

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS I DE 1º BACHILLERATO.

UNIDAD 9. NÚMEROS COMPLEJOS.



1. Unidad imaginaria. Número complejo.

Al intentar resolver la ecuación de segundo grado $x^2 + 1 = 0$ se obtiene $x^2 = -1$. Como no existe ningún número real cuyo cuadrado sea negativo, se dice que la ecuación $x^2 + 1 = 0$ no tiene soluciones reales o que no tiene solución en \mathbb{R} .

Los números complejos aparecen por la necesidad de dar solución a ecuaciones que, como la anterior, no tienen solución dentro del conjunto de los números reales.

Se denomina **unidad imaginaria** a la expresión $\sqrt{-1}$ y se representa por i .

$$i = \sqrt{-1} \quad i^2 = -1$$

Se llama **número complejo** a una expresión de la forma $a + bi$, donde $a, b \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$

Los números complejos se suelen representar con las letras z, ω, \dots . Como se verá más adelante, un número complejo puede expresarse de tres formas distintas.

La forma $a + bi$ se llama **forma binómica** del número complejo. En ella, al primer número se le llama **parte real** y al segundo número se le llama **parte imaginaria**.

$$z = a + bi \quad a = \text{parte real} \quad b = \text{parte imaginaria} \quad i = \text{unidad imaginaria}$$

Ejemplo: en la ecuación $x^2 - x + 1 = 0$, los coeficientes son $a = 1, b = -1, c = 1$.

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot \sqrt{-1}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3} \cdot i}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{1 + \sqrt{3} \cdot i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \\ x_2 = \frac{1 - \sqrt{3} \cdot i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i \end{cases}$$

Así pues, se dice que esta ecuación tiene dos soluciones, que son los números complejos

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

El **conjunto de los números complejos** se representa por \mathbb{C} . $\mathbb{C} = \{ a+bi / a, b \in \mathbb{R}, i = \sqrt{-1} \}$

De esta forma, todo número real es un número complejo con parte imaginaria nula. Es decir, si $b = 0$, entonces el número "solo tiene parte real". De ahí que el conjunto de los números reales esté incluido en el conjunto de los números complejos, es decir, \mathbb{R} es un **subconjunto de \mathbb{C}** .

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Se llama número complejo **imaginario puro** a todo aquel cuya parte real es cero, es decir, los números de la forma $0 + bi$.

Dos **números complejos** son **iguales** si y solo si son iguales sus partes reales y sus partes imaginarias, respectivamente: $a + bi = c + di \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$

Se llama **opuesto** del número complejo $z = a + bi$ al número $-z = a - bi$

Se llama **conjugado** del número complejo $z = a + bi$ al número $\bar{z} = a - bi$

2. Operaciones en forma binómica.

Dados los números complejos $z = a + bi$, $\omega = c + di$, se definen las siguientes operaciones:

a) Suma: $z + \omega = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

b) Diferencia: $z - \omega = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

c) Producto: $z \cdot \omega = (a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (bc + ad)i$

d) Cociente: $\frac{z}{\omega} = \frac{z \cdot \bar{\omega}}{\omega \cdot \bar{\omega}} = \frac{(a + bi) \cdot (c - di)}{(c + di) \cdot (c - di)} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}i$

Ejemplo: $z = 2 - 5i$ $\omega = 1 + 3i$

a) $z + \omega = (2 - 5i) + (1 + 3i) = 3 - 2i$

b) $z - \omega = (2 - 5i) - (1 + 3i) = 1 - 8i$

c) $z \cdot \omega = (2 - 5i) \cdot (1 + 3i) = (2 \cdot 1 - 5 \cdot 3 \cdot i^2) + (-5 \cdot 1 + 2 \cdot 3)i = (2 + 15) + (-5 + 6)i = 17 + i$

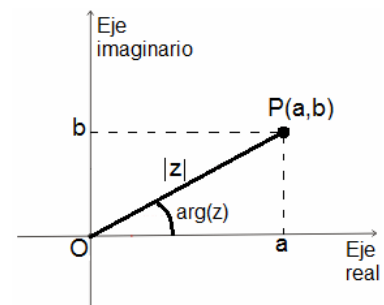
d) $\frac{z}{\omega} = \frac{z \cdot \bar{\omega}}{\omega \cdot \bar{\omega}} = \frac{(2 - 5i) \cdot (1 - 3i)}{(1 + 3i) \cdot (1 - 3i)} = \frac{(2 - 15) + (-5 - 6)i}{1^2 - (3i)^2} = \frac{-13 - 11i}{1 - (-9)} = -\frac{13}{10} - \frac{11}{10}i$

3. Representación gráfica.

Dado un sistema de coordenadas cartesiano en el plano, la representación gráfica de un número complejo $z = a + bi$ consiste en identificarlo con el punto de coordenadas (a, b) .

Al punto $P(a, b)$ asociado al número complejo $z = a + bi$ se le llama **afijo** de z .

A los ejes de coordenadas se les llama **eje real** (horizontal) y **eje imaginario** (vertical), respectivamente.



Se llama **módulo** de z al módulo del vector \overline{OP} . Se representa por $|z|$.

Se llama **argumento** de z al ángulo que forma el semieje real positivo con el vector \overline{OP} . Se representa por **arg(z)**.

Un número complejo admite infinitos argumentos ya que si $\arg(z)$ es argumento de un número, también lo son todos los ángulos de la forma **arg(z) + 360k**, $k \in \mathbb{Z}$.

De ahí que al argumento comprendido entre 0° y 360° se le llame **argumento principal**.

4. Forma polar y forma trigonométrica.

Dado un número complejo $z = a + bi$, se llama **forma polar** de z a la expresión $(|z|, \alpha)$ donde:

$|z|$ es el módulo de z α es un argumento de z

a) Para pasar de la forma binómica a la forma polar, se calculan las coordenadas polares:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$$

Nota: si llamamos β al resultado que ofrece la calculadora científica para $\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$, se pueden dar dos situaciones:

1) Si $\frac{b}{a}$ es positivo (β positivo), entonces hay que tomar como valor para α :

$\alpha_1 = \beta$, si el afijo de z está en el IC / $\alpha_2 = 180^\circ + \beta$, si el afijo de z está en el IIIC

2) Si $\frac{b}{a}$ es negativo (β negativo), entonces hay que tomar como valor para α :

$\alpha_1 = 180^\circ + \beta$, si el afijo de z está en el IIC / $\alpha_2 = 360^\circ + \beta$, si el afijo de z está en el IVC

Ejemplo: el número $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ en forma polar se expresa como $z = (4, 120^\circ)$ ya que:

$$|z| = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = \sqrt{16} = 4$$

$$\alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\sqrt{3}}{-2}\right) = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = 120^\circ \text{ porque el afijo de } z \text{ está en el IIC } [180^\circ - 60^\circ]$$

b) Para pasar de la forma polar a la forma binómica, se calculan las partes real e imaginaria:

$$a = r \cdot \cos \alpha \quad b = r \cdot \operatorname{sen} \alpha$$

Ejemplo: el número $z = (5, 225^\circ)$ en forma binómica es $z = -\frac{5\sqrt{2}}{2} - \frac{5\sqrt{2}}{2}i$ ya que:

$$a = 5 \cdot \cos 225^\circ = 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad b = 5 \cdot \operatorname{sen} 225^\circ = 5 \cdot \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

Dado un número complejo $z = (|z|, \alpha)$, se llama **forma trigonométrica** de z a la expresión

$$z = |z| \cdot (\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)$$

Ejemplo: la forma trigonométrica del número $z = (5, 225^\circ)$ es $z = 5 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$

5. Operaciones en forma polar.

Dados los números complejos $z = (|z|, \alpha)$ $\omega = (|\omega|, \beta)$, se definen las siguientes operaciones:

a) Producto: $z \cdot \omega = (|z| \cdot |\omega|, \alpha + \beta)$ Ejemplo: $(2, 30^\circ) \cdot (4, 120^\circ) = (8, 150^\circ)$

b) Cociente: $\frac{z}{\omega} = \left(\left(\frac{|z|}{|\omega|} \right), \alpha - \beta \right)$ Ejemplo: $(6, 225^\circ) \cdot (2, 90^\circ) = (3, 135^\circ)$

c) Potencia: $z^n = (|z|^n, n \cdot \alpha)$ Ejemplo: $(2, 30^\circ)^8 = (256, 240^\circ)$

Fórmula de De Moivre: $(\cos \alpha + i \cdot \operatorname{sen} \alpha)^n = \cos(n\alpha) + i \cdot \operatorname{sen}(n\alpha)$

6. Raíces de un número complejo.

Dado un número complejo $z = (|z|, \alpha)$, éste tiene n raíces enésimas ($n \geq 2$), cada una de las cuales tiene módulo $\sqrt[n]{|z|}$ y argumentos:

$$\beta_1 = \frac{\alpha}{n}, \beta_2 = \frac{\alpha + 360^\circ}{n}, \beta_3 = \frac{\alpha + 720^\circ}{n}, \dots, \beta_n = \frac{\alpha + (n-1) \cdot 360^\circ}{n}$$

Interpretación geométrica

Los afijos de las n raíces enésimas de un número complejo son los vértices de un polígono regular de n lados centrado en el origen de coordenadas.

Ejemplo: para hallar las raíces cuartas del número $z = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, se hace lo siguiente:

Todas tienen módulo $\sqrt[4]{\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2}} = \sqrt[4]{\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}}} = \sqrt[4]{\sqrt{1}} = \sqrt[4]{1} = 1$

Como $\arg(z) = \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = 240^\circ$, los argumentos de las raíces

cuartas son: $\beta_1 = \frac{240^\circ}{4} = 60^\circ$ $\beta_2 = \frac{600^\circ}{4} = 150^\circ$ $\beta_3 = \frac{960^\circ}{4} = 240^\circ$ $\beta_4 = \frac{1320^\circ}{4} = 330^\circ$

Por lo tanto, las cuatro raíces cuartas de z son los números: $(1, 60^\circ)$ $(1, 150^\circ)$ $(1, 240^\circ)$ $(1, 330^\circ)$

Los afijos de estos cuatro números son los vértices de un cuadrado con centro en el origen.