DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 2. CÁLCULO INTEGRAL.

IES LA BAHIA

ACTIVIDADES

1. Integral indefinida de una función.

1. a) Hallar una primitiva de $f(x) = 2x$ cuya gráfica pase por el punto (1, 3).

b) Hallar una primitiva de $f(x) = \cos x$ cuya gráfica pase por el punto (0, 1).

2. Aplicar las propiedades de la integral indefinida para calcular $\int \frac{2x^2+x-1}{x}\,dx$

3. ¿Es cierto o falso que $\int x^2\,dx = \int x\cdot x\,dx = \int x\,dx \cdot \int x\,dx$? ¿Por qué?

2. Integrales inmediatas.

4. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$ b) $\int \frac{(x+1)\cdot(x^2+3)}{x^3}\,dx$ c) $\int \sqrt[3]{2x} - \sqrt[5]{4x}\,dx$

d) $\int \frac{x^4-2x+3}{x^6}\,dx$ e) $\int \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{5x}}{3x}\,dx$ f) $\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

g) $\int \frac{8\sqrt[3]{x}}{3} + 3\sqrt{x}\,dx$ h) $\int \sqrt[3]{x}\cdot(\sqrt{x}+1)\,dx$ i) $\int \frac{x+1}{x}\,dx$

j) $\int \frac{1}{x-a}\,dx$ k) $\int e^{2x} + e^{\left(\frac{x}{3}\right)}\,dx$ l) $\int 15^x\,dx$

m) $\int \operatorname{sen}(5x) + \cos\left(\frac{x}{5}\right)dx$ n) $\int \operatorname{tg}^2 x\,dx$ ñ) $\int \frac{2-\operatorname{sen}^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$

o) $\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{1+x^2}\,dx$ p) $\int \sec^2 x + \operatorname{cosec}^2 x\,dx$ q) $\int \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} - \frac{3}{\cos^2 x}\,dx$

5. De una función f se sabe que su derivada es $f'(x) = x^2 + x - 6$ y que el valor que alcanza en su máximo relativo, es el triple del valor que alcanza en su mínimo relativo. Determinar su expresión analítica.

6. De una función f se sabe que su derivada segunda es $f''(x) = 12x - 6$ y que la recta tangente a su gráfica en $x = 2$ tiene por ecuación $4x–y–7 = 0$. Determinar su expresión analítica.

7. De una función f se sabe que su derivada segunda es $f''(x) = x^2 - 1$ y que la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa x = 0 es la recta y = 1. Determinar su expresión analítica.

8. De una función $f : [0, 4] \to \mathbb{R}$, se sabe que es continua y derivable y que su derivada es la función $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{3} & \text{si } 0 < x < 3 \\ 8 - 2x & \text{si } 3 \le x < 4 \end{cases}$ y que $f(1) = \dfrac{16}{3}$. Determinar su expresión analítica.

3. Integración por cambio de variable.

9. Calcular las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable que se indica:

a) $\displaystyle\int \frac{dx}{3x+2}$ $\quad t = 3x + 2$

b) $\displaystyle\int \frac{dx}{3-x}$ $\quad t = 3 - x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}dx$ $\quad t = 1 + x^2$

d) $\displaystyle\int \frac{2}{(x+1)^3}dx$ $\quad t = x + 1$

e) $\displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^3}dx$ $\quad t = 1 + x^3$

f) $\displaystyle\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$ $\quad t = x^3 + 1$

g) $\displaystyle\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ $\quad t = 1 - x^2$

h) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}dx$ $\quad t = \ln x$

i) $\displaystyle\int \frac{\ln x}{x}\,dx$ $\quad t = \ln x$

j) $\displaystyle\int x^3 \cdot e^{-x^4}\,dx$ $\quad t = x^4$

k) $\displaystyle\int e^{7x}\,dx$ $\quad t = 7x$

l) $\displaystyle\int e^x \cos(e^x)\,dx$ $\quad t = e^x$

m) $\displaystyle\int x^4 \cdot e^{x^5}\,dx$ $\quad t = x^5$

n) $\displaystyle\int e^{-x}\,dx$ $\quad t = -x$

ñ) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad t = \sqrt{x}$

10. Calcular las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable que se indica:

a) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}2x}{3+\operatorname{sen}^2 x}dx$ $\quad t = 3 + \operatorname{sen}^2 x$

b) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{1+\operatorname{sen}^2 x}dx$ $\quad t = \operatorname{sen} x$

c) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x}dx$ $\quad t = \cos x$

d) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt[3]{\operatorname{sen}^2 x}}dx$ $\quad t = \operatorname{sen} x$

e) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\sqrt{\cos x}\,dx$ $\quad t = \cos x$

f) $\displaystyle\int \operatorname{sen}^5 x\cos x\,dx$ $\quad t = \operatorname{sen} x$

g) $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\,dx$ $\quad t = \cos x$

h) $\displaystyle\int \operatorname{cotg} x\,dx$ $\quad t = \operatorname{sen} x$

i) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx$ $\quad t = \operatorname{arctg} x$

11. Calcular las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable que se indica:

a) $\displaystyle\int \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+1}}dx$ $\quad t = x^2 - 6x + 1$

b) $\displaystyle\int 6x\cos x^2\,dx$ $\quad t = x^2$

c) $\displaystyle\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad t = \sqrt{x}$

d) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{3+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ $\quad t = 3 + \sqrt{x}$

e) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x}\,dx$ $\quad t = \ln x$

f) $\displaystyle\int \frac{dx}{1+(x+1)^2}$ $\quad t = x + 1$

g) $\displaystyle\int (2x-3)\operatorname{tg}(x^2-3x)\,dx$ $\quad t = x^2 - 3x$

h) $\displaystyle\int x\sqrt{1+x^2}\,dx$ $\quad t = 1 + x^2$

i) $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}$ $\quad t = \ln x$

12. Calcular las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable que se indica:

a) $\int \frac{4x^3}{1+x^8}dx \quad t = x^4$ b) $\int \frac{e^x}{e^{2x}-2e^x+1}dx \quad t = e^x - 1$ c) $\int \frac{dx}{\sqrt{25-x^2}} \quad t = \frac{x}{5}$

d) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx \quad t = x^2$ e) $\int \frac{1+\ln x}{5+x\ln x}dx \quad t = 5 + x\ln x$ f) $\int \frac{1}{9+x^2}dx \quad t = \frac{x}{3}$

g) $\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}dx \quad t = \sqrt{x+1} - 1$ h) $\int \frac{7^{2x}}{7^{2x}+5}dx \quad t = 7^{2x}$

13. Calcular $\int \frac{x^2}{\sqrt{(1+x^3)^3}}dx$ mediante el cambio de variable $t = 1 + x^3$ y determinar la primitiva cuya cuya gráfica pasa por el punto (2, 0)

14. Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{\ln x}{2x}$, obtener la expresión analítica de la función F(x) primitiva de f tal que F(1) = 2.

15. Averiguar la función $f : (1, +\infty) \to \mathbb{R}$ sabiendo que su segunda derivada es $f''(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$ y que la recta tangente a la gráfica de f en x = 2 tiene por ecuación y = x+2.

4. Integración por partes.

16. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int x \operatorname{sen} x \, dx$ b) $\int x \cos x \, dx$ c) $\int (x-3) \operatorname{sen} x \, dx$ d) $\int x^2 \cos x \, dx$

e) $\int x \ln x \, dx$ f) $\int x^2 \ln x \, dx$ g) $\int x^3 \ln x \, dx$ h) $\int \sqrt{x} \ln x \, dx$

i) $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx$ j) $\int \frac{\ln x}{x^2} dx$ k) $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$ l) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$

17. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int (2+3x)\, e^x \, dx$ b) $\int (x^2-3x+1)\, e^x \, dx$ c) $\int x^3 e^x \, dx$ d) $\int (x+1)^2 e^x \, dx$

e) $\int x^2 e^{2x} \, dx$ f) $\int x^2 e^{3x} \, dx$ g) $\int x\, e^{-3x} \, dx$ h) $\int (x^2-1)\, e^{-x} \, dx$

i) $\int \operatorname{arcsen} x \, dx$ j) $\int \operatorname{arctg} x \, dx$ k) $\int x \operatorname{arctg} x \, dx$ l) $\int e^x \cos x \, dx$

m) $\int e^x \operatorname{sen} x \, dx$ n) $\int e^{2x} \operatorname{sen} x \, dx$ ñ) $\int e^{-3x} \cos x \, dx$ o) $\int \cos(\ln x) \, dx$

18. Dada la función $f(x) = (x+2)\ln x$ para x > 0, calcular $\int f(x)\, dx$ y encontrar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

19. Determinar la función $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ sabiendo que su primera derivada es $f'(x)=\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$ y que la gráfica de f pasa por el punto (1, 0).

20. Dada la función $f(x)=x\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)$, calcular $\int f(x)\,dx$ y encontrar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

21. Calcular la función primitiva de $f(x)=x^2e^{2x}$ cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

22. Determinar la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sabiendo que su primera derivada es $f'(x)=(x+1)^2e^x$ y que f(0) = 4.

23. Determinar la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cuya segunda derivada es $f''(x)=x\cdot e^x$, y además se sabe que su gráfica pasa por el origen de coordenadas y que tiene un extremo relativo en x = 1.

5. Integración de funciones racionales.

24. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{x^2-x+1}{x^3-3x^2-13x+15}\,dx$ b) $\displaystyle\int\frac{1}{(x+1)^2(x-1)}\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{x^3-x^2+1}{(x-1)^4}\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{x^2+x}{x^3-3x^2+3x-1}\,dx$ e) $\displaystyle\int\frac{x-1}{x^2+x-6}\,dx$ f) $\displaystyle\int\frac{1}{x^2+2x}\,dx$

g) $\displaystyle\int\frac{6}{x(x-1)(x+2)}\,dx$ h) $\displaystyle\int\frac{3x^2+2x+5}{(x-2)^2(x+1)^2}\,dx$ i) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x\,(x-1)^2}\,dx$

25. Calcular las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int\frac{x^3-1}{4x^3-x}\,dx$ b) $\displaystyle\int\frac{x^3+2x^2-x+1}{x^2-1}\,dx$ c) $\displaystyle\int\frac{2x^2+2x-1}{x+1}\,dx$

d) $\displaystyle\int\frac{5x^2-x-160}{x^2-25}\,dx$ e) $\displaystyle\int\frac{2x^4-2x^2+4x+1}{x^3-3x+2}\,dx$ f) $\displaystyle\int\frac{x^4-x^3-x-1}{x^3-x^2}\,dx$

26. Dada la función $f(x)=\dfrac{3x^2+4}{(x-2)^2}$ para $x\neq 2$, calcular $\int f(x)\,dx$ y encontrar la primitiva de la función f cuya gráfica pasa por el punto (3, 5).

27. Dada la función definida por $f(x)=\dfrac{x^4}{x^2-1}$ para $x\neq 1,-1$

Hallar todas las funciones primitivas de f y calcular la primitiva que pasa por el punto (2, 0).

28. Calcular la integral $I=\displaystyle\int\frac{dx}{(x-2)\sqrt{x+2}}$. Se sugiere aplicar el cambio de variable $t=\sqrt{x+2}$.

29. Calcular las siguientes integrales, aplicando el cambio de variable $t = e^x$:

a) $I = \int \frac{e^{3x} - e^x}{e^{2x} + 1}\, dx$ b) $I = \int \frac{1}{1 + e^x}\, dx$ c) $I = \int \frac{e^x}{e^{2x} - 4}\, dx$

30. Dada la función $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \frac{1 + e^x}{1 - e^x}$, hallar la primitiva de f cuya gráfica pasa por el punto (1, 1). Se sugiere aplicar el cambio de variable $t = e^x$.

31. Determinar la función primitiva de $f(x) = \frac{2}{2 - e^x}$ cuya gráfica pasa por el punto (0, 2).

32. Calcular la función primitiva de $f(x) = \ln(1 + x^2)$ cuya gráfica pasa por el punto (0, 1).

33. Determinar la función primitiva de $f(x) = x \cdot \operatorname{arctg} x$ cuya gráfica pasa por el punto (0, π).

34. Calcular la función primitiva de $f(x) = x \cdot \ln(1 + x)$ cuya gráfica pasa por el punto (1, 0).

35. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{\ln x}{(x + 1)^2}\, dx$ b) $\int \ln\left(\frac{x^2 + 1}{x}\right) dx$ c) $\int \ln(x^2 + 2x + 2)\, dx$ (CV $t = x+1$)

36. Determinar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en el punto de abscisa x = 1, sabiendo que $f(0) = 0$ y $f'(x) = \frac{(x - 1)^2}{x + 1}$ para $x > -1$.

37. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}\, dx$ b) $\int \frac{-2x}{(x - 1)^2 (x^2 + 1)}\, dx$ c) $\int \frac{1}{x^4 - 1}\, dx$

38. Calcular las siguientes integrales:

a) $\int \frac{dx}{x^3 + x^2 + x}$ b) $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 5}$ c) $\int \frac{3}{x^3 - 1}\, dx$ d) $\int \frac{5x^2 - 2x + 25}{x^3 - 6x^2 + 25x}\, dx$

e) $\int \frac{2x - 1}{x^2 - 6x + 13}\, dx$ f) $\int \frac{1}{x^3 + 1}\, dx$ g) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 17}\, dx$ h) $\int \frac{x^2 - 5x + 6}{(x - 4)(x^2 - 4x + 13)}\, dx$

6. Integral definida de una función.

39. Dada la función $f(x) = x^2$ en el intervalo [1, 4], calcular:

a) Las sumas superior e inferior asociadas a la partición $P_6 = \{1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5, 4\}$

b) Idem para la partición $P_{12} = \{1, 1.25, 1.5, 1.75, 2, 2.25, 2.5, 2.75, 3, 3.25, 3.5, 3.75, 4\}$

c) Idem para la partición $P_{30} = \left\{ \begin{array}{l} 1, 1.1, 1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, \\ 2.6, 2.7, 2.8, 2.9, 3, 3.1, 3.2, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6, 3.7, 3.8, 3.9, 4 \end{array} \right\}$

d) ¿Hacia qué número tienden dichas sumas cuando el número de elementos de la partición tiende a infinito? ¿Qué nombre recibe dicho valor y cómo se representa?

40. Interpretando geometricamente la integral definida, deducir el valor de $\int_0^2 |2x - 1|\, dx$

41. ¿ Cuál de las siguientes integrales tiene mayor valor? $I = \int_0^1 x^2\, dx$ $\quad J = \int_0^1 x\, dx$

42. Demostrar los siguientes resultados:

a) Si f es una función par en [–a, a], entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 2\int_0^a f(x)\, dx \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

b) Si f es una función impar en [–a, a], entonces $\int_{-a}^{a} f(x)\, dx = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

7. Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow.

43. Hallar la expresión analítica de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^x 2t\, dt$ b) $F(x) = \int_{\frac{\pi}{2}}^{x} \cos t\, dt$ c) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\, dt$ d) $F(x) = \int_0^x \mathrm{sen}^3 t\, dt$

44. Dada $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$

a) Calcular $\int f(t)\, dt$ mediante el cambio de variable $x = 1 + e^t$

b) Dada la función $g(x) = \int_0^x f(t)\, dt$, calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$

45. Considera la función $F: [0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definida por $F(x) = \int_0^x (2t + \sqrt{t})\, dt$

Hallar la ecuación de la recta tangente a la gráfica de F en el punto de abscisa $x = 1$

46. Dada la función $g(x) = \int_0^x \cos t^2\, dt$, calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x)}{x}$

47. Calcular las siguientes integrales definidas:

a) $\int_1^e \frac{1}{x}\,dx$ b) $\int_0^\pi \operatorname{sen}x\,dx$ c) $\int_2^4 \frac{2}{x^2-1}\,dx$ d) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x\cos 2x\,dx$

e) $\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x+1)^2}\,dx$ f) $\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{1+x^2}\,dx$ g) $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ h) $\int_2^3 \frac{x}{x^2-1}\,dx$

i) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{sen}x\cos x\,dx$ j) $\int_0^1 \frac{x}{x^2-x-2}\,dx$ k) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+3)}\,dx$ l) $\int_{-3}^3 |x|\,dx$

48. Dada $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\ln x & \text{si } 0<x\le 1\\ \ln(2-x) & \text{si } 1<x<2\end{cases}$, calcular $I=\int_1^{\frac{3}{2}} f(x)\,dx$

49. Dada $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}\sqrt{8x} & \text{si } 0\le x\le 8\\ \dfrac{x^2-32}{x-4} & \text{si } x>8\end{cases}$, calcular $I=\int_0^{10} f(x)\,dx$

50. Dada la función $f:[-3,3]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\sqrt{3+|x|}$, expresarla como función definida a trozos y calcular la integral $I=\int_{-3}^3 f(x)\,dx$

51. Dada la función $f(x)=ax^2+b$, hallar los valores de **a** y **b** sabiendo que la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en x = 3 es –12 y que $\int_0^6 f(x)\,dx=-18$.

52. Dada la función $f(x)=ax^2+b\ln x$ (para x > 0), hallar los valores de **a**, **b** sabiendo que alcanza un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^4 f(x)\,dx=27-8\ln(4)$.

53. Dada la función $f(x)=ax\ln x-bx$ (para x > 0), determinar los valores de **a**, **b** sabiendo que f tiene un extremo relativo en x = 1 y que $\int_1^2 f(x)\,dx=8\ln(2)-9$.

54. Sean $f:\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\to\mathbb{R}$ una función continua y F una función primitiva de f que cumple $F(0)=\frac{\pi}{3}$ y $F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\pi$. Calcular: a) $\int_0^{\pi/6}(3f(x)-\cos x)\,dx$ b) $\int_0^{\pi/6}(\operatorname{sen}F(x))\cdot f(x)\,dx$

55. Calcular las siguientes integrales aplicando el cambio de variable que se indica en cada caso:

a) $I=\int_3^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx$ CV $t=\sqrt{x+1}-1$ b) $I=\int_0^2 \frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}\,dx$ CV $t=1+x^2$

c) $I=\int_1^{16} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}\,dx$ CV $t=\sqrt[4]{x}$ d) $I=\int_0^3 \frac{1}{1+\sqrt[3]{x}}\,dx$ CV $t=\sqrt[3]{x}$

8. Área del recinto limitado por la gráfica de una función.

56. Para cada una de las siguientes curvas, esbozar la región del plano limitada por su gráfica y el eje de abscisas, y calcular su área:

a) $f(x) = x^2 - 3x$ b) $f(x) = x^2 - 5x + 4$ c) $f(x) = x^2 - 4x + 3$ d) $f(x) = 4x^3 - x^4$

57. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de $f(x) = x \cdot |x - 2|$ y el eje X y calcular su área.

58. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a - x^2$, averiguar el valor de **a** para que el área de la región limitada entre el eje de abscisas y su gráfica, sea igual a 36.

59. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a - 4x^2$, siendo **a** un número real positivo.

a) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y la recta y = 0.

b) Calcular el valor de **a** para que el área del recinto sea igual a 18.

60. Esbozar el recinto comprendido entre la gráfica de la curva $f(x) = \ln x$ y el eje de abscisas, desde su punto de corte con el mismo hasta el punto de abscisa x = e, y calcular su área.

61. Esbozar el recinto limitado por la gráfica de $f(x) = \ln(x + 3)$, el eje de abscisas y las rectas verticales x = 0, x = 1 y calcular su área.

62. Dada la función $f : \left(-\frac{e}{2}, +\infty\right) \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \ln(2x + e)$

a) Esbozar la gráfica de f calculando sus puntos de corte con los ejes de coordenadas.

b) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de f y los ejes de coordenadas.

63. Calcular el valor de **a** > 0, sabiendo que el área de la región determinada por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{3x}$, el eje de abscisas y la recta x = a vale 1/9.

64. Determinar el valor de **a** > 0, de forma que valga 1/4 el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = x \cdot e^{-x^2}$ en el intervalo [0, a] y el eje de abscisas.

65. Para cada una de las siguientes funciones, esbozar el recinto limitado por su gráfica y el eje de abscisas entre las rectas verticales que se indican, y calcular su área:

a) $f(x) = \operatorname{sen} x$ $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ b) $f(x) = \cos x$ $x = 0$, $x = \pi$

c) $f(x) = \cos x$ $x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{3\pi}{2}$ d) $f(x) = \operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$ $x = 0$, $x = \pi$

66. Dada la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 2|x| + 2$

Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f y el eje de abscisas dentro del intervalo [–1, 1] y calcular su área.

9. Área del recinto limitado por las gráficas de dos funciones.

67. En cada uno de los siguientes casos, esbozar el recinto limitado por las gráficas de las funciones, y calcular su área:

a) $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ b) $f(x) = 4x - x^2$, $g(x) = x^2$ c) $f(x) = 3 - 2x - x^2$, $g(x) = 3$

d) $f(x) = \dfrac{x^2}{2}$, $g(x) = \sqrt{2x}$ e) $f(x) = |x-1|$, $g(x) = 2$ f) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = |x|$

68. Esbozar el recinto limitado entre las gráficas de $f(x) = 1 + \ln x$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y las rectas verticales x = 1, x = 2 y calcular su área.

69. Dadas las funciones $f(x) = \ln(x+2)$ y $g(x) = \dfrac{1}{2}(x-3)$, esbozar el recinto determinado por la gráfica de f, la gráfica de g, la recta x = 1 y la recta x = 3, y calcular el área de dicho recinto.

70. Esbozar la región del plano comprendida entre la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{2x-2}$, la gráfica de la recta y = x–5 y el eje de abscisas y calcular su área.

71. Calcular el área de la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{1}{x}$ y la recta vertical x = 2.

72. Esbozar el recinto del primer cuadrante limitado por el eje X, la recta y = x, la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$ y la recta x = 3, y calcular su área.

73. Esbozar la región limitada por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = e^x$ y las rectas verticales x = 0, x = 2, y calcular su área.

74. Dadas las funciones $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, $g : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por f(x) = senx, g(x) = sen2x.

a) Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas, calculando sus puntos de corte.

b) Calcular el área del recinto limitado por ambas gráficas y las rectas x = 0, $x = \dfrac{\pi}{3}$.

75. Dadas las funciones $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$, $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definidas por f(x) = cosx, g(x) = senx.

a) Esbozar sus gráficas en unos mismos ejes de coordenadas, calculando sus puntos de corte.

b) Calcular el área del recinto limitado por ambas gráficas en el intervalo $\left[-\dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{\pi}{4}\right]$

76. Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x) = \text{sen}x$ y las rectas tangentes a dicha gráfica en los puntos de abscisa $x = 0$ y $x = \pi$, respectivamente.

77. Dadas las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=6x-x^2$, $g(x)=\left|x^2-2x\right|$.

Esbozar el recinto limitado por las gráficas de f y g, calculando los puntos de corte entre ambas gráficas, y calcular el área de dicho recinto.

78. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases}-x^2+6x-8 & \text{si} \quad x\leq 4\\ x^2-6x+8 & \text{si} \quad x>4\end{cases}$

a) Calcular los puntos de corte de la gráfica de f con la recta y = 2x–4.

b) Esbozar el recinto delimitado por la gráfica de f y dicha recta, y calcular su área.

79. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{2-x}$, esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, su recta tangente en x = 2 y el eje de ordenadas, y calcular su área.

80. Dada la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^{-2x}$

a) Averiguar el punto de la gráfica de f en el que la recta tangente es $y=-2ex$.

b) Esbozar el recinto limitado por la gráfica de f, la recta $y=-2ex$ y el eje de ordenadas, y calcular su área.

81. Dadas las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=3-x^2 \quad g(x)=-\dfrac{x^2}{4}$

a) Comprobar que la recta y = 4–2x es tangente a f(x) en x = 1 y es tangente a g(x) en x = 4.

b) Esbozar el recinto comprendido entre la recta y = 4–2x, la gráfica de f y la gráfica de g, y calcular el área de dicho recinto.

82. Dadas las funciones $f, g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas por $f(x)=-4x+2 \quad g(x)=-x^2+2x+c$

a) Si sus gráficas se cortan en el punto en el que g alcanza su máximo, deducir el valor de **c**.

b) Para c = –3, esbozar el recinto limitado por ambas gráficas y calcular su área.

83. Hallar el valor de **a**, sabiendo que a > 0 y que el área de la región comprendida entre la curvas $y=x^2$ e $y=a\sqrt{x}$ es igual a 1/3.

84. Determinar el valor de **a**, sabiendo que a > 0 y que el área del recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x)=x^2$, $g(x)=2a^2-x^2$ es igual a 72.

85. Hallar el valor de **a**, sabiendo que a > 0 y que el área del recinto limitado por las curvas de ecuaciones $y=\dfrac{x^2}{a}$, $y=\sqrt{ax}$, es igual a 3.

86. Determinar el valor de **a**, sabiendo que a > 0, y que el área del recinto limitado por la gráfica de la función $f(x)=x^2-ax$ y la recta de ecuación y = 2ax es igual a 36.

87. Dada la función $f(x)=x^4$, hallar la ecuación de la recta horizontal que corta a su gráfica formando con ella un recinto de área 8/5 u².

88. Siendo a >1, considerar el rectángulo de vértices A(1, 0), B(1, 1), C(a, 1), D(a, 0). La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$ (para $x \neq 0$), divide al rectángulo en dos recintos.

a) Realizar un esbozo de la gráfica de f y del rectángulo en un mismo sistema de coordenadas.

b) Averiguar el valor de **a** para que los dos recintos tengan el mismo área.

10. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

89. Para cada una de las siguientes funciones, hallar su valor medio en el intervalo que se indica y luego deducir el valor **c** del interior del intervalo cuya existencia afirma el teorema del valor medio para integrales:

a) $f(x) = 3x^2$ en $[-4, -1]$ b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ en $[0, 1]$ c) $f(x) = |\cos x|$ en $[-\pi, \pi]$

SOLUCIONES

1. a) $F(x)=x^2+2$; b) $F(x)=1+\operatorname{sen}x$

2. $x^2+x-\ln|x|+k$

3. No, ya que $\int x^2\,dx=\frac{x^3}{3}+k$ que es distinto de $\int x\,dx\cdot\int x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\frac{x^2}{2}=\frac{x^4}{4}+k$

4. a) $\frac{-2}{\sqrt{x}}+k$; b) $x+\ln|x|-\frac{3}{x}-\frac{3}{2x^2}+k$; c) $\frac{3x\sqrt[3]{2x}}{4}-\frac{5x\sqrt[5]{4x}}{6}+k$; d) $\frac{-1}{x}+\frac{1}{2x^4}-\frac{3}{5x^5}+k$;
e) $\sqrt[3]{x}+\frac{2\sqrt{5x}}{3}+k$; f) $\frac{4\sqrt[4]{x^3}}{3}+k$; g) $2x\sqrt[3]{x}+2x\sqrt{x}+k$; h) $\frac{6x}{11}\sqrt[6]{x^5}+\frac{3x}{4}\sqrt[3]{x}+k$;
i) $x+\ln|x|+k$; j) $\ln|x-a|+k$; k) $\frac{e^{2x}}{2}+3e^{\left(\frac{x}{3}\right)}+k$; l) $\frac{15^x}{\ln 15}+k$; m) $-\frac{\cos 5x}{5}+5\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{x}{5}\right)+k$;
n) tgx–x+k; ñ) –2cotgx+cosx+k; o) –arcsenx–3arctgx+k; p) tgx –cotgx +k; q) 2arcsenx–3tgx+k

5. $f(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-6x+\frac{71}{4}$

6. $f(x)=2x^3-3x^2-8x+13$

7. $f(x)=\frac{x^4}{12}-\frac{x^2}{2}+1$

8. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^2}{3}+5 & \text{si}\quad 0\le x<3\\ -x^2+8x-7 & \text{si}\quad 3\le x\le 4\end{cases}$

9. a) $\frac{\ln|3x+2|}{3}+k$; b) $-\ln|3-x|+k$; c) $\frac{\ln|1+x^2|}{2}+k$; d) $\frac{-1}{(x+1)^2}+k$; e) $\frac{\ln|1+x^3|}{3}+k$;
f) $\frac{2\sqrt{(x^3+1)^3}}{9}+k$; g) $-\sqrt{1-x^2}+k$; h) $\ln|\ln|x||+k$; i) $\frac{\ln^2|x|}{2}+k$; j) $-\frac{e^{-x^4}}{4}+k$; k) $\frac{e^{7x}}{7}+k$;
l) $\operatorname{sen}(e^x)+k$; m) $\frac{e^{x^5}}{5}+k$; n) $-e^{-x}+k$; ñ) $2e^{\sqrt{x}}+k$

10. a) $\ln|3+\operatorname{sen}^2x|+k$; b) arctg(senx)+k; c) $\frac{1}{\cos x}+k$; d) $3\sqrt[3]{\operatorname{sen}x}+k$; e) $\frac{-2\sqrt{\cos^3 x}}{3}+k$;
f) $\frac{\operatorname{sen}^6x}{6}+k$; g) $-\ln|\cos x|+k$; h) $\ln|\operatorname{sen}x|+k$; i) $\frac{\operatorname{arctg}^4x}{4}+k$

11. a) $\sqrt{x^2-6x+1}+k$; b) $3\operatorname{sen}x^2+k$; c) $2\operatorname{sen}\sqrt{x}+k$; d) $\frac{4\sqrt{(3+\sqrt{x})^3}}{3}+k$; e) $-\cos(\ln x)+k$;
f) arctg(x+1)+k; g) $-\ln|\cos(x^2-3x)|+k$; h) $\frac{\sqrt{(1+x^2)^3}}{3}+k$; i) arcsen(lnx)+k

12. a) $\operatorname{arctg}(x^4)+k$; b) $\frac{-1}{e^x-1}+k$; c) $\operatorname{arcsen}\left(\frac{x}{5}\right)+k$; d) $\frac{1}{2}\operatorname{arcsen}x^2+k$; e) $\ln|5+x\ln x|+k$;
f) $\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{x}{3}\right)+k$; g) $2(\sqrt{x+1}-1+\ln|\sqrt{x+1}-1|)+k$; h) $\frac{\ln|7^{2x}+5|}{\ln 49}+k$

13. $F(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt{1+x^3}}+k$; $F(x)=\dfrac{-2}{3\sqrt{1+x^3}}+\dfrac{2}{9}$

14. $F(x)=\dfrac{\ln^2 x}{4}+2$

15. $f(x)=-\ln(x-1)+2x$

16. a) –xcosx+senx+k; b) xsenx+cosx+k; c) $(3-x)\cos x+\text{sen}x+k$; d) $(x^2-2)\text{sen}x+2x\cos x+k$;
e) $\dfrac{x^2(2\ln|x|-1)}{4}+k$; f) $\dfrac{x^3(3\ln|x|-1)}{9}+k$; g) $\dfrac{x^4(4\ln|x|-1)}{16}+k$; h) $\dfrac{2x\sqrt{x}(3\ln|x|-2)}{9}+k$;
i) $x\ \text{tg}x+\ln|\cos x|+k$; j) $\dfrac{-(1+\ln|x|)}{x}+k$; k) $\dfrac{-(1+2\ln|x|)}{4x^2}+k$; l) $\dfrac{2(x-2)\sqrt{1+x}}{3}+k$

17. a) $(3x-1)\,e^x+k$; b) $(x^2-5x+6)\,e^x+k$; c) $(x^3-3x^2+6x-6)\,e^x+k$; d) $(x^2+1)\,e^x+k$;
e) $\dfrac{(2x^2-2x+1)\,e^{2x}}{4}+k$; f) $\dfrac{(9x^2-6x+2)\,e^{3x}}{27}+k$; g) $\dfrac{-(3x+1)\,e^{-3x}}{9}+k$;
h) $-(x+1)^2\,e^{-x}+k$; i) $x\ \text{arcsen}x+\sqrt{1-x^2}+k$; j) $x\ \text{arctg}x-\dfrac{\ln|1+x^2|}{2}+k$;
k) $\dfrac{(x^2+1)\ \text{arctg}x-x}{2}+k$; l) $\dfrac{(\text{sen}x+\cos x)\,e^x}{2}+k$; m) $\dfrac{(\text{sen}x-\cos x)\,e^x}{2}+k$;
n) $\dfrac{(2\text{sen}x-\cos x)\,e^{2x}}{5}+k$; ñ) $\dfrac{(\text{sen}x-3\cos x)\,e^{-3x}}{10}+k$; o) $\dfrac{x\cos(\ln x)+x\text{sen}(\ln x)}{2}+k$

18. $F(x)=\ln x\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)-\dfrac{x^2}{4}-2x+k$; $F(x)=\ln x\cdot\left(\dfrac{x^2}{2}+2x\right)-\dfrac{x^2}{4}-2x+\dfrac{9}{4}$

19. $f(x)=2\sqrt{x}\ln x-4\sqrt{x}+4$

20. $F(x)=2x\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)+k$; $F(x)=2x\text{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)+4\cos\left(\dfrac{x}{2}\right)-3$

21. $F(x)=\dfrac{(2x^2-2x+1)\,e^{2x}+3}{4}$

22. $f(x)=(x^2+1)\,e^x+3$

23. $f(x)=x\cdot e^x-2e^x+2$

24. a) $\dfrac{-2\ln|x-1|+13\ln|x+3|+21\ln|x-5|}{32}+k$; b) $\dfrac{1}{2(x+1)}+\dfrac{\ln|x-1|-\ln|x+1|}{4}+k$;
c) $\dfrac{-1}{3(x-1)^3}-\dfrac{1}{2(x-1)^2}-\dfrac{2}{x-1}+\ln|x-1|+k$; d) $\dfrac{-1}{(x-1)^2}-\dfrac{3}{x-1}+\ln|x-1|+k$;
e) $\dfrac{4\ln|x+3|+\ln|x-2|}{5}+k$; f) $\dfrac{\ln|x|-\ln|x+2|}{2}+k$; g) $-3\ln|x|+2\ln|x-1|+\ln|x+2|+k$;
h) $\dfrac{-7}{3(x-2)}-\dfrac{2}{3(x+1)}+k$; i) $\dfrac{-2}{x-1}+\ln|x|+\ln|x-1|+k$

25. a) $\frac{x}{4}+\ln|x|-\frac{9\ln|x+1/2|+7\ln|x-1/2|}{16}+k$; b) $\frac{x^2}{2}+2x+\frac{3\ln|x-1|-3\ln|x+1|}{2}+k$;

c) $x^2-\ln|x+1|+k$; d) $5x-4\ln|x-5|+3\ln|x+5|+k$; e) $x^2-\frac{5}{3(x-1)}+\frac{19\ln|x-1|+17\ln|x+2|}{9}+k$;

f) $\frac{x^2}{2}-\frac{1}{x}+2\ln|x|-2\ln|x-1|+k$

26. $F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+k$; $F(x)=3x+12\ln|x-2|-\frac{16}{x-2}+12$

27. $F(x)=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+k$; $F(x)=\frac{x^3}{3}+x-\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{2}\ln|x-1|+\frac{1}{2}\ln 3-\frac{14}{3}$

28. $I=\frac{\ln\left|\sqrt{x+2}-2\right|-\ln\left|\sqrt{x+2}+2\right|}{2}+k$

29. a) $I=e^x-2\operatorname{arctg}(e^x)+k$; b) $I=x-\ln(1+e^x)+k$; c) $I=\frac{1}{4}\ln\left(\frac{e^x-2}{e^x+2}\right)+k$

30. $F(x)=x-2\ln\left|1-e^x\right|+2\ln|1-e|$

31. $F(x)=x-\ln\left|2-e^x\right|+2$

32. $F(x)=x\ln\left|1+x^2\right|-2x+2\operatorname{arctg}x+1$

33. $F(x)=\frac{x^2}{2}\operatorname{arctg}x+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}x-\frac{1}{2}x+\pi$

34. $F(x)=\frac{2(x^2-1)\ln|1+x|+2x-x^2-1}{4}$

35. a) $\frac{x\ln|x|}{x+1}-\ln|x+1|+k$; b) $x\ln\left(\frac{x^2+1}{x}\right)-x+2\operatorname{arctg}(x)+k$;

c) $(x+1)\ln\left|x^2+2x+2\right|-2(x+1)+2\operatorname{arctg}(x+1)+k$

36. La recta $y=-\frac{5}{2}+\ln 16$

37. a) x–2arctgx+k; b) $\frac{1}{x-1}+\operatorname{arctg}x+k$; c) $\frac{\ln|x-1|-\ln|x+1|}{4}-\frac{\operatorname{arctg}x}{2}+k$

38. a) $\ln|x|-\frac{\ln\left|x^2+x+1\right|}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$; b) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-1}{2}\right)+k$;

c) $\ln|x-1|-\ln\left|\sqrt{x^2+x+1}\right|-\sqrt{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)+k$; d) $\ln|x|+2\ln\left|x^2-6x+25\right|+4\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{4}\right)+k$;

e) $\ln\left|x^2-6x+13\right|+\frac{5}{2}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-3}{2}\right)+k$; f); $\frac{\ln|x+1|}{3}-\frac{\ln\left|x^2-x+1\right|}{6}+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k$

g) $\frac{\ln\left|x^2+2x+17\right|}{2}-\frac{1}{4}\operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{4}\right)+k$; h) $\frac{2\ln|x-4|}{13}+\frac{11\ln\left|x^2-4x+13\right|}{26}+\frac{3}{13}\operatorname{arctg}\left(\frac{x-2}{3}\right)+k$

39. a) $S_6 = 24{,}875$, $I_6 = 17{,}375$; b) $S_{12} \cong 22{,}91$, $I_{12} \cong 19{,}17$; c) $S_{30} \cong 21{,}755$, $I_{30} \cong 20{,}255$; d) Tienden a 21. Es la integral definida de $f(x) = x^2$ en [1, 4] y se representa por $\int_1^4 x^2\, dx$

40. Al ser $f(x) = |2x - 1|$ una función no negativa en [0, 2], dicha integral es igual al área de la región limitada por la gráfica y el eje OX en [0, 2], y este área es igual a 5/2.

41. $J > I$ ya que $x \geq x^2 \quad \forall x \in [0, 1]$

42. Demostraciones.

43. a) $F(x) = x^2$; b) $F(x) = -1 + \operatorname{sen} x$; c) $F(x) = \operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{4}$; d) $F(x) = \dfrac{2 + \cos^3 x}{3} - \cos x$

44. a) $-\ln(1 + e^t) + t + k$, $k \in \mathbb{R}$; b) El valor del límite es $\dfrac{1}{2}$

45. La recta y = 3x–4/3

46. El valor del límite es 1

47. a) 1; b) 2; c) 2ln3–ln5; d) $\dfrac{\pi - 2}{8}$; e) 2–2ln2; f) $\dfrac{7}{3}$; g) $\dfrac{\pi}{4}$; h) $\ln\sqrt{\dfrac{8}{3}}$; i) $\dfrac{1}{4}$; j) $-\dfrac{\ln 2}{3}$; k) $\ln\sqrt{\dfrac{3}{2}}$; l) 9

48. $I = \dfrac{-1 + \ln 2}{2}$

49. $I = \dfrac{206}{3} + 16\ln 4 - 16\ln 6$

50. $I = 8\sqrt{6} - 4\sqrt{3}$

51. Los valores son a = –2, b = 21

52. Los valores son a = 1, b = –2

53. Los valores son a = 4, b = 4

54. a) $2\pi - \dfrac{1}{2}$; b) $\dfrac{3}{2}$

55. a) $I = 2 + 2\ln 2$; b) $I = \dfrac{2\sqrt{5} + 2}{3}$; c) $I = 2 + 4\ln 3 - 4\ln 2$; d) $I = \dfrac{3}{2}\sqrt[3]{9} - 3\sqrt[3]{3} + 3\ln\left(\sqrt[3]{3} + 1\right)$

56. a) 9/2 u^2; b) 9/2 u^2; c) 4/3 u^2; d) 256/5 u^2

57. El área es A = 4/3 u^2

58. El valor es $a = 9$

59. El valor es $a = 9$

60. El área es A = 1 u^2

61. El área es $A = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1$ u^2

62. El área es A = 1/2 u^2

63. El valor es $a = 1/3$

64. El valor es $a = \sqrt{-\ln\left(\frac{1}{2}\right)} \approx 0{,}8355$

65. a) El área es A = 2 u^2; b) El área es A = 2 u^2; c) El área es A = 2 u^2; d) El área es A = 2 u^2

66. El área es A = 8/3 u^2

67. a) $\frac{1}{12}$ u^2; b) $\frac{8}{3}$ u^2; c) $\frac{4}{3}$ u^2; d) $\frac{4}{3}$ u^2; e) 4 u^2; f) $\frac{20}{3}$ u^2

68. El área es A = ln2 u^2

69. El área es $A = 5\ln 5 - 3\ln 3 - 1 \approx 3{,}75$ u^2

70. El área es A = 40/3 u^2

71. El área es $A = \frac{7}{3} - \ln 2$ u^2

72. El área es A = 17/18 u^2

73. El área es $A = e^2 - \frac{7}{3}$ u^2

74. El área es A = 1/4 u^2

75. El área es A = $2\sqrt{2}$ u^2

76. El área es $A = \frac{\pi^2}{4} - 2$ u^2

77. El área es A = 56/3 u^2

78. El área es A = 8 u^2

79. El área es A = $e^2 - 5$ $u^2 \approx 2{,}39$ u^2

80. El área es A = $\frac{e}{4} - \frac{1}{2}$ $u^2 \approx 0{,}18$ u^2

81. El área es A = 1 u^2

82. a) El valor es c = –3; b) El área es $\frac{32}{3}$ u^2

83. El valor es $a = 1$

84. El valor es $a = 3$

85. El valor es $a = 3$

86. El valor es $a = 2$

87. La recta horizontal $y = 1$

88. El valor es $a = 2$

89. a) $f(c) = 21$, $c = -\sqrt{7}$; b) $f(c) = \sqrt{2} - 1$; $c = \sqrt{\frac{\sqrt{2}-1}{2}}$; c) $f(c) = \frac{2}{\pi}$; $c = \arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$ (hay más)