



ACTIVIDADES

1. Unidad imaginaria. Número complejo.

1. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones: a) $x^2 - 4x + 13 = 0$ b) $2x^2 + 32 = 0$
2. Expresar en forma binómica el resultado de las siguientes operaciones:
a) $\sqrt{3} - \sqrt{-49}$ b) $\sqrt{9} + \sqrt{-9}$ c) $7 + \sqrt{-\frac{9}{25}}$ d) $3 + \sqrt{-\pi}$ e) $\sqrt{-16} + \sqrt{\frac{25}{4}}$
3. Hallar el valor de k para que los siguientes números complejos sean imaginarios puros:
a) $-3i + k$ b) $\sqrt{2}k - 1 + 6i$ c) $4k + \frac{5}{8} - i$
4. Hallar el valor de k para que los siguientes números complejos sean números reales:
a) $(k+1)i - 6$ b) $\frac{k}{10} + \frac{3k}{4}i$ c) $10 - ki - 2i$

2. Operaciones en forma binómica.

5. Calcular el número $z = i^{327} - \frac{1}{i} + \frac{i^{125}}{1-i}$ expresando el resultado en forma binómica.
6. Calcular los siguientes números complejos, expresando el resultado en forma binómica:
a) $z = \frac{(1-i)^2 \cdot i}{2+i}$ b) $z = 5 + 3i - \frac{5+i}{3-2i}$ c) $z = \frac{5}{1-2i} + \frac{(3+i) \cdot (1-3i)}{4}$
7. En cada uno de los siguientes casos, calcular el valor de m y n para que:
a) $(2+5i) \cdot (m+3i) = n+4i$ b) $\frac{3m-9i}{3m+ni} = 5+4i$
8. Averiguar dos números complejos z y ω sabiendo que:
a) $z + \omega = 4 + 2i$ b) La parte real de z es 3 c) $\frac{z}{\omega}$ es imaginario puro
9. Calcular el valor de x para que $\left(\frac{x+i}{2+i}\right) : \left(\frac{2+3i}{1+i}\right) = \frac{4+6i}{1+8i}$
10. Demostrar que si el número $z = \frac{a+bi}{c+di}$ es imaginario puro, entonces $\frac{a}{d} + \frac{b}{c} = 0$

3. Representación gráfica.

11. En cada uno de los siguientes casos, representar el afijo del número complejo z , el de su opuesto $-z$ y el de su conjugado $\bar{z}$:

- a) $z = 4 + 3i$ b) $z = 3 - 5i$ c) $z = 4i$ d) $z = 4$

12. Dados los siguientes números complejos, representar sus afijos e interpretar el resultado:

- a) $z_1 = 1 + i$ b) $z_2 = i \cdot z_1$ c) $z_3 = i \cdot z_2$ d) $z_4 = i \cdot z_3$

4. Forma polar y forma trigonométrica.

13. Expresar en forma polar los siguientes números complejos:

- a) $z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$ b) $z = \sqrt{3} + i$ c) $z = 1 - \sqrt{3}i$ d) $z = 1 + i$
e) $z = -1 - i$ f) $z = 4i$ g) $z = -2i$ h) $z = 3$

14. Expresar en forma binómica los siguientes números complejos:

- a) $z = (4, 135^\circ)$ b) $z = (2, 180^\circ)$ c) $z = (2, 225^\circ)$ d) $z = (4, 30^\circ)$
e) $z = (3, 30^\circ)$ f) $z = (4, 60^\circ)$ g) $z = (2, 45^\circ)$ h) $z = (1, 270^\circ)$

15. Dado el número complejo $z = 3 + 4i$, calcular: a) $\omega = |z| \cdot z + \frac{z}{|z|}$ b) $\omega = \frac{z + \bar{z}}{|z|}$

16. Dado el número complejo $z = (5, 30^\circ)$, expresar los números z y $-\bar{z}$ en forma binómica.

17. Dado el número complejo $z = \frac{-x + i}{2 - i}$, calcular el valor de x para que $|z| = 2$

5. Operaciones en forma polar.

18. Realizar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica:

- a) $(4, 120^\circ) \cdot (2, 60^\circ)$ b) $(4, 45^\circ) \cdot (1, 15^\circ)$ c) $(1, 30^\circ) \cdot (3, 60^\circ)$

19. Dados los números complejos $z = 1 - i$, $\omega = 6i$, realizar las siguientes operaciones en forma polar: a) $z \cdot \omega$ b) $\frac{z}{\omega}$

20. Expresar en forma polar el número complejo resultado de la operación:

$$z = (1, 0^\circ) + (2, 90^\circ) + (3, 180^\circ) + (4, 270^\circ)$$

21. Dados los números complejos $z = (3, 30^\circ)$, $\omega = (4, 60^\circ)$, realizar las siguientes operaciones, expresando el resultado en forma binómica: a) $z + \omega$ b) $z \cdot \omega$ c) $\frac{z}{\omega}$

22. Sin calcular el cociente, averiguar el valor de x para que el módulo del cociente $\frac{1+3i}{1+xi}$ sea igual a $\sqrt{5}$.

23. Hallar los valores de los ángulos α y β pertenecientes al primer cuadrante, sabiendo que son complementarios y que $\frac{(10, \alpha)}{(4, \beta)} = \left(\frac{5}{2}, 20^\circ\right)$

24. En cada uno de los siguientes casos, calcular las siguientes potencias, dando el resultado en forma binómica. Sugerencia: utilizar la forma polar.

a) $(2 - 2\sqrt{3}i)^5$ b) $(1 + i)^6$ c) $\frac{(5i)^3}{(1-i)^4} - \left(\frac{1}{i}\right)^{-2}$ d) $\frac{(\sqrt{3} - \sqrt{3}i)^{-3}}{2i}$

25. Hallar el valor de x para que el módulo de $(x + i)^6$ sea igual a 1 000.

6. Raíces de un número complejo.

26. Calcular las raíces cúbicas de los siguientes números complejos:

a) $z = 2 - 2i$ b) $z = -8 + 0i$ c) $z = 4\sqrt{3} + 4i$ d) $z = \frac{32}{-i}$ e) $z = \frac{1+i}{2-i}$

27. Calcular las raíces cuartas de $z = -4 + 0i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

28. Calcular las raíces quintas de $z = -7i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

29. Calcular las raíces sextas de $z = -1 + 0i$ y representar el polígono formado por sus afijos.

30. Resolver en $\mathbb{C}$ las siguientes ecuaciones, dando las soluciones en forma polar:

a) $z^3 - 8 = 0$ b) $z^3 + 7 = 0$ c) $z^5 + 32 = 0$ d) $z^4 + 1 = 0$

SOLUCIONES

1. a) $x_1 = 2 + 3i$, $x_2 = 2 - 3i$; b) $x_1 = 4i$, $x_2 = -4i$

2. a) $\sqrt{3} - 7i$; b) $3 + 3i$; c) $7 + \frac{3}{5}i$; d) $3 + \sqrt{\pi}i$; e) $\frac{5}{2} + 4i$

3. a) $k = 0$; b) $k = \frac{\sqrt{2}}{2}$; c) $k = -\frac{5}{32}$

4. a) $k = -1$; b) $k = 0$; c) $k = -2$

5. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

6. a) $z = \frac{4}{5} - \frac{2}{5}i$; b) $z = 4 + 2i$; c) $z = \frac{5}{2}$

7. a) $m = -\frac{2}{5}$, $n = -\frac{79}{5}$; b) $m = -\frac{1}{3}$, $n = -1$

8. Dos soluciones: $\{z = 3 - i, \omega = 1 + 3i\}$, $\{z = 3 + 3i, \omega = 1 - i\}$

9. El valor es $x = 5$

10.

11.

12. a) $z_1 = 1 + i$; b) $z_2 = -1 + i$; c) $z_3 = -1 - i$; d) $z_4 = 1 - i$

13. a) $z = (1, 315^\circ)$; b) $z = (2, 30^\circ)$; c) $z = (2, 300^\circ)$; d) $z = (\sqrt{2}, 45^\circ)$; e) $z = (\sqrt{2}, 225^\circ)$; f) $z = (4, 90^\circ)$; g) $z = (2, 270^\circ)$; h) $z = (3, 0^\circ)$

14. a) $z = -2\sqrt{2} + 2\sqrt{2}i$; b) $z = -2$; c) $z = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i$; d) $z = 2\sqrt{3} + 2i$; e) $z = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i$; f) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; g) $z = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$; h) $z = -i$

15. a) $\omega = \frac{78}{5} + \frac{104}{5}i$; b) $\omega = \frac{6}{5}$

16. $z = \frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$; b) $-\bar{z} = -\frac{5\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i$

17. Los valores de x son $x_1 = \sqrt{19}$, $x_2 = -\sqrt{19}$

18. a) $-8 + 0i$; b) $z = 2 + 2\sqrt{3}i$; c) $z = 0 + 3i$

19. a) $z \cdot \omega = (6\sqrt{2}, 45^\circ)$; b) $\frac{z}{\omega} = \left(\frac{\sqrt{2}}{6}, 225^\circ\right)$

20. $z = (2\sqrt{2}, 225^\circ)$

21. a) $z + \omega = \frac{4 + 3\sqrt{3}}{2} + \frac{3 + 4\sqrt{3}}{2}i$; b) $z \cdot \omega = 0 + 12i$; c) $\frac{z}{\omega} = \frac{3\sqrt{3}}{8} - \frac{3}{8}i$

22. Los valores de x son $x_1 = 1$, $x_2 = -1$

23. $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 35^\circ$

24. a) $512 + 512\sqrt{3}i$; b) $-8i$; c) $1 + \frac{125}{4}i$; d) $\frac{\sqrt{3}}{72} + \frac{\sqrt{3}}{72}i$

25. Los valores de x son $x_1 = 3$, $x_2 = -3$

26. a) $(\sqrt[6]{8}, 105^\circ)$ $(\sqrt[6]{8}, 225^\circ)$ $(\sqrt[6]{8}, 345^\circ)$; b) $(2, 60^\circ)$ $(2, 180^\circ)$ $(2, 300^\circ)$; c) $(2, 10^\circ)$ $(2, 130^\circ)$ $(2, 250^\circ)$; d) $(2\sqrt[3]{4}, 30^\circ)$ $(2\sqrt[3]{4}, 150^\circ)$ $(2\sqrt[3]{4}, 270^\circ)$; e) $(\sqrt[6]{250}, 25^\circ)$ $(\sqrt[6]{250}, 145^\circ)$ $(\sqrt[6]{250}, 265^\circ)$

27. $(\sqrt{2}, 45^\circ)$ $(\sqrt{2}, 135^\circ)$ $(\sqrt{2}, 225^\circ)$ $(\sqrt{2}, 315^\circ)$

28. $(\sqrt[5]{7}, 54^\circ)$ $(\sqrt[5]{7}, 126^\circ)$ $(\sqrt[5]{7}, 198^\circ)$ $(\sqrt[5]{7}, 270^\circ)$ $(\sqrt[5]{7}, 342^\circ)$

29. $(1, 30^\circ)$ $(1, 90^\circ)$ $(1, 150^\circ)$ $(1, 210^\circ)$ $(1, 270^\circ)$ $(1, 330^\circ)$

30. a) $z_1 = (2, 0^\circ)$, $z_2 = (2, 120^\circ)$, $z_3 = (2, 240^\circ)$; b) $z_1 = (\sqrt[3]{7}, 60^\circ)$, $z_2 = (\sqrt[3]{7}, 180^\circ)$, $z_3 = (\sqrt[3]{7}, 300^\circ)$; c) $z_1 = (2, 36^\circ)$, $z_2 = (2, 108^\circ)$, $z_3 = (2, 180^\circ)$, $z_4 = (2, 252^\circ)$, $z_5 = (2, 324^\circ)$; d) $z_1 = (1, 45^\circ)$, $z_2 = (1, 135^\circ)$, $z_3 = (1, 225^\circ)$, $z_4 = (1, 315^\circ)$