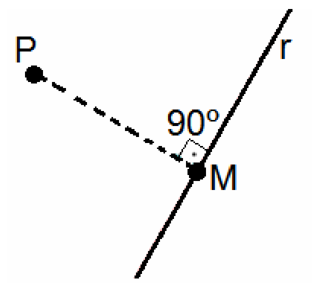
Dados dos puntos P(a, b), Q(c, d), la distancia entre P y Q es el módulo del vector $\overrightarrow{PQ}$.

$$d(P, Q) = \left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(c-a)^2 + (d-b)^2}$$

Ejemplo: la distancia entre P(2, 5) y Q(6, 8) es $d(P, Q) = \sqrt{(6-2)^2 + (8-5)^2} = \sqrt{16+9} = 5$ u.

B) Distancia entre un punto y una recta

La distancia entre un punto P y una recta r es por definición, la distancia entre P y M, donde el punto M es la proyección ortogonal de P sobre la recta r (se dice que M es el pie de la perpendicular a la recta r trazada desde P).



Analíticamente, dados $r \equiv Ax + By + C = 0$, P(a, b), entonces:

$$d(P, r) = \frac{|A \cdot a + B \cdot b + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejemplo: la distancia entre el punto P(–1, 2) y la recta $r \equiv 3x + 4y - 12 = 0$ es

$$d(P, r) = \frac{|3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 - 12|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4 \text{ u.}$$

C) Distancia entre dos rectas

Se pueden presentar dos casos:

a) Si dos rectas r y s son secantes o la misma recta, entonces la distancia es cero: d(r, s) = 0

b) Si dos rectas r y s son paralelas, la distancia entre ambas es la distancia de un punto P de una de ellas a la otra recta: d(r, s) = d(P, s) donde $P \in r$

Ejemplo: las rectas $r \equiv x - 2y - 5 = 0$, $s \equiv 2x - 4y - 3 = 0$ son paralelas ya que $\frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \neq \frac{-5}{-3}$

Se elige un punto cualquiera de la recta r, por ejemplo el punto P(1, –2)

$$d(r, s) = d(P, s) = \frac{|2 \cdot 1 - 4 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{7}{\sqrt{20}} \cong 1{,}57 \text{ u.}$$