DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 1. ANÁLISIS DE FUNCIONES.

IES LA BAHIA

1. Rectas tangente y normal a una gráfica en un punto.

Dados una función y = f(x) y un valor $c \in \text{Dom}(f)$, la **derivada de f en x = c** se define como el límite de las tasas de variación media TVM [c, c+h] cuando h tiende a cero:

$$f'(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}$$

Geométricamente, la derivada de una función en un punto es la **pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto**.

La ecuación de la **recta tangente** a la gráfica de y = f(x) en x = c es: $y - f(c) = f'(c) \cdot (x - c)$

Ejemplo: la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = x^3$ en x = 2 es y = 12x – 16

f(2) = 8 $\quad f'(x) = 3x^2 \quad f'(2) = 12 \quad y - 8 = 12 \cdot (x - 2) \;\Rightarrow\; y = 12x - 16$

La ecuación de la **recta normal** a la gráfica de y = f(x) en x = c es: $y - f(c) = \frac{-1}{f'(c)} \cdot (x - c)$

La recta normal a la gráfica en un punto es la recta perpendicular a la recta tangente a la gráfica en dicho punto.

Ejemplo: la ecuación de la recta normal a la gráfica de $f(x) = x^3$ en x = 2 es $y = \frac{-1}{12}x + \frac{49}{6}$

f(2) = 8 $\quad f'(x) = 3x^2 \quad \frac{-1}{f'(2)} = \frac{-1}{12} \quad y - 8 = \frac{-1}{12} \cdot (x - 2) \;\Rightarrow\; y = \frac{-1}{12}x + \frac{49}{6}$

2. Regla de L´Hôpital.

Indeterminaciones

Se dice que el cálculo de un límite presenta una indeterminación si no se puede conocer el resultado de forma inmediata. Al utilizar la palabra "indeterminación" se quiere decir que hay una situación de incertidumbre, que el resultado final del límite puede ser un número real L, puede ser +∞ ó puede ser –∞. Por ello, para cada tipo de **indeterminación** hay que aplicar una técnica específica que permita resolver la indeterminación y llegar al resultado final.

La regla de L´Hôpital se utiliza para resolver cada uno de los siete casos de indeterminación, que son los siguientes:

$\frac{\to \infty}{\to \infty}$	$\frac{\to 0}{\to 0}$	$\to +\infty - \infty$	$(\to 0) \cdot (\to \infty)$	$(\to +\infty)^{(\to 0)}$	$(\to 0)^{(\to 0)}$	$(\to 1)^{(\to \infty)}$

Caso 1. Indeterminación $\frac{\to 0}{\to 0}$

Dadas dos funciones f, g derivables en un entorno de $c \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$. Si el $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es un número real L, +∞ ó –∞, entonces $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

[La regla también es válida si $x \to +\infty$ ó si $x \to -\infty$]

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{3x^2}{2x}=\frac{3}{2}$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x}{1}=\frac{1}{1}=1$

Ejemplo 3: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x-\operatorname{sen}x}{x^3}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{6x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{6}=\frac{1}{6}$

Caso 2. Indeterminación $\frac{\to \infty}{\to \infty}$

Dadas dos funciones f, g derivables en un entorno de $c \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$. Si el $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ es un número real L, +∞ ó –∞, entonces $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

[La regla también es válida si $x \to +\infty$ ó si $x \to -\infty$]

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x^3}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{3x^2}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6x}{e^x}=\frac{+\infty}{+\infty}=\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{6}{e^x}=\frac{6}{+\infty}=0$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln(3x^2)}{\ln x}=\frac{-\infty}{-\infty}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{6x}{3x^2}\div\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{6x^2}{3x^2}=\frac{6}{3}=2$

Caso 3. Indeterminación $(\to 0)\cdot(\to \infty)$

Dadas dos funciones f, g derivables en un entorno de $c \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\pm\infty$, entonces con la transformación $\lim\limits_{x\to c} f(x)\cdot g(x)=\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$, se aplica el caso 1 a las funciones f(x) y $\frac{1}{g(x)}$

[La regla también es válida si $x \to +\infty$ ó si $x \to -\infty$]

Nota: en el caso de que sean $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x)=0$, usando la misma transformación, se aplica el caso 2 a las funciones f(x) y $\frac{1}{g(x)}$

Ejemplo 1:

$$\lim_{x\to+\infty} x\cdot\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)=(+\infty)\cdot 0=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\frac{1}{x}}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{\left(1+\frac{3}{x}\right)}\cdot\frac{-3}{x^2}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{1+\frac{3}{x}}=\frac{3}{1+0}=3$$

Ejemplo 2: $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln x=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{+\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2}{-x}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$

Caso 4. Indeterminación $\to +\infty-\infty$

Dadas dos funciones f, g derivables en un entorno de $c\in\mathbb{R}$ y tales que $\lim_{x\to c} f(x)=+\infty$ y $\lim_{x\to c} g(x)=+\infty$, entonces con la transformación $\lim_{x\to c} f(x)-g(x)=\lim_{x\to c}\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}}=\frac{0}{0}$, se aplica el caso 1 a las funciones $\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}$ y $\frac{1}{f(x)\cdot g(x)}$

[La regla también es válida si $x\to+\infty$ ó si $x\to-\infty$]

Ejemplo:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}-\frac{1}{\ln(1+x)}=\infty-\infty=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)-x}{x\cdot\ln(1+x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{\ln(1+x)+\frac{x}{1+x}}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x}{(1+x)\ln(1+x)+x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(1+x)+\frac{1+x}{1+x}+1}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{\ln(1+x)+1+1}=\frac{-1}{2}$$

Caso 5. Indeterminación $(\to 1)^{(\to\infty)}$

Si f y g son dos funciones derivables en un entorno de $c\in\mathbb{R}$ y tales que $\lim_{x\to c} f(x)=1$ y $\lim_{x\to c} g(x)=\pm\infty$, entonces con la transformación $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}=\lim_{x\to c} e^{g(x)\cdot\ln(f(x))}=e^t$, donde $t=\lim_{x\to c} g(x)\cdot\ln(f(x))=\lim_{x\to c}\frac{\ln(f(x))}{\frac{1}{g(x)}}=\frac{0}{0}$, se aplica el caso 1 a las funciones $\ln(f(x))$ y $\frac{1}{g(x)}$

[La regla también es válida si $x\to+\infty$ ó si $x\to-\infty$]

Ejemplo: $\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=1^{+\infty}=e^t=e^{\frac{-1}{2}}$ donde

$$t=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\ln(\cos x)=\infty\cdot 0=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{tg}x}{2x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{-(1+\operatorname{tg}^2 x)}{2}=\frac{-1}{2}$$

Caso 6. Indeterminación $(\to 0)^{(\to 0)}$

Si f y g son dos funciones derivables en un entorno de $c \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = 0$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, entonces con la transformación $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} e^{g(x)\cdot \ln(f(x))} = e^t$, donde $t = \lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot \ln(f(x)) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{\ln(f(x))}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, se aplica el caso 2 a las funciones $\ln(f(x))$ y $\dfrac{1}{g(x)}$

[La regla también es válida si $x \to +\infty$ ó si $x \to -\infty$]

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^x = 0^0 = e^t = e^0 = 1$ donde

$$t = \lim_{x\to 0^+} x\cdot \ln x = 0\cdot(-\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \frac{-\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} : \frac{-1}{x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0$$

Caso 7. Indeterminación $(\to +\infty)^{(\to 0)}$

Si f y g son dos funciones derivables en un entorno de $c \in \mathbb{R}$ y tales que $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, entonces con la transformación $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim\limits_{x\to c} e^{g(x)\cdot \ln(f(x))} = e^t$, donde $t = \lim\limits_{x\to c} g(x)\cdot \ln(f(x)) = \lim\limits_{x\to c} \dfrac{\ln(f(x))}{\dfrac{1}{g(x)}} = \dfrac{\infty}{\infty}$, se aplica el caso 2 a las funciones $\ln(f(x))$ y $\dfrac{1}{g(x)}$

[La regla también es válida si $x \to +\infty$ ó si $x \to -\infty$]

<u>Ejemplo</u>: $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x)^{\left(\frac{1}{1-\ln x}\right)} = (+\infty)^0 = e^t = e^0 = 1$ donde

$$t = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{1-\ln x}\right)\cdot \ln(\ln x) = 0\cdot\infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(\ln x)}{1-\ln x} = \frac{+\infty}{-\infty} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}\right) : \frac{-1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{\ln x} = \frac{-1}{+\infty} = 0$$

<u>3. Derivabilidad de una función en un punto. Derivadas laterales.</u>

Se dice que una función **f es derivable por la derecha** en un punto de abscisa x = c de su dominio si $f'_+(c) = \lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es un número real.

A este límite se le llama **derivada lateral por la derecha de f en x = c**

Se dice que una función **f es derivable por la izquierda** en un punto de abscisa x = c de su dominio si $f'_-(c) = \lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{f(c+h)-f(c)}{h}$ es un número real.

A este límite se le llama **derivada lateral por la izquierda de f en x = c**

$$\boxed{f \text{ es derivable en } x = c} \Leftrightarrow \boxed{f'_+(c) \text{ y } f'_-(c) \text{ son números reales iguales}}$$

Si f es derivable en x = c, entonces $f'(c) = f'_+(c) = f'_-(c)$

Geometricamente, si una función es derivable en un punto de abscisa x = c, entonces su gráfica tiene en dicho punto un trazado "suave, sin cambios bruscos".

Razones por las que una función no es derivable en un punto de abscisa x = c

1. Porque alguna de las derivadas laterales en $x = c$ sea $+\infty$ ó $-\infty$

2. Porque las derivadas laterales en $x = c$ sean números reales distintos.

3. Porque no sea continua en dicho punto.

■ Análisis de la derivabilidad de una función en un punto

En la práctica, para analizar la derivabilidad de una función en un punto, se suele aplicar el siguiente resultado:

Si f es continua en $x = c$ y el $\lim\limits_{x\to c^-} f'(x)$ es un número real	$\Rightarrow$	f es derivable por la izquierda en $x = c$ $f'_-(c) = \lim\limits_{x\to c^-} f'(x)$
Si f es continua en $x = c$ y el $\lim\limits_{x\to c^+} f'(x)$ es un número real	$\Rightarrow$	f es derivable por la derecha en $x = c$ $f'_+(c) = \lim\limits_{x\to c^+} f'(x)$

Importante: obsérvese que para poder aplicar este resultado, es condición necesaria que la función sea continua en $x = c$. Si no lo fuera, automáticamente no sería derivable en $x = c$, y por lo tanto, sería absurdo aplicar este resultado.

Ejemplo 1: para analizar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x^2-\dfrac{x}{2}+1 & \text{si} \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(1+x)}{x} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$ en $x = 0$, primero se estudia si es continua en dicho punto.

En efecto, es continua en $x = 0$ porque los límites laterales y la imagen en $x = 0$ coinciden.

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} x^2-\frac{x}{2}+1=1 \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(1+x)}{x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=1 \qquad f(0) = 1$$

Ahora, en lugar de calcular las derivadas laterales mediante la definición, se calcula $f'(x)$:

$$f'(x)=\begin{cases} 2x-\dfrac{1}{2} & \text{si} \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \end{cases}$$

$$f'_-(0)=\lim_{x\to 0^-} f'(x)=\lim_{x\to 0^-} 2x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f \text{ es derivable en } x=0 \text{ por la izquierda.}$$

$$f'_+(0)=\lim_{x\to 0^+} f'(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(1+x)^2}-\frac{1}{1+x}}{2x}=\frac{0}{0}=$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-2}{(1+x)^3}+\frac{1}{(1+x)^2}}{2}=-\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow$ f es derivable en $x = 0$ por la derecha.

La función es derivable en $x = 0$ ya que es derivable lateralmente tanto por la izquierda como por la derecha y sus derivadas laterales son iguales.

Ejemplo 2: para analizar la derivabilidad de la función $f(x)=\begin{cases} x+x^2 & \text{si} \quad x<2 \\ 5+\sqrt{x-1} & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$ en x = 2, primero se estudia si es continua en dicho punto.

En efecto, es continua en x = 2 porque $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6 = f(2)$

Ahora, en lugar de calcular las derivadas laterales mediante la definición, se calcula $f'(x)$:

$$f'(x)=\begin{cases} 1+2x & \text{si} \quad x<2 \\ \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} & \text{si} \quad x>2 \end{cases}$$

$f'_-(2) = \lim\limits_{x\to 2^-} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} 1+2x = 5 \quad \Rightarrow$ f es derivable lateralmente en x = 2 por la izquierda.

$f'_+(2) = \lim\limits_{x\to 2^+} f'(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow$ f es derivable lateralmente en x = 2 por la derecha.

Sin embargo, f no es derivable en x = 2 ya que sus derivadas laterales son distintas.

4. Monotonía en un intervalo. Extremos locales.

Monotonía en un intervalo

Una función f es **creciente** en un intervalo I si ∀ a, b ∈ I, siendo a < b, entonces f(a) < f(b)

Una función f es **decreciente** en un intervalo I si ∀ a, b ∈ I, siendo a < b, entonces f(a) > f(b)

Una función f es **constante** en un intervalo I si ∀ a, b ∈ I, siendo a < b, entonces f(a) = f(b)

Condición suficiente de monotonía: dada una función f derivable en un intervalo I,

– Si $f'(x)>0$ ∀ x ∈ I, entonces f es creciente en el intervalo I

– Si $f'(x)<0$ ∀ x ∈ I, entonces f es decreciente en el intervalo I

Extremos locales

Una función f tiene un **máximo local** en un punto (c, f(c)) si existe un entorno de c donde **f(c) > f(x)** ∀ x ≠ c perteneciente a dicho entorno.

Una función f tiene un **mínimo local** en un punto (c, f(c)) si existe un entorno de c donde **f(c) < f(x)** ∀ x ≠ c perteneciente a dicho entorno.

Condición necesaria de extremo local: si una función f es derivable en un valor c de su dominio y tiene un extremo local en el punto (c, f(c)), entonces $f'(c)=0$

Condición suficiente de extremo local: dada una función f dos veces derivable en un valor c de su dominio,

– Si $f'(c)=0$ y $f''(c)<0$, entonces f tiene un máximo local en el punto (c, f(c))

– Si $f'(c)=0$ y $f''(c)>0$, entonces f tiene un mínimo local en el punto (c, f(c))

Nota: en la práctica, esta condición se suele utilizar en los **problemas de optimización**.

***Condición suficiente de extremo local para el análisis gráfico de una función**:

Una función f tiene un máximo local en el punto (c, f(c)) si se cumplen estas tres condiciones:
(C1) $f'(c) = 0$ (C2) $f' > 0$ a la izquierda de $x = c$ (C3) $f' < 0$ a la derecha de $x = c$

Una función f tiene un mínimo local en el punto (c, f(c)) si se cumplen estas tres condiciones:
(C1) $f'(c) = 0$ (C2) $f' < 0$ a la izquierda de $x = c$ (C3) $f' > 0$ a la derecha de $x = c$

Puntos críticos de una función

Dada una función f y un valor c de su dominio, se dice que el punto (c, f(c)) es un **punto crítico** de f si ocurre una de las siguientes situaciones:

1) f no es derivable en $x = c$ ó 2) f es derivable en $x = c$ pero $f'(c) = 0$

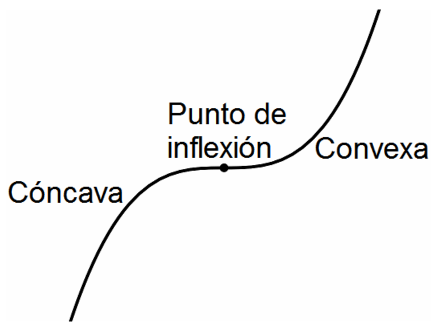
En consecuencia, para hallar los extremos locales de una función, primero hay que hallar sus puntos críticos.

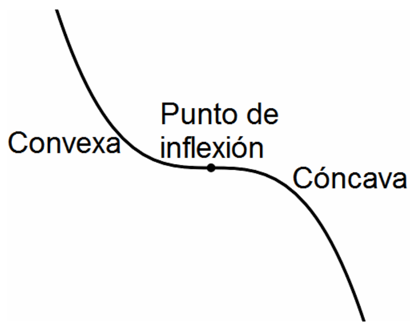
5. Curvatura en un intervalo. Puntos de inflexión.

Una función es **cóncava** en un intervalo si su gráfica queda por **debajo** de la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función es **convexa** en un intervalo si su gráfica queda por **arriba** de la recta tangente a la curva en cada uno de los puntos del intervalo.

Una función f tiene un **punto de inflexión** en (c, f(c)) si pasa de convexa a cóncava o viceversa en dicho punto. En un punto de inflexión, la recta tangente en dicho punto atraviesa la curva, pasando de estar por debajo a estar por arriba de la gráfica (o viceversa).





Condición suficiente de curvatura: dada f dos veces derivable en un intervalo I,

– Si $f''(x) > 0 \ \forall x \in I$, entonces f es convexa en el intervalo I

– Si $f''(x) < 0 \ \forall x \in I$, entonces f es cóncava en el intervalo I

Condición necesaria de punto de inflexión: si una función f es dos veces derivable en un valor c de su dominio y tiene un punto de inflexión en (c, f(c)), entonces $f''(c) = 0$

Condición suficiente de punto de inflexión: dada una función f tres veces derivable en un valor c de su dominio,

Si $f''(c) = 0$ y $f'''(c) \neq 0$, entonces f tiene un punto de inflexión en (c, f(c))

***Condición suficiente de punto de inflexión para el análisis gráfico de una función**:

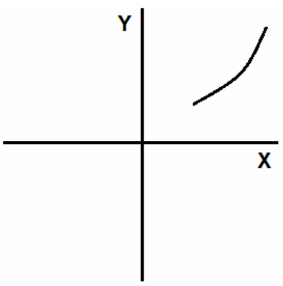
Una función f tiene un punto de inflexión en (c, f(c)) si se cumplen estas dos condiciones:
(C1) $f''(c) = 0$ (C2) f'' cambia de signo a izquierda y derecha de $x = c$

6. Ramas parabólicas y asíntotas de una función.

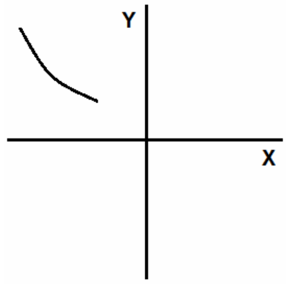
Ramas parabólicas

De una función f se dice que una de sus ramas infinitas es una rama parabólica **si su gráfica no se aproxima cada vez más a una recta** y se da alguna de las siguientes situaciones:

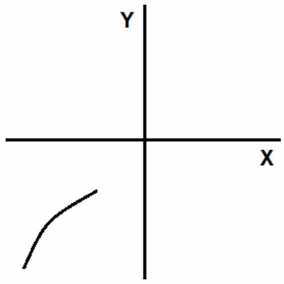
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



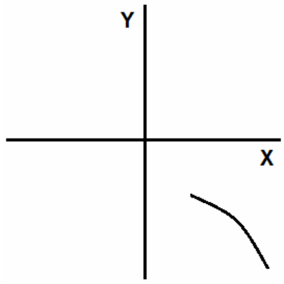
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$



$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$



$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$



Asíntotas de una función

En general, se llama asíntota de una función $y = f(x)$ a una recta a la que se aproxima cada vez más la gráfica de la función, sin llegar a tocarla, cuando la variable x tiende a más/menos infinito o a un número real c ya sea por la izquierda o por la derecha. Según la inclinación de la asíntota, ésta puede ser horizontal, vertical u oblicua.

¿Puede la gráfica de una función cortar a una de sus asíntotas? La respuesta es sí. Pero esto solo puede ocurrir en valores pequeños de x cercanos a cero.

<u>Ejemplo</u>: la función $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$ y su asíntota horizontal $y = 0$, se cortan en el punto (0, 0)

A) Asíntota horizontal

Se dice que la recta $y = k$ es una **asíntota horizontal** (AH) de una función f si

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = k \qquad \text{ó} \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = k$$

<u>Ejemplo</u>: la recta $y = 4$ es asíntota horizontal de la función $f(x) = \dfrac{8x-1}{2x+3}$ porque

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{8x-1}{2x+3} = \frac{8}{2} = 4 \qquad\qquad \lim_{x\to-\infty} \frac{8x-1}{2x+3} = \frac{8}{2} = 4$$

Algunas aclaraciones:

A1. Hay funciones que no tienen asíntotas horizontales. Por ejemplo, cualquier función polinómica o las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $g(x) = \cos x$.

<u>Ejemplo</u>: dada la función $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ cuyo dominio es $\mathrm{Dom}(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Dado que $\lim\limits_{x\to-\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (-\infty)\cdot 1 = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = (+\infty)\cdot 1 = +\infty$, la función tiene dos ramas parabólicas pero no tiene asíntotas horizontales.

A2. Hay funciones que tienen una asíntota horizontal por los dos lados, tanto por el positivo como por el negativo, del eje de abscisas.

Ejemplo: la recta $y = 1$ es AH de $f(x) = \frac{2x-3}{2x+5}$ por los dos lados del eje X.

A3. Hay funciones que tienen una asíntota horizontal sólo por uno de los dos lados, el positivo o el negativo, del eje de abscisas.

Ejemplo: la recta $y = 0$ es AH de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ya que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$

En la parte negativa del eje X, la función ni siquiera está definida.

A4. Hay funciones que tienen dos asíntotas horizontales distintas: una por el lado positivo del eje X y otra diferente por el lado negativo de dicho eje.

Ejemplo: la función $f(x) = \operatorname{arctg} x$ tiene dos asíntotas horizontales:

la recta $y = \frac{\pi}{2}$ por la parte positiva del eje X la recta $y = -\frac{\pi}{2}$ por la parte negativa del eje X

B) Asíntota vertical

Se dice que la recta $x = c$ es una **asíntota vertical** (AV) de una función f si

$$\lim_{x\to c^+} f(x) = \pm\infty \quad \text{ó} \quad \lim_{x\to c^-} f(x) = \pm\infty$$

En las asíntotas verticales hay que elegir adecuadamente los valores en los cuales llevar a cabo el cálculo de límites laterales. No se debe probar con valores al azar. Los valores en los que es factible la existencia de una asíntota vertical se suelen elegir entre los que:

1. Anulan algún denominador de la función.

Ejemplo: para la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$, el valor $x = -1$ sería un candidato a asíntota vertical.

De hecho, la recta $x = -1$ es asíntota vertical de la función $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ porque

$$\lim_{x\to-1^+} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \qquad \lim_{x\to-1^-} \frac{2x}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

2. Son extremos de intervalos del dominio pero no pertenecen al dominio.

Ejemplo: como el dominio de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ es el intervalo $(0, +\infty)$, el valor $x = 0$ sería un candidato a asíntota vertical para esta función.

Algunas aclaraciones:

A1. Hay funciones que no tienen asíntotas verticales. Por ejemplo, cualquier función polinómica o las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $g(x) = \cos x$.

A2. Hay funciones que tienen una asíntota vertical por los dos lados, tanto a la derecha como a la izquierda de $x = c$.

Ejemplo: la recta $x = -1$ es AV de $f(x) = \frac{2x}{x+1}$ a izquierda y derecha de $x = -1$.

A3. Hay funciones que tienen una asíntota vertical sólo por uno de los dos lados, a la izquierda o a la derecha de x = c.

Ejemplo 1: la recta x = 0 es AV de $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ ya que:

$$\lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot (+\infty) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty \qquad [\lim_{x\to 0^-} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot 0 = 0]$$

Ejemplo 2: la recta x = 0 es AV de $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ ya que $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{+0} = -\infty$

Obsérvese que a la izquierda de x = 0, la función ni siquiera está definida.

A4. Hay funciones que tienen dos o más asíntotas verticales distintas, e incluso un número infinito de ellas.

Ejemplo 1: las rectas x = 2, x = –2, respectivamente, son asíntotas verticales de $f(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

Ejemplo 2: todas las rectas de la forma $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (infinitas) son asíntotas verticales de la función $f(x) = \operatorname{tg} x$

C) Asíntota oblicua

Se dice que la recta $y = mx + n$ es una **asíntota oblicua** (AO) de una función f si

$$m = \lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \quad \text{ó} \quad m = \lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} \neq 0 \qquad [\text{ m es un número real distinto de cero }]$$

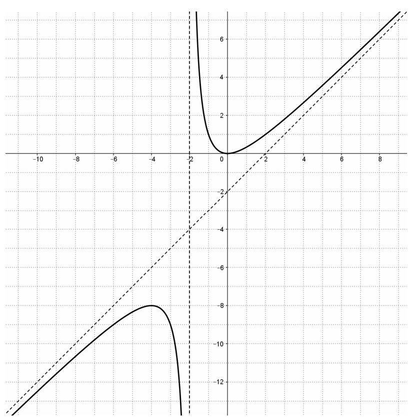
$$n = \lim_{x\to +\infty} (f(x) - mx) \quad \text{ó} \quad n = \lim_{x\to -\infty} (f(x) - mx) \qquad [\text{ n es un número real }]$$

Ejemplo: la recta y = x–2 es asíntota oblicua de $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x}$

$$m = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{x^2+2x}}{x} = \lim_{x\to \pm\infty} \frac{x^3}{x^3 + 2x^2} = 1 \neq 0$$

$$n = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 + 2x} - 1x \right) = \lim_{x\to \pm\infty} \left(\frac{-2x^2}{x^2 + 2x} \right) = -2$$

$$y = mx + n \qquad y = 1x - 2 \qquad y = x - 2$$



Algunas aclaraciones:

A1. Hay funciones que no tienen asíntotas oblicuas. Por ejemplo, cualquier función polinómica o las funciones trigonométricas $f(x) = \operatorname{sen} x$ ó $g(x) = \cos x$.

A2. Hay funciones que tienen una asíntota oblicua por los dos lados, tanto por el positivo como por el negativo, del eje de abscisas.

Ejemplo: la recta y = x+1 es AO de $f(x) = x \cdot e^{\frac{1}{x}}$ ya que: $m = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x \cdot e^{\frac{1}{x}}}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1 \neq 0$

$$n = \lim_{x\to\pm\infty} (x \cdot e^{\frac{1}{x}} - 1x) = \infty - \infty = \lim_{x\to\pm\infty} x \cdot (e^{\frac{1}{x}} - 1) = \infty \cdot 0 = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\frac{-1}{x^2} \cdot e^{\frac{1}{x}}}{\frac{-1}{x^2}} = 1$$

A3. Hay funciones que tienen una asíntota oblicua sólo por uno de los dos lados, el positivo o el negativo, del eje de abscisas.

Ejemplo: la recta y = 2x es AO de $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$ solo por la parte positiva del eje X.

(En la parte negativa del eje X, la recta y = 0 es asíntota horizontal).

A4. Hay funciones que tienen dos asíntotas oblicuas distintas, una a cada lado del eje X.

Ejemplo: la función $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ tiene dos AO: la recta $y = x$ por la parte positiva del eje X; la recta $y = -x$ por la parte negativa del eje X.

A5. ¿Puede una función tener asíntotas horizontales y oblicuas a la vez? Depende.

Una función no puede tener AH y AO a la vez por el mismo lado del eje de abscisas.

Sin embargo, la respuesta es sí, siempre que sean distintos lados del eje de abscisas.

Ejemplo: en la función $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$, la recta y = 2x es asíntota oblicua en el lado positivo del eje X. En el lado negativo del eje X, la recta y = 0 es asíntota horizontal.

7. Representación gráfica de funciones.

Para la representación gráfica de una función, hay que **saber determinar algebraicamente** cualquiera de los **aspectos esenciales** que siguen a continuación:

– Dominio de la función.
– Puntos de corte con los ejes.
– Intervalos de monotonía/extremos locales.
– Intervalos de curvatura/puntos de inflexión.
– Asíntotas verticales, horizontales y oblicuas.
– Ramas parabólicas.

Aspectos complementarios

Recorrido de la función, posibilidad de simetría par o impar en la gráfica, periodicidad, etc.

8. Problemas de optimización.

Los problemas de **optimización** de funciones se encuentran entre las aplicaciones de mayor importancia del cálculo de derivadas. En un problema de optimización se trata de averiguar el extremo relativo (**máximo** o **mínimo**) de una función.

Para resolver un problema de optimización, es conveniente seguir los siguientes pasos:

Paso 1. Mediante los datos del enunciado se escribe la expresión analítica de la función cuyo valor extremo es el objetivo del problema, la *función objetivo*.

Paso 2. Si esta función contiene más de una variable, se debe transformar en una función que dependa solamente de una variable, utilizando alguna relación entre los datos que ofrezca el enunciado o alguna relación previamente conocida.

Paso 3. Calcular los extremos relativos de la *función objetivo* y elegir la solución que responde a lo que se pregunta en el enunciado.

Paso 4. Algunas veces, también hay que averiguar el valor alcanzado por la función en el valor extremo.

Ejemplo. De todos los triángulos cuya base y altura suman 20 cm, hallar la base y altura del que tiene área máxima. ¿Cuánto vale finalmente esa área máxima?

Solución: si se nombran con las letras **x** e **y** a la base y altura del triángulo respectivamente, entonces la función que cuyo máximo hay que hallar es $F(x,y)=\dfrac{x\cdot y}{2}$

Esta función depende de dos variables. Utilizando la relación $x+y=20$ que se deduce del enunciado, se puede despejar $y=20-x$. Al sustituir dicha variable en la expresión anterior, se obtiene la función $f(x)=\dfrac{x\cdot(20-x)}{2}=\dfrac{20x-x^2}{2}$, que depende de una sola variable.

$$f'(x)=\frac{20-2x}{2}=10-x=0 \quad\Rightarrow\quad x=10$$

$$f''(x)=-1 \quad\Rightarrow\quad f''(10)=-1 \quad\Rightarrow\quad x=10 \text{ es máximo relativo} \qquad y=20-x=10$$

$$A_{\text{máx}}=\frac{10\cdot 10}{2}=50$$

Respuesta: la base mide 10 cm, la altura mide 10 cm y el área máxima es 50 cm^2.

9. Continuidad en un intervalo. Teorema de Bolzano.

Una función es **continua en un intervalo abierto** (a, b) si es continua en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Ejemplo: la función $f(x)=\frac{1}{x}$ no es continua en (–1, 1) ya que no es continua en x = 0, donde presenta una discontinuidad de salto infinito. En cambio, sí es continua en el intervalo (0, 1).

Una función es **continua en un intervalo cerrado** [a, b] si:

1. Es continua en el intervalo abierto (a, b)
2. Es continua por la derecha en x = a
3. Es continua por la izquierda en x = b

Ejemplo: la función $f(x)=\frac{1}{x}$ no es continua en [0, 1] ya que no es continua en x = 0 por la derecha, donde presenta una discontinuidad de salto infinito. En cambio, sí es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{4},\ 1\right]$, de hecho lo es en cualquier intervalo cerrado que excluya el valor x = 0.

Teorema de Bolzano

Si f es una función continua en [a, b] y toma valores de signo opuesto en los extremos, entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que f(c) = 0

Graficamente, este teorema asegura la existencia de al menos un valor c en el interior del intervalo (a, b) en el que la gráfica de la función corta al eje X.

Ejemplo: la función $f(x)=x^2-4x+3$ cumple las condiciones del Teorema de Bolzano en el intervalo [0, 2] ya que es continua en dicho intervalo y los valores que toma en los extremos son de signo opuesto: f(0) = 3 y f(2) = –1

En consecuencia, existe un valor $c \in (0, 2)$ tal que f(c) = 0

Teorema del Valor Intermedio (como caso particular del Teorema de Bolzano)

Si f es una función continua en [a, b] y k es un número real comprendido entre f(a) y f(b), entonces existe al menos un valor $c \in (a, b)$ tal que f(c) = k

Demostración: basta aplicar el Teorema de Bolzano a la función $g(x)=f(x)-k$ en [a, b]

Ejemplo: la función $f(x)=x^2-4x+3$ cumple estas condiciones en el intervalo [0, 5] para el valor k = 6 ya que es continua en dicho intervalo y el valor k = 6 está comprendido entre los valores f(0) = 3 y f(5) = 8

En consecuencia, existe un valor $c \in (0, 5)$ tal que f(c) = 6

10. Extremos absolutos de una función. Teorema de Weierstrass.

Una función f alcanza **un máximo absoluto** en un punto (c, f(c)) si $f(c) \geq f(x), \forall x \in Dom(f)$

Nótese que el valor $c \in Dom(f)$ y el valor f(c) es el máximo valor alcanzado por la función.

Una función f alcanza **un mínimo absoluto** en un punto (c, f(c)) si $f(c) \leq f(x), \forall x \in Dom(f)$

Nótese que el valor $c \in Dom(f)$ y el valor f(c) es el mínimo valor alcanzado por la función.

Se llaman **extremos absolutos** de una función al máximo y al mínimo absolutos de la misma. Un extremo absoluto puede ser alcanzado en sólo uno o en varios valores diferentes del dominio de la función.

Si una función tiene máximo (mínimo) absoluto, está acotada superiormente (inferiormente) por dicho valor.

Teorema de Weierstrass

Si una función es continua en un intervalo cerrado [a, b], entonces alcanza un máximo y un mínimo absolutos en dicho intervalo.

Ejemplo 1: la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es continua en el intervalo $[0, \pi]$. El Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza un máximo absoluto (el valor 1) y un mínimo absoluto (el valor 0) en dicho intervalo.

Ejemplo 2: la función $f(x) = \ln x$ es continua en el intervalo $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$. El Teorema de Weierstrass asegura que f alcanza un mínimo absoluto y un máximo absoluto en dicho intervalo.

11. Derivabilidad de una función en un intervalo. Teorema del Valor Medio.

Una función es **derivable en un intervalo abierto** (a, b) si es derivable en cada uno de los puntos de dicho intervalo.

Ejemplo: la función $f(x) = |x|$ no es derivable en (–1, 1) ya que no es derivable en x = 0, donde presenta un punto anguloso. En cambio, sí es derivable en el intervalo (0, 1).

Una función es **derivable en un intervalo cerrado [a, b]** si:

1. Es derivable en el intervalo abierto (a, b)
2. Es derivable por la derecha en el extremo x = a
3. Es derivable por la izquierda en el extremo x = b

Ejemplo: la función $f(x) = |x|$ no es derivable en [0, 1] ya que no es derivable en x = 0, donde presenta un punto anguloso. En cambio, sí es derivable en el intervalo $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$, de hecho lo es en cualquier intervalo cerrado que excluya el valor x = 0.

Teorema del Valor Medio de Lagrange

Si f es una función continua en [a, b] y derivable en (a, b), entonces existe al menos un valor c $\in$ (a, b) tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Graficamente, este teorema asegura la existencia de un punto interior de la gráfica en el que la recta tangente es paralela a la recta secante que pasa por los extremos (a, f(a)) y (b, f(b))

<u>Ejemplo</u>: la función $f(x)=3x^2$ cumple las condiciones del Teorema del Valor Medio en el intervalo [0, 4] ya que es continua y derivable en dicho intervalo.

En consecuencia, existe un valor $c \in (0, 4)$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(4)-f(0)}{4-0}=\dfrac{48-0}{4-0}=12$
(Se puede averiguar que c = 2)

Teorema de Rolle (como caso particular del Teorema del Valor Medio)

Si f es una función continua en [a, b], derivable en (a, b) y f(a) = f(b), entonces existe al menos un valor c $\in$ (a, b) tal que $f'(c)=0$

Graficamente, este teorema asegura la existencia de un punto interior de la gráfica en el que la recta tangente es paralela al eje X.

<u>Ejemplo</u>: la función $f(x)=x^2-4x+1$ cumple las condiciones del Teorema de Rolle en el intervalo [1, 3] ya que es continua y derivable en dicho intervalo y los valores que toma en los extremos son iguales: f(1) = f(3) = –2

En consecuencia, existe un valor $c \in (1, 3)$ tal que $f'(c)=0$ (Se puede averiguar que c = 2)