DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 2. CÁLCULO INTEGRAL.

IES LA BAHIA

1. Integral indefinida de una función.

Dada una función f, se dice que una función F es una **función primitiva** de f si $F' = f$.

Ejemplo 1: F(x) = lnx es primitiva de $f(x) = \frac{1}{x}$ porque $F'(x) = f(x)$

Ejemplo 2: F(x) = senx es primitiva de f(x) = cosx porque $F'(x) = f(x)$

Si una función tiene primitiva, entonces tiene infinitas primitivas, las cuales se diferencian todas ellas solo en una constante.

Demostración: si F es una función primitiva de una función f, entonces F + k, $k \in \mathbb{R}$, también es función primitiva de f ya que $(F + k)' = F' + k' = F' + 0 = F' = f$

Se llama **integral indefinida** de una función f al conjunto de todas sus primitivas.
Se representa por $\int f(x)\, dx$. Se lee "integral indefinida de f(x) respecto a x".
La función f recibe el nombre de **integrando** y la variable x se llama variable de integración.

Si F es una primitiva de f, entonces $\int f(x)\, dx = F(x) + k$, donde $k \in \mathbb{R}$

Al número $k \in \mathbb{R}$ se le llama **constante de integración**.

Ejemplos: $\int \frac{1}{x}\, dx = \ln x + k \quad k \in \mathbb{R}$ $\qquad \int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + k \quad k \in \mathbb{R}$

Propiedades de la integral indefinida

P1. La integral del producto de un número real por una función es igual al producto de dicho número por la integral de la función: $\int c \cdot f(x)\, dx = c \cdot \int f(x)\, dx \quad \forall\, c \in \mathbb{R}$

P2. La integral de la suma/resta de dos funciones es igual a la suma/resta de las integrales de cada función: $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$

Ejemplo: $\int (e^x + 3\cos x - 5)\, dx = \int e^x\, dx + 3 \cdot \int \cos x\, dx - \int 5\, dx = e^x + 3\operatorname{sen} x - 5x + k \quad k \in \mathbb{R}$

Nota: **la integral del producto** de funciones, en general, **no es igual al producto de las integrales** de cada función: $\int f(x) \cdot g(x)\, dx \neq \int f(x)\, dx \cdot \int g(x)\, dx$

2. Integrales inmediatas.

En la siguiente tabla, la letra **u** representa a una función que depende de x, es decir, $u = u(x)$ y el número real k es la constante de integración.

TABLA DE INTEGRALES INMEDIATAS

ELEMENTALES	COMPUESTAS
$\int c\,dx = c \cdot x + k \qquad c \in \mathbb{R}$	
$\int x^m\,dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + k \qquad m \in \mathbb{Q} \quad m \neq -1$	$\int u^m \cdot u'\,dx = \frac{u^{m+1}}{m+1} + k \qquad m \in \mathbb{Q} \quad m \neq -1$
$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln\|x\| + k$	$\int \frac{1}{u} \cdot u'\,dx = \ln\|u\| + k$
$\int e^x\,dx = e^x + k$	$\int e^u \cdot u'\,dx = e^u + k$
$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + k \qquad a \in \mathbb{R} \quad a > 0$	$\int a^u \cdot u'\,dx = \frac{a^u}{\ln a} + k \qquad a \in \mathbb{R} \quad a > 0$
$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + k$	$\int \operatorname{sen} u \cdot u'\,dx = -\cos(u) + k$
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$	$\int \cos u \cdot u'\,dx = \operatorname{sen}(u) + k$
$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'\,dx = \operatorname{tg}(u) + k$
$\int (1 + \operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + k$	$\int (1 + \operatorname{tg}^2 u) \cdot u'\,dx = \operatorname{tg}(u) + k$
$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + k$	$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 u} \cdot u'\,dx = -\operatorname{cotg}(u) + k$
$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 x)\,dx = -\operatorname{cotg} x + k$	$\int (1 + \operatorname{cotg}^2 u) \cdot u'\,dx = -\operatorname{cotg}(u) + k$
$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + k$	$\int \frac{1}{1+u^2} \cdot u'\,dx = \operatorname{arctg}(u) + k$
$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + k$	$\int \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'\,dx = \operatorname{arcsen}(u) + k$

3. Integración por cambio de variable.

Consiste en sustituir la variable **x** por otra variable **t**, utilizando alguna relación matemática entre ambas. El éxito final depende de una elección adecuada del cambio de variable.

<u>Nota</u>: al aplicar este método hay que tener en cuenta lo siguiente: $df(x) = f'(x) \cdot dx$

<u>Ejemplo 1</u>: $\int \cos 4x\,dx = \int \cos t \frac{dt}{4} = \frac{1}{4} \cdot \int \cos t\,dt = \frac{1}{4} \cdot \operatorname{sen} t + k = \frac{\operatorname{sen} 4x}{4} + k$

CV $4x = t \quad \Rightarrow \quad d(4x) = dt \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad dx = (dt/4)$

<u>Ejemplo 2</u>: $\int 6x \cdot (x^2 + 25)^8\,dx = \int 6 \cdot t^8 \frac{dt}{2} = \frac{6}{2} \cdot \int t^8\,dt = 3 \cdot \frac{t^9}{9} + k = \frac{(x^2 + 25)^9}{3} + k$

CV $x^2 + 25 = t \quad \Rightarrow \quad d(x^2 + 25) = dt \quad \Rightarrow \quad 2x \cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad x \cdot dx = (dt/2)$

Ejemplo 3: $\int \frac{x^2}{6+x^3}\,dx = \int \frac{1}{t}\,\frac{dt}{3} = \frac{1}{3}\cdot\int \frac{1}{t}\,dt = \frac{1}{3}\cdot \ln|t| + k = \frac{\ln|6+x^3|}{3} + k$

CV $6+x^3 = t \Rightarrow d(6+x^3) = dt \Rightarrow 3x^2\cdot dx = dt \Rightarrow x^2\cdot dx = (dt/3)$

Ejemplo 4: $\int 3^{5x+1}\,dx = \int 3^t\,\frac{dt}{5} = \frac{1}{5}\cdot\int 3^t\,dt = \frac{1}{5}\cdot\frac{3^t}{\ln 3} + k = \frac{3^{5x+1}}{5\ln 3} + k$

CV $5x+1 = t \Rightarrow d(5x+1) = dt \Rightarrow 5\cdot dx = dt \Rightarrow dx = (dt/5)$

4. Integración por partes.

Consiste en separar la expresión $f(x)\cdot dx$ en dos partes, u(x) y dv(x), teniendo en cuenta que la parte identificada con **dv(x)** debe incluir (al menos) al término **dx**.

Después se aplica la siguiente fórmula: $\int u(x)\cdot dv(x) = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)\cdot du(x)$

Ejemplo 1:

$$\int x^2 \ln x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{1}{3}\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k \quad k\in\mathbb{R}$$

$u(x) = \ln x \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad dv(x) = x^2\,dx \Rightarrow v(x) = \int x^2\,dx = \frac{x^3}{3}$

Ejemplo 2: $\int x\cdot e^x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = x\cdot e^x - \int e^x\cdot 1\cdot dx = x\cdot e^x - e^x + k \quad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = x \Rightarrow du(x) = 1\cdot dx \qquad dv(x) = e^x\,dx \Rightarrow v(x) = \int e^x\,dx = e^x$

Ejemplo 3: $\int \ln x\,dx = \int u(x)\cdot dv(x) = x\cdot\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\cdot dx = x\cdot\ln x - x + k \quad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = \ln x \Rightarrow du(x) = \frac{1}{x}\cdot dx \qquad dv(x) = dx \Rightarrow v(x) = \int 1\,dx = x$

Ejemplo 4: $\int x^2\cdot \operatorname{sen}x\,dx = -x^2\cos x - \int(-\cos x)\cdot 2x\,dx = -x^2\cos x + 2\int x\cdot\cos x\,dx =$

$= -x^2\cos x + 2\cdot(x\cdot\operatorname{sen}x + \cos x) + k = -x^2\cos x + 2x\cdot\operatorname{sen}x + 2\cos x + k \qquad k\in\mathbb{R}$

$u(x) = x^2 \Rightarrow du(x) = 2x\cdot dx \qquad dv(x) = \operatorname{sen}x\,dx \Rightarrow v(x) = \int \operatorname{sen}x\,dx = -\cos x$

$\int x\cdot\cos x\,dx = x\cdot\operatorname{sen}x - \int(\operatorname{sen}x)\cdot 1\,dx = x\cdot\operatorname{sen}x - (-\cos x) = x\cdot\operatorname{sen}x + \cos x$

$u(x) = x \Rightarrow du(x) = 1\cdot dx \qquad dv(x) = \cos x\,dx \Rightarrow v(x) = \int \cos x\,dx = \operatorname{sen}x$

5. Integración de funciones racionales.

Dada una integral del tipo $\int \frac{p(x)}{q(x)} dx$, donde p(x), q(x) son polinomios, se trata de expresar el integrando como suma de fracciones, cada una de ellas con un polinomio irreducible por denominador. En el último paso de este método, hay que aplicar alguna de estas integrales:

$$\int \frac{1}{x-a} dx = \ln|x-a| + k \qquad \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{(1-n)\cdot(x-a)^{n-1}} + k \qquad k \in \mathbb{R} \quad n \neq 1$$

Caso 1. Grado (p(x)) < Grado (q(x))

Caso 1.1. Todas las raíces del polinomio q(x) son reales y simples.

Ejemplo: $\int \frac{5x-1}{x^2-7x+12} dx$ Las raíces de q(x) son 3 (simple) y 4 (simple)

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{5x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-4} \quad \Rightarrow \quad \frac{5x-1}{x^2-7x+12} = \frac{A\cdot(x-4)}{(x-3)\cdot(x-4)} + \frac{B\cdot(x-3)}{(x-3)\cdot(x-4)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 5x-1 = (A+B)\cdot x - 4A - 3B \quad \Rightarrow \quad A+B=5, \quad -4A-3B=-1 \quad \Rightarrow \quad A=-14, B=19$$

Por lo tanto, $\int \frac{5x-1}{x^2-7x+12} dx = \int \frac{-14}{x-3} dx + \int \frac{19}{x-4} dx = -14\ln|x-3| + 19\ln|x-4| + k \qquad k \in \mathbb{R}$

Caso 1.2. Todas las raíces del polinomio q(x) son reales pero alguna/s son múltiples.

Ejemplo: $\int \frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} dx$ Las raíces de q(x) son 1 (doble) y –2 (simple)

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} = \frac{A}{(x-1)^2} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} = \frac{A\cdot(x+2)}{(x-1)^2\cdot(x+2)} + \frac{B\cdot(x-1)(x+2)}{(x-1)^2\cdot(x+2)} + \frac{C\cdot(x-1)^2}{(x-1)^2\cdot(x+2)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x^2+2x = A\cdot(x+2) + B\cdot(x-1)(x+2) + C\cdot(x-1)^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad B+C=2, \quad A+B-2C=2, \quad 2A-2B+C=0 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{4}{3}, B=\frac{14}{9}, C=\frac{4}{9}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{2x^2+2x}{x^3-3x+2} dx = \frac{4}{3}\int \frac{1}{(x-1)^2} dx + \frac{14}{9}\int \frac{1}{x-1} dx + \frac{4}{9}\int \frac{1}{x+2} dx = \frac{-4}{3(x-1)} + \frac{14}{9}\ln|x-1| + \frac{4}{9}\ln|x+2| + k$$

Caso 1.3. En la factorización del polinomio q(x) aparece algún polinomio de segundo grado irreducible (equivalentemente, q(x) tiene raíces complejas).

En este caso, la descomposición del radicando como suma de fracciones presenta algún sumando de la forma $\frac{Mx+N}{x^2+bx+c}$, donde el polinomio x^2+bx+c es irreducible.

Si las dos raíces complejas conjugadas del polinomio x^2+bx+c son $u \pm v \cdot i$, entonces la integral de este sumando es de la forma neperiano – arcotangente:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}dx = \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{Mu+N}{v}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-u}{v}\right)+k$$

<u>Demostración</u>:

$$\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{M(x-u)}{(x-u)^2+v^2}\,dx + \int \frac{Mu+N}{(x-u)^2+v^2}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\int \frac{2(x-u)}{(x-u)^2+v^2}\,dx + (Mu+N)\int \frac{1}{(x-u)^2+v^2}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|(x-u)^2+v^2\right| + \frac{Mu+N}{v}\int \frac{1/v}{[(x-u)/v]^2+1}\,dx =$$

$$= \frac{M}{2}\ln\left|x^2+bx+c\right| + \frac{Mu+N}{v}\mathrm{arctg}\left(\frac{x-u}{v}\right)+k$$

<u>Ejemplo 1</u>: $\int \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1}dx \qquad x^3-x^2+x-1=(x-1)\cdot(x^2+1) \qquad x^2+1$ es irreducible

Las raíces de q(x) son 1 (simple) y las complejas $\pm i$

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A}{x-1}+\frac{Mx+N}{x^2+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1} = \frac{A\cdot(x^2+1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)}+\frac{(Mx+N)\cdot(x-1)}{(x-1)\cdot(x^2+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x+5 = A\cdot(x^2+1)+(Mx+N)\cdot(x-1) \quad \Rightarrow \quad A+M=0, N-M=1, A-N=5 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A=3, M=-3, N=-2$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x+5}{x^3-x^2+x-1}dx = \int \frac{3}{x-1}\,dx + \int \frac{-3x-2}{x^2+1}\,dx = 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - 3\int \frac{x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx =$$

$$= 3\int \frac{1}{x-1}\,dx - \frac{3}{2}\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx - 2\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = 3\ln|x-1| - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| - 2\mathrm{arctg}x + k$$

Ejemplo 2: $\int \frac{1}{x^3+1}dx$ $\quad x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$ $\quad x^2-x+1$ es irreducible

Las raíces de q(x) son -1 (simple) y las complejas $\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Primero se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Mx+N}{x^2-x+1} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{x^3+1}=\frac{A\cdot(x^2-x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}+\frac{(Mx+N)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 1=A\cdot(x^2-x+1)+(Mx+N)\cdot(x+1) \quad \Rightarrow \quad A+M=0, M+N-A=0, A+N=1 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A=1/3, M=-1/3, N=2/3$$

En consecuencia,

$$\int \frac{1}{x^3+1}dx=\frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx+\int \frac{-1/3x+2/3}{x^2-x+1}dx=\frac{1}{3}\ln|x+1|-\frac{1}{6}\ln|x^2-x+1|+\frac{\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right)+k$$

Caso 2. Grado (p(x)) $\geq$ Grado (q(x))

En este caso, se realiza la división de polinomios, obteniéndose un polinomio cociente c(x) y un polinomio resto r(x), donde grado(r(x)) < grado(q(x)).

Dado que en toda división se cumple que $p(x) = q(x)\cdot c(x) + r(x)$, si se divide toda la expresión por q(x) se obtiene la igualdad $\frac{p(x)}{q(x)}=c(x)+\frac{r(x)}{q(x)}$ donde grado(r(x)) < grado(q(x)).

En consecuencia, se puede expresar $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int c(x)\,dx+\int \frac{r(x)}{q(x)}dx$, donde la primera integral es la de un polinomio y la segunda pertenece al caso 1.

Ejemplo: para hallar $\int \frac{x^3-2x+2}{x^2-4}dx$, se descompone $\int \frac{x^3-2x+2}{x^2-4}dx=\int x\,dx+\int \frac{2x+2}{x^2-4}dx$ expresión obtenida mediante la división de x^3-2x+2 entre x^2-4

Como la segunda integral pertenece al caso 1, se averigua la expresión del radicando como suma de fracciones:

$$\frac{2x+2}{x^2-4}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2} \quad \Rightarrow \quad \frac{2x+2}{x^2-4}=\frac{A\cdot(x+2)}{(x-2)\cdot(x+2)}+\frac{B\cdot(x-2)}{(x-2)\cdot(x+2)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2x+2=A\cdot(x+2)+B\cdot(x-2) \quad \Rightarrow \quad A+B=2, \quad 2A-2B=2 \quad \Rightarrow \quad A=\frac{3}{2}, B=\frac{1}{2}$$

En consecuencia,

$$\int \frac{x^3-2x+2}{x^2-2}dx=\int x\,dx+\frac{3}{2}\int \frac{1}{x-2}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x+2}dx=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x-2|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+k$$

Nota: no necesariamente todas las integrales racionales tienen que resolverse siguiendo las pautas indicadas anteriormente. Algunas de ellas se pueden resolver de forma más sencilla mediante alguna integral inmediata o un cambio de variable adecuado.

Ejemplo 1: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^3}dx = \int \frac{1}{t^3}dt = \frac{t^{-2}}{-2}+k = -\frac{1}{2t^2}+k = -\frac{1}{2(x^2+x+1)^2}+k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $\quad x^2+x+1=t \quad \Rightarrow \quad d(x^2+x+1)=dt \quad \Rightarrow \quad (2x+1)\cdot dx = dt$

Ejemplo 2: $\displaystyle\int \frac{x^3+1}{x^4+4x+7}dx = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{dt}{4} = \frac{1}{4}\cdot \ln|t| + k = \frac{\ln|x^4+x+7|}{4}+k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $\quad x^4+4x+7=t \quad \Rightarrow \quad d(x^4+4x+7)=dt \quad \Rightarrow \quad (4x^3+4)\cdot dx = dt \quad \Rightarrow \quad (x^3+1)\cdot dx = \dfrac{dt}{4}$

Ejemplo 3: $\displaystyle\int \frac{2x}{9+x^4}\,dx = \int \frac{1}{9+t^2}\,dt = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{t}{3}\right)+k = \frac{1}{3}\mathrm{arctg}\left(\frac{x^2}{3}\right)+k \qquad k \in \mathbb{R}$

CV $\quad x^2=t \quad \Rightarrow \quad d(x^2)=dt \quad \Rightarrow \quad 2x\cdot dx = dt$

6. Integral definida de una función.

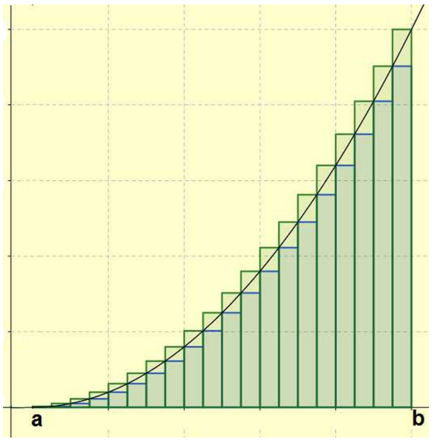
Dada una función continua f y no negativa en un intervalo [a, b].

Se construye una partición P_n del intervalo [a, b], que es un subconjunto ordenado de números reales $\{x_0, x_1, x_2, ..., x_n\} \subset [a, b]$ siendo $x_o = a$, $x_n = b$. Esta partición genera **n** subintervalos.

Se nombra como d_k a la longitud de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$ generado por la partición, es decir, $d_k = x_k - x_{k-1}$.

Como consecuencia del teorema de Weierstrass, la función f alcanza un máximo absoluto M_k y un mínimo absoluto m_k en algún punto de cada subintervalo $[x_{k-1}, x_k]$.

A la expresión $S_n = d_1\cdot M_1 + d_2\cdot M_2 + ... + d_n\cdot M_n$ se le llama **Suma Superior** de la función f asociada a la partición P_n. Geometricamente, S_n es una **aproximación por exceso** del área limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas verticales x = a, x = b.



A la expresión $I_n = d_1\cdot m_1 + d_2\cdot m_2 + ... + d_n\cdot m_n$, se le llama **Suma Inferior** de la función f asociada a la partición P_n. Geometricamente, I_n es una **aproximación por defecto** del área limitada por la gráfica de la función f, el eje de abscisas y las rectas verticales x = a, x = b.

Bajo estas condiciones, se cumple que $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

Esto significa que, si el número de subintervalos de la partición tiende a infinito, entonces las dos aproximaciones anteriores, por exceso y por defecto, tienden a igualarse.

A este límite común, que es un número real, se le llama **Integral Definida de la función f en el intervalo [a, b]** y se representa por $\int_a^b f(x)\,dx$

Los extremos **a** y **b** del intervalo se llaman **límite inferior** y **límite superior de integración**, respectivamente. La función **f** bajo el signo integral se llama **integrando**.

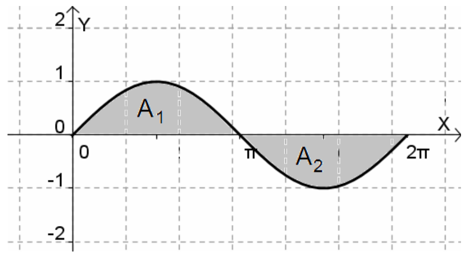
Interpretación geométrica

Si la función continua f es **no negativa** en todo [a, b], la integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ equivale al **área** limitada por la **gráfica de f,** el **eje de abscisas** y las rectas verticales **x = a**, **x = b**.

Observación: si la función continua f **cambia de signo** en [a, b], entonces la interpretación anterior no es cierta ya que $\int_a^b f(x)\,dx$ **podría ser cero** o incluso **un número negativo.**

Por ejemplo, el área encerrada por la gráfica de $f(x) = \text{sen}x$ y el eje X en el intervalo $[0, 2\pi]$ es igual a 4 u².

Sin embargo, $\int_0^{2\pi} \text{sen}x\,dx = A_1 - A_2 = 0$



Propiedades de la integral definida

P1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \forall\, c \in (a, b)$

P2. $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \quad \forall\, a \in \mathbb{R}$

P3. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

P4. $\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \qquad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

P5. $\int_a^b (k\cdot f)(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall\, k \in \mathbb{R} \quad \forall\, a, b \in \mathbb{R}$

P6. Si $f(x) \le g(x)$ en [a, b], entonces $\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$

7. Teorema Fundamental del Cálculo. Regla de Barrow.

Dada una función continua f en un intervalo [a, b], se denomina **función integral** y se representa por **F**, a la que se define como $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, $\forall\, x \in [a, b]$

Teorema Fundamental del Cálculo

Dada f una función continua en [a, b], entonces la función integral $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ es derivable en [a, b] y su función derivada es $F'(x) = f(x)$, $\forall\, x \in [a, b]$.

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) implica que, para toda función continua en un intervalo, la derivada de su integral es igual a ella misma. Al integrar una función continua y luego derivarla, se recupera la función original: esto demuestra que derivación e integración son operaciones inversas.

Ejemplo: la derivada de la función $F(x) = \int_1^x \left(3t^2 + \frac{1}{t}\right) dt$ es $F'(x) = 3x^2 + \frac{1}{x}$, $\forall\, x > 1$

Integrando la expresión de $F'(x)$, se obtiene que $F(x) = x^3 + \ln(x) + k$

Por otra parte, $F(1) = \int_1^1 \left(3t^2 + \frac{1}{t}\right) dt = 0$. Despejando k de $F(1) = 1^3 + \ln(1) + k = 0 \;\Rightarrow\; k = -1$

Por lo tanto la expresión analítica de F es $F(x) = x^3 + \ln(x) - 1$

Regla de Barrow

Como consecuencia del TFC, la Regla de Barrow afirma que la integral definida de una función f continua en un intervalo [a, b] es igual a la diferencia entre el valor que toma una primitiva cualquiera de f en $x = b$, y el valor que toma dicha primitiva en $x = a$.

$$\int_a^b f(x)\, dx = \left[\, F(x)\, \right]_a^b = F(b) - F(a)\text{, donde F es una primitiva cualquiera de f}$$

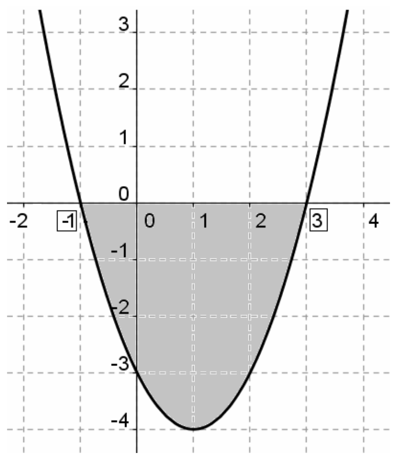
Ejemplo 1: $\int_1^4 (x^2 - 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_1^4 = \left(\frac{4^3}{3} - 4\cdot 4\right) - \left(\frac{1^3}{3} - 4\cdot 1\right) = \frac{64}{3} - 16 - \frac{1}{3} + 4 = 9$

Ejemplo 2: $\int_0^{2\pi} \operatorname{sen} x\, dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = (-\cos 2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$

8. Área del recinto limitado por la gráfica de una función.

Para calcular el área del recinto limitado por la gráfica de una función $y = f(x)$ continua y el eje de abscisas en un intervalo [a, b], hay que hallar los puntos de corte de la gráfica de f con el eje X en [a, b] ya que la función puede cambiar de signo dentro de dicho intervalo.

Ejemplo 1: esbozar el recinto limitado por la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y el eje de abscisas y calcular su área.



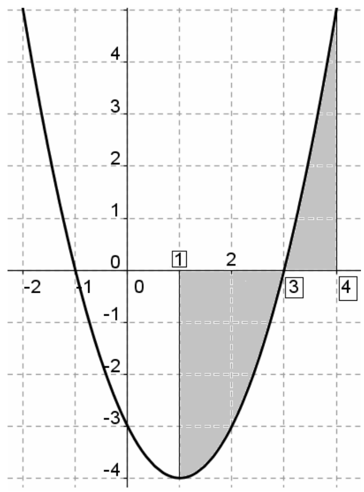
Se calculan sus puntos de corte con el eje X:
$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$

El recinto cuya área se pide en el enunciado, es la zona situada por debajo del eje de abscisas entre los valores $x = -1$ y $x = 3$

Por lo tanto, el área de dicho recinto es el siguiente:

$$\text{Área} = \left|\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\, dx\right| = \left|-\frac{32}{3}\right| = \frac{32}{3}\, u^2$$

Ejemplo 2: esbozar el recinto limitado por la curva $y = x^2 - 2x - 3$ y el eje de abscisas entre $x = 1$ y $x = 4$ y calcular su área.



Se calculan sus puntos de corte con el eje X:
$x^2 - 2x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -1, \quad x_2 = 3$

Dado que el valor $x_1 = -1$ queda fuera del intervalo [1, 4], el recinto cuya área se pide en el enunciado **se compone de dos zonas** cuyas áreas hay que calcular por separado:

- la primera zona es la comprendida entre $x = 1$ y $x = 3$
- la segunda zona es la comprendida entre $x = 3$ y $x = 4$

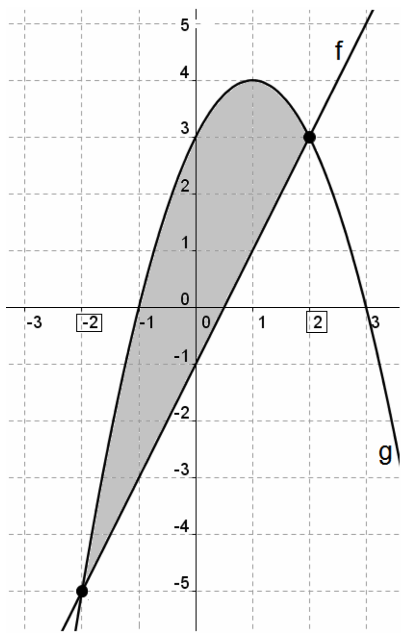
En este caso, el área total del recinto es igual a la suma de las áreas de cada zona:

$$\text{Área} = \left|\int_1^3 (x^2 - 2x - 3)\, dx\right| + \left|\int_3^4 (x^2 - 2x - 3)\, dx\right| = \left|-\frac{16}{3}\right| + \left|\frac{7}{3}\right| = \frac{23}{3}\ u^2$$

9. Área del recinto limitado por las gráficas de dos funciones.

Para calcular el área del recinto limitado por las gráficas de dos funciones $y = f(x)$, $y = g(x)$ continuas en un intervalo [a, b], hay que hallar los puntos de corte entre las gráficas de ambas funciones e integrar la función diferencia $f(x) - g(x)$ (ó $g(x) - f(x)$).

Ejemplo 1: esbozar el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ y calcular su área.



Se calculan los puntos de corte entre $f(x)$ y $g(x)$ resolviendo la ecuación $2x - 1 = -x^2 + 2x + 3$, cuyas soluciones son $x_1 = -2$, $x_2 = 2$

En el esbozo de las gráficas se observa que ambas gráficas se cortan en los puntos $(-2, -5)$ y $(2, 3)$

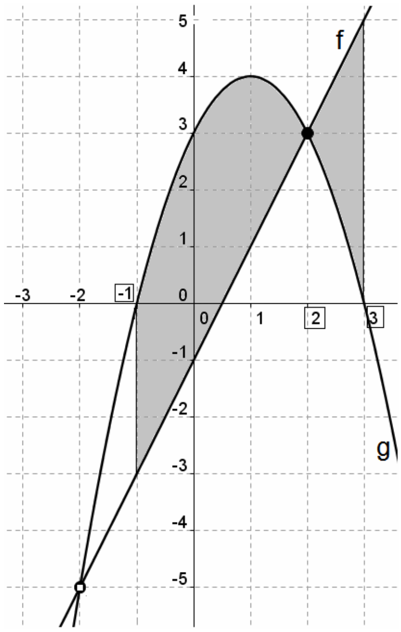
La función diferencia de f y g es:
$f(x) - g(x) = 2x - 1 - (-x^2 + 2x + 3) = x^2 - 4$

Por lo tanto, el área del recinto que se pide en el enunciado es el siguiente:

$$\text{Área} = \left|\int_{-2}^{2} (f(x) - g(x))\, dx\right| = \left|\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx\right| = \frac{32}{3}\ u^2$$

Ejemplo 2: esbozar el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 2x - 1$ y $g(x) = -x^2 + 2x + 3$ entre $x = -1$ y $x = 3$ y calcular su área.

Se calculan los puntos de corte entre f(x) y g(x) resolviendo la ecuación $2x - 1 = -x^2 + 2x + 3$, cuyas soluciones son $x_1 = -2$, $x_2 = 2$



Las gráficas de f y g se cortan en los puntos (–2, –5) y (2, 3)

En el esbozo de las gráficas se observa que el recinto cuya área se pide en el enunciado **se compone de dos zonas** cuyas áreas hay que calcular por separado:

– la primera zona es la comprendida entre $x = -1$ y $x = 2$

– la segunda zona es la comprendida entre $x = 2$ y $x = 3$

La función diferencia de f y g es:
$f(x) - g(x) = 2x - 1 - (-x^2 + 2x + 3) = x^2 - 4$

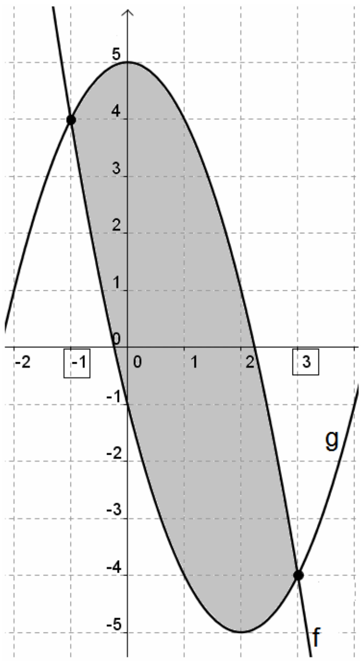
En este caso, el área total del recinto es igual a la suma de las áreas de cada zona:

$$A = \left| \int_{-1}^{2} (f(x) - g(x))\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (f(x) - g(x))\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{-1}^{2} (x^2 - 4)\, dx \right| + \left| \int_{2}^{3} (x^2 - 4)\, dx \right| = |-9| + \left| \frac{7}{3} \right| = \frac{34}{3} \ u^2$$

Ejemplo 3: esbozar el recinto limitado por las gráficas de las funciones $f(x) = 5 - x^2$ y $g(x) = x^2 - 4x - 1$ y calcular su área.

Se calculan los puntos de corte entre f y g resolviendo la ecuación $x^2 - 4x - 1 = 5 - x^2$, cuyas soluciones son $x_1 = -1$, $x_2 = 3$



En el esbozo de las gráficas se observa que las gráficas de ambas funciones se cortan en los puntos (–1, 4) y (3, –4)

La función diferencia de f y g es:
$f(x) - g(x) = 5 - x^2 - (x^2 - 4x - 1) = -2x^2 + 4x + 6$

Por lo tanto, el área del recinto que se pide en el enunciado es el siguiente:

$$\text{Área} = \left| \int_{-1}^{3} (f(x) - g(x))\, dx \right| = \left| \int_{-1}^{3} (-2x^2 + 4x + 6)\, dx \right| = \frac{64}{3} \ u^2$$

10. Teorema del Valor Medio del Cálculo Integral.

Dada una función continua f en un intervalo [a, b], entonces existe un valor interior $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x)\, dx$

Nota: al valor $f(c)$ se le llama **valor medio** de la función f en [a, b].

Ejemplo: para la función $f(x) = x^2$ continua en [1, 3], su valor medio en [1, 3] es

$$f(c) = \frac{1}{3-1} \cdot \int_1^3 x^2\, dx = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^3 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{27}{3} - \frac{1}{3}\right) = \frac{26}{6} = \frac{13}{3} \cong 4{,}33$$

Se puede hallar el valor de c resolviendo la ecuación $f(c) = c^2 = \frac{13}{3} \quad \Rightarrow \quad c = \sqrt{\frac{13}{3}} \cong 2{,}08 \in (1, 3)$

Interpretación geométrica

Del teorema se deduce que $\int_a^b f(x)\, dx = f(c) \cdot (b-a)$

Esto implica que el área del recinto limitado por la gráfica de una función f no negativa y el eje OX en un intervalo [a, b], equivale al área de un rectángulo de altura $f(c)$ y de base $(b-a)$, para algún valor c del intervalo (a, b).