DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 1. ANÁLISIS DE FUNCIONES.

IES LA BAHIA

ACTIVIDADES

1. Rectas tangente y normal a una gráfica en un punto.

1. Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la gráfica de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2-2}$ en $x = 1$ b) $f(x)=(x^2+2x+2)^3$ en $x = 0$ c) $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen}x}{2-\cos x}$ en $x=\dfrac{\pi}{3}$

d) $f(x)=x\cdot e^x$ en $x = 1$ e) $f(x)=\operatorname{sen}^2(2x)$ en $x=\dfrac{3\pi}{4}$ f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2}$ en $x = 1$

g) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{-7x}{2}+x^2 & \text{si } 0\le x<2\\ -4+\sqrt{x-1} & \text{si } 2\le x\le 5\end{cases}$ en $x = 2$ h) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3}+5 & \text{si } 0\le x<3\\ -x^2+8x-7 & \text{si } 3\le x\le 4\end{cases}$ en $x = 3$

2. Hallar el punto de la función $f(x)=-2x^2+2x+5$ en el que la recta tangente sea paralela a la recta de ecuación $2x-y+3=0$

3. Hallar los puntos de la función $f(x)=\dfrac{x-2}{x+2}$ en los que la recta tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante.

4. Hallar el punto de la función $f(x)=\ln x$ en el que la recta tangente tenga pendiente $1/e$ y hallar la ecuación de dicha recta.

5. Determinar un punto de la función $f(x)=\dfrac{2}{x}+\ln x^2$ en el que la recta tangente sea paralela al eje de abscisas.

6. Hallar los valores de **m** y **n** sabiendo que la recta $y=6x+m$ es tangente a la curva $f(x)=\dfrac{nx-1}{nx+1}$ en el punto de abscisa x = 0.

7. Averiguar los valores de **a**, **b** y **c** de forma que las gráficas de $f(x)=a+bx^2+x^4$ y $g(x)=c-x^3$ sean tangentes en el punto (1, 1).

8. Hallar los valores de **a** y **b** para que la gráfica de la función $f(x)=e^{ax}+b$ pase por el punto (0, –1) y que la recta tangente en dicho punto tenga ecuación $3x-y-1=0$.

2. Regla de L´Hôpital.

9. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cos x - \operatorname{sen}x}{x^3}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos(mx)-1}{\cos(nx)-1}$ c) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{1-\operatorname{tg}x}{\cos 2x}$ d) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{6}} \dfrac{\cos 3x}{1-2\operatorname{sen}x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2-x)\cdot e^x-(2+x)}{x^2}$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln x}{\cot gx}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x+\sec x-1}{\operatorname{tg}x-\sec x+1}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{\ln x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos x - e^{-2x}-2x}{\operatorname{sen}^2 x}$ j) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}x)}{(\pi-2x)^2}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\operatorname{sen}x}{x\cdot\operatorname{sen}x}$ l) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\cos(x-1)}{(\ln x)^2}$

10. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-\operatorname{sen}(\pi x/2)}{1-x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x - x}{x-\operatorname{sen}x}$ c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3^x}{x^3}$

e) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\operatorname{sen}(x-1)}{x^2-3x+2}$ f) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\ln(1+2\cos x)}{\cos x}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}x^2}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{m^x-n^x}{\operatorname{tg}x}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\ln(\operatorname{tg}x)}{\cos 2x}$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(x^3-2x)}{x}$ k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot\operatorname{sen}x}{1-\cos x}$ l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\operatorname{sen}x+\cos x)}{\operatorname{tg}x}$

11. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen}2x}{x+\operatorname{sen}3x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(mx)}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x}{x^2}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\operatorname{sen}x+\operatorname{tg}x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg}x - x - \frac{x^3}{3}}{x^3}$ f) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x}$ g) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+1}{3x+\sqrt{6x^2+3}}$ h) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{e^x}$

i) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}x - x\cos x}{x\cdot(1-\cos x)}$ j) $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{x-a}{x^n-a^n}$ k) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{12-x}}{2x-3\sqrt{19-5x}}$ l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg}5x}{\operatorname{tg}3x}$

12. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$ b) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln(\operatorname{sen}x)$ c) $\lim\limits_{x\to 1^+} (x-1)\cdot\ln(x-1)$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

e) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\cdot\ln x$ f) $\lim\limits_{x\to 0^+} \operatorname{sen}x\cdot\ln x$ g) $\lim\limits_{x\to +\infty} x\cdot\operatorname{sen}\left(\dfrac{m}{x}\right)$ h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\cdot\ln x$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg}x\cdot\ln(\operatorname{sen}x)$ j) $\lim\limits_{x\to +\infty} \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)\cdot\ln x$ k) $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right)$ l) $\lim\limits_{x\to \pi} (\pi-x)\cdot\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)$

13. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\operatorname{sen}x}-\dfrac{1}{x}$ c) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$ d) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{\ln x}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x\operatorname{sen}x}-\dfrac{1}{x^2}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}-\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen}x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{2x}-\dfrac{1}{x\cdot(e^{\pi x}+1)}$

14. En cada uno de los siguientes apartados, suponiendo que el límite dado es finito, deducir el valor de **a** y calcular el valor de dicho límite:

a) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-\sqrt{ax+6}}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-ax-e^{3x}+x\ln(x+1)}{1-\cos x}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x}-e^{-x}+ax}{x-\operatorname{sen}x}$ d) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)-a\operatorname{sen}x+x\cos 3x}{x^2}$

15. Calcular los siguientes límites:

a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x^2+1}{x^2-2x}\right)^{x+2}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\operatorname{sen}2x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}x}}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x}\right)^{\operatorname{tg}x}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^2+1)^{\frac{1}{x}}$

e) $\lim\limits_{x\to 0} (1-\cos x)^{2x}$ f) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{m^x+n^x}{2}\right)^{\frac{2}{x}}$ g) $\lim\limits_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\operatorname{tg}^2 x}}$ h) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\left(\frac{1}{1-x}\right)}$

i) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} (1-\cos x)^{\operatorname{tg}x}$ j) $\lim\limits_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}}$ k) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi x}{4}\right)\right)^{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi x}{2}\right)}$ l) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{x-(\pi/2)}}$

<u>3. Derivabilidad de una función en un punto. Derivadas laterales.</u>

16. Para cada una de las siguientes funciones, calcular el valor de **a** para que sea continua en todo su dominio, y analizar su derivabilidad para el valor de **a** obtenido:

a) $f(x)=\begin{cases} a^x-6 & \text{si} \quad x<2 \\ |x-5| & \text{si} \quad 2\le x<10 \end{cases}$ $(a>0)$ b) $f(x)=\begin{cases} x^2-4x+3 & \text{si} \quad -1<x<0 \\ \dfrac{x^2+a}{x+1} & \text{si} \quad x\ge 0 \end{cases}$

17. Hallar el valor de **a** para que $f(x)=\begin{cases} a+\ln(1+x^2) & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ sea continua en $\mathbb{R}$.

18. Considera la función continua $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} (3x-6)\,e^x & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{36(\operatorname{sen}(x)-ax)}{x^3} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$

a) Calcular el valor de **a**.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = -1$.

19. a) Hallar el valor de **a** para que $f(x)=\begin{cases} a(x-1) & \text{si} \quad x\le 1 \\ x\ln x & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ sea derivable en $\mathbb{R}$.

b) Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa $x = e$.

20. Determinar $\mathbf{k \neq 0}$ sabiendo que $f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & \text{si} \quad x\le 1 \\ \dfrac{2}{kx} & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ es derivable en su dominio.

21. Se sabe que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\begin{cases} 3x+2 & \text{si} \quad x<0 \\ x^2+2a\cos x & \text{si} \quad 0\le x<\pi \\ ax^2+b & \text{si} \quad x\ge\pi \end{cases}$ es continua.

Determinar los valores de **a** y **b** y analizar la derivabilidad de f para los valores obtenidos.

22. En cada uno de los siguientes apartados, suponiendo que la función es derivable en todo su dominio, deducir los valores de **a** y **b** :

a) $f(x)=\begin{cases} x^2-ax+2b & \text{si } x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x>0 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} e^{-x} & \text{si } x\le 0 \\ ax^2+b & \text{si } x>0 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} e^{ax-b} & \text{si } x<1 \\ 1-x\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} e^{2ax-4b} & \text{si } x<1 \\ 1-x\ln x & \text{si } x\ge 1 \end{cases}$

23. Para cada una de las siguientes funciones, escribir su expresión analítica como función definida a trozos y estudiar su continuidad y derivabilidad:

a) $f(x)=|8-x^2|$ b) $f(x)=x^2-|x|$ c) $f(x)=x+|1-\ln x|$

<u>4. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.</u>

24. Para cada una de las siguientes funciones, determinar los intervalos de monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan):

a) $f(x)=-x+\dfrac{4}{x^2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ c) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$

d) $f(x)=\dfrac{-3x^2+2}{x-1}$ e) $f(x)=e^x\cdot(x^2-3x+1)$ f) $f(x)=(2x^2-3x)\cdot e^{-x}$

25. Dada la función $f:[0,\,2\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\operatorname{sen} x}{2-\cos x}$, determinar la monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

26. Dada la función $f:(-2\pi,\,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{\cos x}{2+\cos x}$, determinar la monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan)

27. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

a) Determinar la monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Hallar la ecuación de la recta normal a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 0.

28. Dada la función $f:\mathbb{R}-\{\,2\,\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{|x|}{2-x}$

Analizar la derivabilidad de la función y determinar los intervalos de monotonía.

29. Dada la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=a\ln x+bx^2+x$, averiguar los valores de **a** y **b** sabiendo que f tiene extremos relativos en x = 1 y en x = 2, respectivamente. ¿Son máximos o mínimos? Justificar la respuesta.

30. Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, hallar los valores de **a**, **b**, **c**, **d** sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3), que tiene un punto crítico en x = 0 y que la recta tangente a la curva en el punto de abscisa x = 1 tiene por ecuación $y=-2x+2$

31. Determinar la función polinómica de grado tres, de la que se sabe que tiene un extremo relativo en el punto (0, 2) y que la tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 es la recta x + y = 3.

32. De la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx-1$ se sabe que la recta normal a su gráfica en el punto de abscisa x = 1 es $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ y que la función tiene un punto crítico en x = 2. Hallar **a**, **b**, **c**.

33. Se sabe que la función $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{e^x-e^{-x}-2x}{x-\operatorname{sen}x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ es continua, que alcanza un máximo relativo en x = –1 y que la recta tangente a su gráfica en x = –2 tiene pendiente 2. Calcular el valor de **a**, **b**, **c**.

5. Curvatura en un intervalo. Puntos de inflexión.

34. Analizar la curvatura y determinar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

a) $f(x)=(x^2-5x+6)\cdot e^x$ b) $f(x)=(1+x^2)\cdot e^{-x}$

c) $f(x)=\ln(x^2-2x+2)$ d) $f(x)=\ln\sqrt{1+x^2}$

35. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)\cdot e^x$

a) Determinar el valor de **a** sabiendo que la función tiene un punto crítico en x = 0.

b) Para a = 1, calcular los puntos de inflexión de la gráfica de f.

36. Dada la función $f:(0,2\pi)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}x+\cos x$, determinar:

a) Los intervalos de monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

b) Los intervalos de curvatura y los puntos de inflexión (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

37. De la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un extremo relativo en (0, 1) y que su gráfica tiene un punto de inflexión en (1, –1). Hallar **a**, **b**, **c**, **d**.

38. Dada la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, hallar **a**, **b**, **c**, **d** sabiendo que la ecuación de la tangente a la curva en el punto de inflexión (1, 0) es $y=-3x+3$ y que la función presenta un extremo relativo en el punto de abscisa x = 0.

39. Hallar el valor de los coeficientes **a**, **b**, **c** sabiendo que la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ tiene en x = 1 un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica de f pasa por el punto (1, 1).

40. La función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tiene un punto de inflexión en (–1, 3) y la tangente a su gráfica en el punto (0, 1) es horizontal. Hallar los valores de **a**, **b**, **c**, **d**.

41. Dada la función $f(x)=x\cdot(ax^2+bx+c)$, hallar los valores de **a**, **b**, **c** sabiendo que su gráfica tiene un punto de inflexión en (–2, 12) y que la tangente a la gráfica en dicho punto tiene por ecuación $10x+y+8=0$

42. De la función $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ se sabe que tiene un máximo local en x = −1, que su gráfica corta al eje OX en el punto de abscisa x = −2, que tiene un punto de inflexión en el punto de abscisa x = 0 y que la recta tangente a la gráfica en el punto de abscisa x = 2 tiene pendiente 9. Hallar los valores de **a**, **b**, **c**, **d**.

43. Dada la función $f(x)=x^3+3x^2+mx+7$, hallar el valor de **m** para que en su punto de inflexión, la recta tangente a la gráfica forme un ángulo de 45º con el eje X.

6. Ramas parabólicas y asíntotas de una función.

44. Para cada una de las siguientes funciones, determinar sus asíntotas, justificando adecuadamente la respuesta:

a) $f(x)=\dfrac{x^2+3x+4}{2x+2}$ b) $f(x)=\dfrac{x^2-2x-3}{x^2-1}$ c) $f(x)=-x+\dfrac{4}{x^2}$

45. Se sabe que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en x = 1, una asíntota oblicua de pendiente 2 y un extremo local en el punto de abscisa x = 3. Averiguar los valores de **a**, **b**, **c**.

46. De la función $f(x)=\dfrac{x^3}{ax^2+bx+c}$ se sabe que tiene un extremo local en x = 3 y que la recta de ecuación y = x–2 es una asíntota de su gráfica. Averiguar los valores de **a**, **b**, **c**.

47. De la función $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+1}$ se sabe que la recta x = –1 es una asíntota vertical de la gráfica de f y que la recta de ecuación y = 2x+4 es la recta tangente a la gráfica de f en el punto de abscisa x = 1. Averiguar los valores de **a**, **b**, **c**.

48. Se sabe que la gráfica de la función $f(x)=\dfrac{ax^2+bx+2}{x-1}$ (para $x\neq 1$) tiene una asíntota oblicua que pasa por el punto (1, 1) y tiene pendiente 2. Averiguar los valores de **a**, **b**.

49. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}-x\cdot e^{x-1} & \text{si} \quad x\le 0\\ x\cdot e^{x-1} & \text{si} \quad 0<x\le 1\\ x\cdot e^{1-x} & \text{si} \quad x>1\end{cases}$

a) Analizar la derivabilidad de f en $x = 0$ y en $x = 1$.

b) Analizar la existencia de asíntotas horizontales de la gráfica de f.

50. Hallar las asíntotas horizontales y verticales de cada una de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{e^x}{1-x}$ b) $f(x)=\dfrac{1}{1+e^x}$ c) $f(x)=\dfrac{2}{1-e^x}$

d) $f(x)=\ln(x^2-4)$ e) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$ f) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{x}\right)$

51. Dada la función $f:(1,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x\cdot(\ln x)^2}{(x-1)^2}$, ¿tiene asíntota horizontal? En caso afirmativo, indicar su ecuación. Justificar adecuadamente la respuesta.

52. ¿Puede una función tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez? Analizar las asíntotas de la función $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{x}{e^x-1}$.

7. Representación gráfica de funciones.

53. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos relativos, asíntotas, ramas parabólicas y realizar un esbozo de su gráfica:

a) $f(x)=x^3-2x^2-x+2$ b) $f(x)=x^4-4x^2$ c) $f(x)=-x\cdot(x-3)^2$

d) $f(x)=4x^3-x^4$ e) $f(x)=x^4-x^3$ f) $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-x-2}$

g) $f(x)=\dfrac{5x^2}{x^2+2x-3}$ h) $f(x)=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ i) $f(x)=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

j) $f(x)=\dfrac{(x+1)^2}{x+3}$ k) $f(x)=\dfrac{x^3}{2(x^2-1)}$ l) $f(x)=\dfrac{8x}{x^2+1}$

m) $f(x)=\dfrac{1-2x}{x^2}$ n) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ ñ) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

54. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos relativos, asíntotas, ramas parabólicas y realizar un esbozo de su gráfica:

a) $f(x)=x^2\cdot e^{-x}$ b) $f(x)=x\cdot e^{x-1}$ c) $f(x)=(1+x^2)\cdot e^{-x}$ d) $f(x)=e^x+e^{-x}$

e) $f(x)=x^2\cdot e^{\left(\frac{x}{2}\right)}$ f) $f(x)=e^{-x^2}$ g) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$ h) $f(x)=x^2\cdot e^{-x^2}$

i) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ j) $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{e^x-1}$ k) $f(x)=\dfrac{e^{x^2}}{x}$ l) $f(x)=\dfrac{1}{1-e^{-x}}$

55. Para cada una de las siguientes funciones, determinar su dominio, puntos de corte con los ejes, intervalos de monotonía, extremos relativos, asíntotas, ramas parabólicas y realizar un esbozo de su gráfica:

a) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ b) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$ c) $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$

d) $f(x)=\ln(x^2-2x)$ e) $f(x)=x^2\cdot\ln x$ f) $f(x)=x\cdot\ln^2 x$

56. Según un determinado modelo, la concentración en sangre de cierto medicamento viene dada por la función $C(t)=t\cdot e^{\left(-\frac{t}{2}\right)}$ mg/ml, siendo **t** el tiempo en horas transcurridas desde que se le administra el medicamento al enfermo.

a) Calcular $\lim\limits_{t\to+\infty} C(t)$. ¿Tiene asíntota horizontal? Indicar su ecuación e interpretar el significado.

b) Determinar la monotonía y los extremos relativos (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan).

c) Realizar un esbozo de la gráfica de la función C.

d) Determinar, si existe, el valor máximo absoluto de la función y en qué momento se alcanza.

e) Sabiendo que la máxima concentración sin peligro para el paciente es 1 mg/ml, señalar si en algún momento del tratamiento hay riesgo para el paciente.

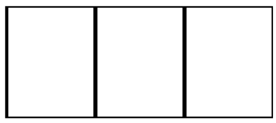
8. Problemas de optimización.

57. a) Entre todos los rectángulos de área 16 cm^2, determinar las dimensiones del que tiene perímetro mínimo.

b) De entre todos los rectángulos de área 100 dm^2, determinar las dimensiones del que tiene diagonal de longitud mínima.

c) La suma de los catetos de un triángulo rectángulo es 40 cm. Hallar sus dimensiones para que el área de dicho triángulo sea máxima.

58. Se pretende dividir un terreno rectangular de 12 800 m^2 en tres parcelas iguales como las que aparecen en el dibujo. Se quieren vallar los bordes y las separaciones de las tres parcelas. Hallar las dimensiones del terreno para que la longitud de la valla utilizada sea mínima.



59. Se desea construir un recinto rectangular para encerrar ovejas aprovechando el muro lateral de una casa. Hallar las dimensiones del recinto de área máxima que se puede hacer si se dispone de 100 metros de valla. ¿Sería suficientemente grande para un ganado que necesite 1 300 m^2?

60. Se desea abrir una ventana rectangular en una pared de una casa. Se pretende que sea lo más económica posible y con un área de 16/15 m^2. Se sabe que el coste en vertical es de 50 €/m y en horizontal 30 €/m. Hallar las dimensiones de la ventana.

61. Una imprenta recibe el encargo de fabricar una tarjeta rectangular de cartón que debe cumplir las siguientes condiciones: el texto impreso debe ser un rectángulo interior de 100 cm^2, el margen superior debe tener 2 cm, el margen inferior 3 cm y los márgenes laterales, 5 cm cada uno. Averiguar las dimensiones de la tarjeta para que el gasto de cartón sea el mínimo posible.

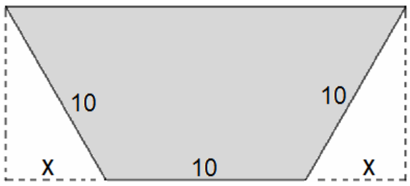
62. Se quiere vallar una parcela rectangular junto a una carretera. La valla junto a la carretera cuesta 1 €/m y el resto 0,50 €/m. Si se dispone de 180 €, ¿cuáles serán las dimensiones de la parcela para que el área sea máxima?

63. Tenemos que fabricar dos chapas cuadradas con dos materiales distintos de 2 y 3 €/cm^2, respectivamente. Por otro lado, la suma de los perímetros de los dos cuadrados tiene que ser 1 m. Determinar los lados de los cuadrados para que el coste total sea mínimo.

64. Un alambre de un metro de longitud se divide en dos trozos: con uno se forma un cuadrado y con el otro una circunferencia. Calcular las longitudes de cada uno de los dos trozos para que sea mínima la suma de las áreas de ambas figuras.

65. Se pretende construir una canaleta para la recogida de agua, cuya sección es como la que se indica en la figura.
La base y los costados deben medir 10 cm.

Encontrar el valor de **x** (ver figura) con el que se consigue el máximo área posible para la sección de la canaleta.

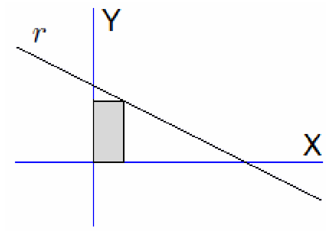


66. Hallar los puntos de la curva de ecuación $y^2 = 6x$ cuya distancia al punto (4, 0) sea mínima.

67. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (5-x)\,e^{x-4}$, determinar los puntos de la gráfica de f cuya recta tangente tiene pendiente máxima.

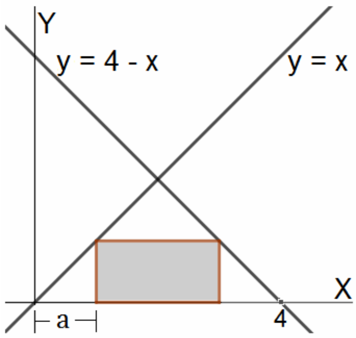
68. Dada la función $f : [1, e] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$, determinar la recta tangente a la gráfica de f que tiene pendiente máxima. (De entre todas las rectas tangentes a la gráfica de la función, cuál de ellas tiene pendiente máxima).

69. De entre todos los rectángulos situados en el primer cuadrante con dos de sus lados apoyados sobre los ejes de coordenadas y un vértice en la recta r de ecuación $\dfrac{x}{2} + y = 1$, hallar el de área máxima.



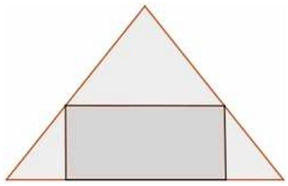
70. Se desea construir un rectángulo, como el que aparece en la figura, de área máxima. La base se apoya en el eje X, un vértice se encuentra en la recta $y = 4-x$ y el otro vértice en la recta $y = x$.

Averiguar cuál debe ser el valor de **a** (ver figura) para que el rectángulo tenga el máximo área posible.



71. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 6 - \frac{1}{6}x^2$, calcular las dimensiones de un rectángulo de área máxima, de lados paralelos a los ejes, inscrito en el recinto comprendido entre la gráfica de f y la recta $y = 0$.

72. En un triángulo isósceles de altura 5 cm y en el que el lado desigual mide 8 cm, calcular las dimensiones del rectángulo de máxima área que se puede inscribir en dicho triángulo.



73. Se desea fabricar una caja con base cuadrada, de tal forma que la altura de la caja más el perímetro de la base sumen 60 cm. Determinar sus dimensiones para que contenga el mayor volumen posible.

74. Se desea construir una caja abierta, de base cuadrada y volumen 256 litros. Averiguar las dimensiones para que la superficie sea mínima.

75. Se quiere construir una caja de base cuadrada sin tapadera. El precio del material es el siguiente: 18 €/m^2 para los laterales y 24 €/m^2 para la base. Calcular las dimensiones de la caja de mayor volumen posible que se puede construir con 50 €.

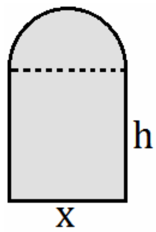
76. Se desea fabricar una lata de conserva cilíndrica con una superficie total de 200 cm^2. Hallar el radio de la base y la altura de la lata para que su volumen sea máximo.

77. El barril utilizado para almacenar petróleo es un cilindro de capacidad 160 litros. Averiguar sus dimensiones para que la cantidad de chapa empleada en su construcción sea mínima.

78. Se necesita construir un depósito cilíndrico, incluidas las tapas inferior y superior, con una capacidad de 20π m^3. El material para las tapas cuesta 10 €/m^2 y el material para el resto del cilindro cuesta 8 €/m^2. Calcular el radio de las tapas y la altura del cilindro para que el coste total sea el mínimo posible.

79. Se quiere hacer una puerta con forma de rectángulo coronado por un semicírculo como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 m^2.

Determinar la medida del lado x para que el perímetro sea mínimo.



80. Se desea fabricar una vidriera para una iglesia. La vidriera está formada por un rectángulo y un semicírculo apoyado sobre el mismo. Averiguar las dimensiones que debe tener una vidriera de área $8+2\pi$ m^2 con el mínimo perímetro posible.

9. Continuidad en un intervalo. Teorema de Bolzano.

81. Demostrar que la ecuación $\operatorname{sen}x + 2x - 1 = 0$ tiene al menos una solución en $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

82. Demostrar que el polinomio $P(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ tiene al menos una raíz en (0, 1).

83. Averiguar si la función $f(x) = x^3 - 5x + 4$ se anula en algún valor negativo.

84. Demostrar que la ecuación $2x - 1 = \cos x$ tiene al menos una solución en $\mathbb{R}$.

85. Dada la función $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{si} \quad -\pi \le x \le 0 \\ m + x^2 & \text{si} \quad 0 < x < 1 \\ \frac{n}{x} & \text{si} \quad 1 \le x \le \pi \end{cases}$

a) Hallar los valores de **m** y **n** para que se le pueda aplicar el Teorema de Bolzano en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

b) Averiguar el valor interior $c \in [-\pi, \pi]$ en el que la función se anula.

86. La función $f(x) = \frac{|x|}{x}$ toma valores opuestos en los extremos del intervalo [–2, 2] pero no se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Por qué no se cumple el Teorema de Bolzano?

87. La función $f(x) = \operatorname{tg}x$ toma valores opuestos en los extremos del intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$ pero no se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Por qué no se cumple el Teorema de Bolzano?

88. La función $f(x) = \frac{2}{x}$ toma valores opuestos en los extremos del intervalo [–1, 1] pero no se anula en el interior de dicho intervalo. ¿Por qué no se cumple el Teorema de Bolzano?

89. ¿Se puede aplicar el Teorema de Bolzano para asegurar que la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$ corta al eje de abscisas en al menos un punto del intervalo (–1, 0)? ¿Y del intervalo (0, 1)? Justifica la respuesta.

90. ¿Se puede aplicar el Teorema de Bolzano para asegurar que la ecuación $x^2 + \frac{1}{x-2} = 0$ tiene al menos una solución el intervalo (0, 3)? ¿Y en el intervalo (–2, 0)? Justifica la respuesta.

91. Demostrar que la función $f(x) = x^3 - x^2 + x$ toma el valor $\sqrt{5}$ en el intervalo (1, 2).

92. Demostrar que existe al menos un valor $c \in \mathbb{R}$ tal que $c \cdot (1 + \operatorname{sen}c) = 2$

93. Demostrar que la función $f(x) = \frac{6}{2 + \operatorname{sen}x}$ toma el valor 4 en el intervalo $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

10. Extremos absolutos de una función. Teorema de Weierstrass.

94. En cada uno de los siguientes apartados, demostrar que la función dada alcanza un máximo y un mínimo absolutos en el intervalo que se indica. Hallar sus extremos absolutos (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan, respectivamente):

a) $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ en [0, 1]

b) $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ en [2, 5]

c) $f(x)=x^2-1$ en [–1, 1]

d) $f(x)=\begin{cases} x^2-x-1 & \text{si} \quad x\le 1 \\ -x^2+4x-4 & \text{si} \quad x>1 \end{cases}$ en [0, 3]

95. ¿Es continua la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ en el intervalo [0, 1]? ¿Tiene máximo absoluto en [0, 1]?

96. ¿Es continua la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ en el intervalo (1, 2]? ¿Tiene máximo absoluto en dicho intervalo? ¿Se puede aplicar el Teorema de Weierstrass en el intervalo (1, 2]?

11. Derivabilidad de una función en un intervalo. Teorema del Valor Medio.

97. Hallar el valor de **a**, **b** para que la función $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si} \quad x<2 \\ bx+c & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$ cumpla la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo [2, 6]. Hallar el valor interior del intervalo cuya existencia asegura el teorema.

98. Comprobar que la función $f(x)=x^2+2x$ cumple la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo [1, 3]. Encontrar el valor interior del intervalo cuya existencia asegura el teorema.

99. ¿Cumple la función $f(x)=2x+\operatorname{sen}x$ la hipótesis del Teorema del Valor Medio en el intervalo $[0,\pi]$? En caso afirmativo, hallar el valor interior del intervalo cuya existencia asegura el teorema.

100. Comprobar que la función $f(x)=-x^2+2x+5$ cumple la hipotésis del Teorema de Rolle en el intervalo [−1, 3]. Hallar el valor interior del intervalo cuya existencia asegura el teorema.

101. ¿Cumple la función $f(x)=|\cos x|$ la hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo $[0,\pi]$?

102. Hallar el valor de **a**, **b**, **c** para que $f(x)=\begin{cases} x^2+ax & \text{si} \quad x<2 \\ bx+c & \text{si} \quad x\ge 2 \end{cases}$ cumpla la hipótesis del Teorema de Rolle en el intervalo [0, 4].

SOLUCIONES

1. a) Tangente $y = -6x+4$; Normal $y = \frac{1}{6}x - \frac{13}{6}$; b) Tangente $y = 24x+8$; Normal $y = -\frac{1}{24}x + 8$
c) Tangente $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$; Normal $x = \frac{\pi}{3}$; d) Tangente $y = 2ex-e$; Normal $y = -\frac{1}{2e}x + \frac{1}{2e} + e$;
e) Tangente $y = 1$; Normal $x = \frac{3\pi}{4}$; f) Tangente $y = x-1$; Normal $y = -x+1$;
g) Tangente $y = \frac{1}{2}x - 4$; Normal $y = -2x+1$; h) Tangente $y = 2x+2$; Normal $y = -\frac{1}{2}x + \frac{19}{2}$

2. El punto (0, 5)

3. Los puntos (0, –1), (–4, 3)

4. El punto (e, 1). La recta es $y = (1/e)x$

5. El punto (1, 2)

6. Los valores son $m = -1$, $n = 3$

7. Los valores son $a = 7/2$, $b = -7/2$, $c = 2$

8. Los valores son $a = 3$, $b = -2$

9. a) –1/3; b) m^2/n^2; c) 1; d) $\sqrt{3}$; e) 0; f) 0; g) 1; h) 3; i) –5/2; j) –1/8; k) –1/2; l) 1/2

10. a) 0; b) 2; c) 0; d) $+\infty$; e) –1; f) 2; g) 0; h) ln(m/n); i) –1; j) 0; k) 2; l) 1

11. a) –1/4; b) m; c) 0; d) 0; e) –2/3; f) 0; g) 1; h) 0; i) 2/3; j) $1/na^{n-1}$; k) 8/69; l) 3/5

12. a) –2; b) 0; c) 0; d) 1; e) 0; f) 0; g) m; h) 0; i) 0; j) 0; k) 0; l) 2

13. a) $+\infty$; b) 0; c) 1/2; d) –1/2; e) 1/2; f) 1/6; g) 0; h) $\pi/4$

14. a) Para a = –1, dicho límite vale 1/2; b) Para a = –3, dicho límite vale –7; c) Para a = –2, dicho límite vale 2; d) Para a = 2, dicho límite vale –1/2

15. a) e^2; b) $1/e^2$; c) 1; d) 1; e) 1; f) mn; g) $e^{-1/2}$; h) 1/e; i) 1/e; j) e; k) 1/e; l) e

16. a) El valor es a = 3 y derivable en $(-\infty, 2)$, en (2, 5) y en (5, 10); b) El valor es a = 3 y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

17. El valor es a = 1

18. a) a = 1; b) $y = -\frac{6}{e}x - \frac{15}{e}$

19. a) El valor es a = 1; b) $y = 2x-e$

20. El valor es k = 1

21. Los valores son a = 1, b = –2; derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$

22. a) a = 1/2, b = 1/2; b) No existen; c) a = –1, b = –1; d) a = –1/2, b = –1/4

23. a) Continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2}\}$; b) Continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0\}$; c) Continua en (0, +∞) y derivable en (0, e) y en (e, +∞)

24. a) Mínimo local en (–2, 3), decreciente en (–∞, –2) y en (0, +∞), creciente en (–2, 0); b) No tiene extremos relativos; creciente en (–∞, –1), en (–1, 1) y en (1, +∞);
c) Máximo relativo en $\left(-1-\sqrt{2},\ \frac{1}{2}-\sqrt{2}\right)$, mínimo relativo en $\left(-1+\sqrt{2},\ \frac{1}{2}+\sqrt{2}\right)$;
creciente en $\left(-\infty,\ -1-\sqrt{2}\right)$ y en $\left(-1+\sqrt{2},\ +\infty\right)$, decreciente en $\left(-1-\sqrt{2},-1\right)$ y en $\left(-1,-1+\sqrt{2}\right)$
d) Máximo relativo en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},\ -6-2\sqrt{3}\right)$, mínimo relativo en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\ -6+2\sqrt{3}\right)$;
decreciente en $\left(-\infty,\ 1-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y en $\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3},\ +\infty\right)$, creciente en $\left(1-\frac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$ y en $\left(1,\ 1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$
e) Máximo local en (–1, 5/e), mínimo local en (2, $-e^2$), creciente en (–∞, –1) y en (2, +∞), decreciente en (–1, 2); f) Máximo local en (3, $9/e^3$), mínimo local en (1/2, $-1/\sqrt{e}$), decreciente en (–∞, 1/2) y en (3, +∞), creciente en (1/2, 3)

25. Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, mínimo relativo en $\left(\frac{5\pi}{3},-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$; creciente en $\left(0,\frac{\pi}{3}\right)$ y en $\left(\frac{5\pi}{3},2\pi\right)$, decreciente en $\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}\right)$

26. Máximo relativo en (0, 1/3), mínimos relativos en (–π, –1) y en (π, –1); creciente en (–π, 0) y en (π, 2π), decreciente en (–2π, –π) y en (0, π)

27. a) Mínimo relativo en (0, 1); creciente en (0, +∞), decreciente en (–∞, 0); b) La recta x = 0

28. Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 2\}$; decreciente en (–∞, 0); creciente en (0, 2) y en (2, +∞)

29. Los valores son a = –2/3, b = –1/6. En x = 1 hay un mínimo y en x = 2 hay un máximo.

30. Los valores son a = 4, b = –7, c = 0, d = 3

31. La función es $f(x) = -x^3 + x^2 + 2$

32. Los valores son $a = \frac{12}{5}$, $b = -\frac{49}{5}$, $c = \frac{52}{5}$

33. Los valores son a = –1, b = –2, c = 2

34. a) Puntos de inflexión: (–1, 12/e) y (2, 0), convexa en (–∞, –1), cóncava en (–1, 2), convexa en (2, +∞); b) Puntos de inflexión: (1, 2/e) y (3, $10/e^3$), convexa en (–∞, 1), cóncava en (1, 3), convexa en (3, +∞); c) Ptos de inflexión: (0, ln2) y (2, ln2), cóncava en (–∞, 0) y en (2, +∞), convexa en (0, 2); d) Ptos de inflexión: (–1, $\ln\sqrt{2}$) y (1, $\ln\sqrt{2}$), cóncava en (–∞, –1) y en (1, +∞), convexa en (–1, 1)

35. a) El valor es a = 1; b) Tiene un punto de inflexión en (–1, –2/e)

36. a) Máximo relativo en $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$, mínimo relativo en $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$; creciente en $\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ y en $\left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right)$, decreciente en $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$; b) Puntos de inflexión: $\left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$ y $\left(\frac{7\pi}{4}, 0\right)$, cóncava en $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ y en $\left(\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right)$, convexa en $\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right)$

37. Los valores son a = 1, b = –3, c = 0, d = 1

38. Los valores son a = 1, b = −3, c = 0, d = 2

39. Los valores son a = –3, b = 3, c = 0

40. Los valores son a = 1, b = 3, c = 0, d = 1

41. Los valores son a = 1, b = 6, c = 2

42. Los valores son a = 1, b = 0, c = −3, d = 2

43. El valor es m = 4

44. a) La recta x = –1 es AV ya que [si $x \to -1^+$, $y \to +\infty$]; [si $x \to -1^-$, $y \to -\infty$]; la recta de ecuación $y = \frac{1}{2}x + 1$ es AO; no tiene AH ya que [si $x \to +\infty$, $y \to +\infty$]; [si $x \to -\infty$, $y \to -\infty$]
b) La recta x = 1 es AV ya que [si $x \to 1^+$, $y \to -\infty$]; [si $x \to 1^-$, $y \to +\infty$]; la recta x = –1 no es AV; la recta y = 1 es AH ya que [si $x \to +\infty$, $y \to 1$]; [si $x \to -\infty$, $y \to 1$]; no tiene A0.
c) La recta x = 0 es AV ya que [si $x \to 0^+$, $y \to +\infty$]; [si $x \to 0^-$, $y \to +\infty$]; la recta de ecuación y = –x es AO; no tiene AH ya que [si $x \to +\infty$, $y \to -\infty$]; [si $x \to -\infty$, $y \to +\infty$]

45. Los valores son a = 2, b = 6, c = –1

46. Los valores son a = 1, b = 2, c = −7

47. Los valores son a = 10, b = 2, c = 1

48. Los valores son a = 2, b = –3

49. a) Continua en todo $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{0, 1\}$, es decir, no es derivable ni en x = 0 ni en x = 1; b) La recta y = 0 es AH ya que [si $x \to +\infty$, $y \to 0$]; [si $x \to -\infty$, $y \to 0$]

50. Asíntotas

	Verticales	Horizontales		Verticales	Horizontales
a)	x = 1	y = 0	d)	x = –2, x = 2	No tiene
b)	No tiene	y = 1, y = 0	e)	x = –1, x = 1	y = 0
c)	x = 0	y = 0, y = 2	f)	x = 0, x = –1	y = 0

51. La recta y = 0 es asíntota horizontal ya que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

52. No tiene asíntotas verticales. La recta y = 0 es asíntota horizontal en la parte positiva del eje X. La recta y = –x es asíntota oblicua de la parte negativa del eje X.

53.

	Dom(f)	Corte ejes	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Asíntotas o ramas parabólicas
a)	$\mathbb{R}$	(–1, 0) (1, 0) (2, 0) (0, 2)	$\searrow$ en (–0.21, 1.55) $\nearrow$ en (–∞, –0.21) y en (1.55, +∞)	Máximo en (–0.21, 2.11) Mínimo en (1.55, –0.63)	RP: (+∞, +∞) RP: (–∞, –∞)
b)	$\mathbb{R}$	(–2, 0) (0, 0) (2, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, -\sqrt{2})$ y en $(0, \sqrt{2})$ $\nearrow$ en $(-\sqrt{2}, 0)$ y en $(\sqrt{2}, +\infty)$	Mínimo en $(-\sqrt{2}, -4)$ Máximo en (0, 0) Mínimo en $(\sqrt{2}, -4)$	RP: (+∞, +∞) RP: (–∞, +∞)
c)	$\mathbb{R}$	(0, 0) (3, 0)	$\searrow$ en (–∞, 1) y en (3, +∞) $\nearrow$ en (1, 3)	Máximo en (3, 0) Mínimo en (1, –4)	RP: (–∞, +∞) RP: (+∞, –∞)
d)	$\mathbb{R}$	(0, 0) (4, 0)	$\searrow$ en (3, +∞) $\nearrow$ en (–∞, 3)	Máximo en (3, 27)	RP: (+∞, –∞) RP: (–∞, –∞)
e)	$\mathbb{R}$	(0, 0) (1, 0)	$\searrow$ en (–∞, 3/4) $\nearrow$ en (3/4, +∞)	Mínimo en (3/4, –0.11)	RP: (+∞, +∞) RP: (–∞, +∞)
f)	$\mathbb{R}-\{-1, 2\}$	(0, 0)	$\searrow$ en (–∞, –4), en (0, 2) y en (2, +∞) $\nearrow$ en (–4, –1) y en (–1, 0)	Máximo en (0, 0) Mínimo en (–4, 16/9)	AV: x = –1 AV: x = 2 AH: y = 2
g)	$\mathbb{R}-\{-3, 1\}$	(0, 0)	$\searrow$ en (0, 1) y en (1, 3) $\nearrow$ en (–∞, –3), en (–3, 0) y en (3, +∞)	Máximo en (0, 0) Mínimo en (3, 15/4)	AV: x = –3 AV: x = 1 AH: y = 5
h)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\nearrow$ en (–∞, –1) y en (1, +∞) $\searrow$ en (–1, 1)	Máximo en (–1, 3) Mínimo en (1, 1/3)	AH: y = 1
i)	$\mathbb{R}-\{1\}$	(0, –2)	$\nearrow$ en (–∞, 0) y en (2, +∞) $\searrow$ en (0, 1) y en (1, 2)	Máximo en (0, –2) Mínimo en (2, 2)	AV: x = 1 AO: y = x–1
j)	$\mathbb{R}-\{-3\}$	(–1, 0) (0, 1/3)	$\searrow$ en (–5, –3) y en (–3, –1) $\nearrow$ en (–∞, –5) y en (–1, +∞)	Máximo en (–5, –8) Mínimo en (–1, 0)	AV: x = –3 AO: y = x–1
k)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\sqrt{3}, -1)$, en (–1, 1) y en $(1, \sqrt{3})$ $\nearrow$ en $(-\infty, -\sqrt{3})$ y en $(\sqrt{3}, +\infty)$	Máximo en $(-\sqrt{3}, -1.3)$ Mínimo en $(\sqrt{3}, 1.3)$	AV: x = –1 AV: x = 1 AO: $y = \frac{x}{2}$
l)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\searrow$ en (–∞, –1) y en (1, +∞) $\nearrow$ en (–1, 1)	Máximo en (1, 4) Mínimo en (–1, –4)	AH: y = 0
m)	$\mathbb{R}-\{0\}$	(1/2, 0)	$\searrow$ en (0, 1) $\nearrow$ en (–∞, 0) y en (1, +∞)	Mínimo en (1, –1)	AV: x = 0 AH: y = 0
n)	$\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	(0, 0)	$\searrow$ en $\mathbb{R}-\{-1, 1\}$	No tiene	AV: x = –1 AV: x = 1 AH: y = 0
ñ)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\searrow$ en (0, +∞) $\nearrow$ en (–∞, 0)	Máximo en (0, 1)	AH: y = 0

54.

	Dom(f)	Corte ejes	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Asíntotas o ramas parabólicas
a)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(2, +\infty)$ $\nearrow$ en $(0, 2)$	Máximo en $(2, 4/e^2)$ Mínimo en (0, 0)	AH: y = 0 (+) RP: $(-\infty, +\infty)$
b)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\searrow$ en $(-\infty, -1)$ $\nearrow$ en $(-1, +\infty)$	Mínimo en $(-1, -1/e^2)$	AH: y = 0 (–) RP: $(+\infty, +\infty)$
c)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\searrow$ en $(-\infty, +\infty)$	No tiene	AH: y = 0 (+) RP: $(-\infty, +\infty)$
d)	$\mathbb{R}$	(0, 2)	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ $\nearrow$ en $(0, +\infty)$	Mínimo en (0, 2)	RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
e)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\nearrow$ en $(-\infty, -4)$ y en $(0, +\infty)$ $\searrow$ en $(-4, 0)$	Máximo en $(-4, 16/e^2)$ Mínimo en (0, 0)	AH: y = 0 (–) RP: $(+\infty, +\infty)$
f)	$\mathbb{R}$	(0, 1)	$\nearrow$ en $(-\infty, 0)$ $\searrow$ en $(0, +\infty)$	Máximo en (0, 1)	AH: y = 0
g)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\nearrow$ en $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ $\searrow$ en $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ y en $(\sqrt{2}/2, +\infty)$	Mínimo en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2e}/2e)$ Máximo en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2e}/2e)$	AH: y = 0
h)	$\mathbb{R}$	(0, 0)	$\nearrow$ en $(-\infty, -1)$ y en $(0, 1)$ $\searrow$ en $(-1, 0)$ y en $(1, +\infty)$	Máximo en $(-1, 1/e)$ Mínimo en (0, 0) Máximo en $(1, 1/e)$	AH: y = 0
i)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$	No tiene	AV: x = 0 (+) AH: y = 1
j)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, \ln 2)$ $\nearrow$ en $(\ln 2, +\infty)$	Mínimo en $(\ln 2, 4)$	AV: x = 0 AH: y = 0 (–) RP: $(+\infty, +\infty)$
k)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No	$\nearrow$ en $(-\infty, -\sqrt{2}/2)$ y en $(\sqrt{2}/2, +\infty)$ $\searrow$ en $(-\sqrt{2}/2, 0)$ y en $(0, \sqrt{2}/2)$	Máximo en $(-\sqrt{2}/2, -\sqrt{2e})$ Mínimo en $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2e})$	AV: x = 0 RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, -\infty)$
l)	$\mathbb{R}-\{0\}$	No	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ y en $(0, +\infty)$	No tiene	AV: x = 0 AH: y = 0 (–) AH: y = 1 (+)

55.

	Dom(f)	Corte con los ejes	Intervalos de monotonía	Extremos relativos	Asíntotas o ramas parabólicas
a)	$(0, +\infty)$	$(1, 0)$	$\nearrow$ en $(0, e)$ $\searrow$ en $(e, +\infty)$	Máximo en $(e, 1/e)$	AV: $x = 0$ (+) AH: $y = 0$ (+)
b)	$(0, 1)$ $\cup$ $(1, +\infty)$	No	$\searrow$ en $(0, 1)$ y en $(1, e)$ $\nearrow$ en $(e, +\infty)$	Mínimo en (e, e)	AV: $x = 1$ RP: $(+\infty, +\infty)$
c)	$(0, 1)$ $\cup$ $(1, +\infty)$	No	$\searrow$ en $(0, 1)$ y en $(1, +\infty)$	No tiene	AV: $x = 1$ AH: $y = 0$ (+)
d)	$(-\infty, 0)$ $\cup$ $(2, +\infty)$	$(1-\sqrt{2}, 0)$ $(1+\sqrt{2}, 0)$	$\searrow$ en $(-\infty, 0)$ $\nearrow$ en $(2, +\infty)$	No tiene	AV: $x = 0$ (–) AV: $x = 2$ (+) RP: $(+\infty, +\infty)$ RP: $(-\infty, +\infty)$
e)	$(0, +\infty)$	$(1, 0)$	$\searrow$ en $(0, 1/\sqrt{e})$ $\nearrow$ en $(1/\sqrt{e}, +\infty)$	Mínimo en $(1/\sqrt{e}, -1/2e)$	RP: $(+\infty, +\infty)$
f)	$(0, +\infty)$	$(1, 0)$	$\nearrow$ en $(0, 1/e^2)$ y en $(1, +\infty)$ $\searrow$ en $(1/e^2, 1)$	Mínimo en $(1, 0)$ Máximo en $(1/e^2, 4/e^2)$	RP: $(+\infty, +\infty)$

56. a) Dicho límite es igual a cero. Por lo tanto, la asíntota horizontal es la recta $y = 0$. Esto significa que, a medida que el tiempo transcurre, la concentración en sangre del medicamento tiende a desaparecer; b) Máximo relativo en $(2, 2/e)$; creciente en $(0, 2)$ y decreciente en $(2, +\infty)$; d) A la vista de la gráfica, el máximo absoluto de la función es $2/e$ mg/ml, que se alcanza a las 2 horas; e) No hay riesgo para el paciente ya que el máximo absoluto es $2/e$, aprox 0,736 mg/ml, menor que 1 mg/ml, que es la máxima concentración sin peligro para el paciente.

57. a) Dimensiones: 4 cm x 4 cm; b) Dimensiones: 10 dm x 10 dm; c) Dos catetos iguales de 20 cm

58. Dimensiones: 160 m x 80 m

59. Dimensiones: 25 m x 50 m. No, ya que el área máxima es 1 250 m^2

60. Dimensiones: $\frac{4}{5}$ m x $\frac{4}{3}$ m

61. Dimensiones: $10\sqrt{2}+10 \approx 24{,}14$ cm de largo y $5\sqrt{2}+5 \approx 12{,}07$ cm de ancho

62. Dimensiones: 60 m x 90 m

63. Un cuadrado de lado 15 cm y el otro de lado 10 cm

64. Un trozo mide $\frac{4}{4+\pi}$ m y el otro mide $\frac{\pi}{4+\pi}$ m

65. El valor es $x = 5$ cm, con el que se consigue un área máxima de $75\sqrt{3}$ cm^2

66. Los puntos $(1, \sqrt{6})$ y $(1, -\sqrt{6})$

67. El punto $\left(3, \frac{2}{e}\right)$

68. La recta $y = \frac{x}{4} + \ln 2$

69. El que tiene como vértice en la recta r el punto (1, 1/2)

70. El valor es a = 1, con el que se consigue un rectángulo de área máxima 2 u^2

71. La base mide $4\sqrt{3}$ u y la altura mide 4 u.

72. Dimensiones: 4 cm x 2,5 cm

73. Dimensiones: 10 cm x 10 cm la base, y 20 cm de altura.

74. Dimensiones: 8 dm x 8 dm x 4 dm

75. Dimensiones: $\frac{5}{6}$ m de ancho (y largo) y $\frac{5}{9}$ m de alto

76. El radio mide $\sqrt{\frac{100}{3\pi}} \approx 3{,}26$ cm y la altura mide $\sqrt{\frac{400}{3\pi}} \approx 6{,}51$ cm

77. El radio mide $\sqrt[3]{\frac{80}{\pi}} \approx 2{,}94$ dm y la altura mide $\sqrt[3]{\frac{640}{\pi}} \approx 5{,}88$ dm

78. El radio mide 2 m y la altura mide 5 m

79. El lado x debe medir $\sqrt{\frac{128}{4+\pi}} \approx 4{,}23$ m

80. Dimensiones: 4 m x 2 m

81. Aplicar el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = \operatorname{sen} x + 2x - 1$

82. Aplicar el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 1$

83. Sí. Aplicar el Teorema de Bolzano a la función en el intervalo (–2, –3)

84. Aplicar el Teorema de Bolzano a la función $f(x) = \cos x - 2x + 1$ en $(0, \pi)$

85. a) m = 1, n = 2; b) $c = -\pi/2$

86. Porque tiene una discontinuidad (de salto finito) en $x = 0 \in [-2, 2]$

87. Porque tiene una discontinuidad (de salto infinito) en $x = \frac{\pi}{2} \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right]$

88. Porque tiene una discontinuidad (de salto infinito) en $x = 0 \in [-1, 1]$

89. No en (–1, 0) porque no toma valores de signo opuesto en los extremos de dicho intervalo pero sí en (0, 1) ya que cumple la hipótesis del Teorema de Bolzano.

90. No en (0, 3) ya que la función $f(x) = x^2 + \frac{1}{x-2}$ no es continua en (0, 3). Sí en (–2, 0) ya que cumple la hipótesis del Teorema de Bolzano.

91. Aplicar el Teorema del Valor Intermedio a la función.

92. Aplicar el Teorema del Valor Intermedio a la función $f(x) = x \cdot (1 + \operatorname{sen} x)$ en $(0, \pi)$

93. Aplicar el Teorema del Valor Intermedio a la función.

94. a) Aplicar el Teorema de Weierstrass en [0, 1]. El máximo absoluto se alcanza en el punto (1, 1/2) y el mínimo absoluto en el punto (0, 0); b) Aplicar el Teorema de Weierstrass en [2, 5]. El máximo absoluto se alcanza en el punto (2, 1) y el mínimo absoluto en el punto (5, 1/4); c) Aplicar el Teorema de Weierstrass en [–1, 1]. El máximo absoluto se alcanza en los puntos (–1, 0) y (1, 0) y el mínimo absoluto en el punto (0, –1); d) Aplicar el Teorema de Weierstrass en [0, 3]. El máximo absoluto se alcanza en el punto (2, 0) y el mínimo absoluto en el punto (1/2, –5/4).

95. No a las dos preguntas ya que $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

96. Sí es continua en (1, 2] pero no tiene máximo absoluto en (1, 2] ya que $\lim\limits_{x \to 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$
El Teorema de Weierstrass no se puede aplicar en (1, 2] al no ser un intervalo cerrado.

97. Los valores son $a = 2$, $b = 19$; $c = 9/2$

98. El valor es $c = 2$

99. El valor es $c = \pi/2$

100. El valor es $c = 1$

101. No, ya que no es derivable en $x = \pi/2$

102. Los valores son $a = -3$, $b = 1$, $c = -4$