

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 3. MATRICES. DETERMINANTES.



1. Matrices. Operaciones con matrices.

Se llama **matriz** de dimensión $m \times n$ a todo conjunto de números reales dispuestos en **m** filas y **n** columnas de la siguiente forma:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

El símbolo $A = (a_{ij})$ designa a la matriz completa, siendo $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$

Al elemento a_{ij} se le llama **elemento general** de la matriz A.

El número total de elementos de la matriz es $m \cdot n$

Ejemplo: la matriz de dimensión 3×4 cuyo elemento general es $a_{ij} = 2i + 3j$ es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 & 14 \\ 7 & 10 & 13 & 16 \\ 9 & 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

Matrices iguales

Dos matrices son iguales si tienen la misma dimensión y son iguales los elementos que ocupan el mismo lugar en cada una de ellas.

Tipos de matrices

T1. Matriz cuadrada. Es aquella que tiene igual número de filas que de columnas. Una **matriz de orden n** es una matriz cuadrada con n filas y n columnas.

Al conjunto de los elementos a_{ii} de una matriz cuadrada se le llama **diagonal principal**.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 9 \\ 7 & 1 & -5 \\ 4 & -6 & 8 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 3.

Su diagonal principal está formada por los elementos $-2, 1, 8$.

Se llama **matriz rectangular** a toda matriz que no sea cuadrada.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz rectangular de dimensión 2×3

T2. Matriz fila. Es aquella que tiene sólo una fila.

Ejemplo: $A = (2 \quad -3 \quad 8 \quad 1)$ es una matriz fila de dimensión 1×4

T3. Matriz columna. Es aquella que tiene sólo una columna.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}$ es una matriz columna de dimensión 3×1

T4. Matriz traspuesta de otra. Dada una matriz A , se llama matriz traspuesta de A y se representa por A^t a la que se obtiene cambiando filas por columnas en A .

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 6 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ es la traspuesta de A .

T5. Matriz simétrica. Es toda matriz cuadrada en la que $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 9 \\ -3 & 0 & -5 \\ 9 & -5 & 4 \end{pmatrix}$ es una matriz simétrica de orden 3.

Nota: si una matriz es simétrica, entonces coincide con su traspuesta.

T6. Matriz antisimétrica. Es toda matriz cuadrada en la que $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 7 \\ 4 & 0 & 1 \\ -7 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ es una matriz antisimétrica de orden 3.

Nota 1: si una matriz es antisimétrica, entonces la diagonal principal está formada por ceros.

Nota 2: si una matriz es antisimétrica, entonces coincide con la opuesta de su traspuesta.

T7. Matriz nula. Es aquella en la que todos sus elementos son iguales a cero.

Ejemplo: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz nula de dimensión 2×3

T8. Matriz diagonal. Es una matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos no pertenecientes a la diagonal principal.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal de orden 3

T9. Matriz unidad o identidad. Es una matriz diagonal en la que son iguales a 1 todos los elementos de la diagonal principal. La matriz unidad de orden n se representa por I_n .

Ejemplo: $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es la matriz identidad de orden 3

T10. Matriz triangular inferior. Es una matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos situados por encima de la diagonal principal.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & 0 \\ 9 & 7 & 8 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular inferior de orden 4.

T11. Matriz triangular superior. Es una matriz cuadrada en la que son nulos todos los elementos situados por debajo de la diagonal principal.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 9 \\ 0 & 2 & -4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$ es una matriz triangular superior de orden 4.

Operaciones con matrices

A) Suma y diferencia de matrices.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, la suma de A y B es otra matriz de la misma dimensión cuyo elemento general es $s_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Se representa por $A+B$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A+B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 9 \\ 7 & 0 & 4 & 10 \end{pmatrix}$

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ de la misma dimensión, la diferencia de A y B es otra matriz de la misma dimensión cuyo elemento general es $d_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$. Se representa por $A-B$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 5 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ $A-B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ -7 & -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

Dada una matriz A, se llama **matriz opuesta** de A y se representa por $-A$ a la que se obtiene cambiando de signo a todos los elementos de A. La suma de dos matrices opuestas es la matriz nula.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 6 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & -6 \end{pmatrix}$ $A+(-A) = O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota: no se pueden sumar o restar dos matrices de dimensiones diferentes.

B) Producto de una matriz por un número real.

Dadas una matriz $A = (a_{ij})$ y $k \in \mathbb{R}$, el producto de A por el número real k es otra matriz de la misma dimensión que A cuyo elemento general es $k \cdot a_{ij}$. Se representa por kA .

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 5 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} \quad 5A = \begin{pmatrix} 5 & -30 & 25 \\ -15 & 20 & -10 \end{pmatrix}$

C) Producto de matrices.

Dadas dos matrices $A = (a_{ij})$ de dimensión $m \times n$ y $B = (b_{ij})$ de dimensión $n \times q$, el producto de A y B es otra matriz $P = (p_{ij})$ de dimensión $m \times q$ cuyo elemento general p_{ij} es el resultado del producto escalar de la fila i de A por la columna j de B. Se representa por AB ó $A \cdot B$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} (3 \times 2) \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} (2 \times 4) \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & 4 & 4 \\ 6 & 0 & 3 & 6 \end{pmatrix} (3 \times 4)$

Propiedades

P1. Propiedad asociativa: $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$

P2. Propiedad distributiva del producto respecto de la suma: $A \cdot (B + C) = (A \cdot B) + (A \cdot C)$

P3. Si A es una matriz de orden n, se tiene que: $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$

P4. El producto de matrices, en general, no es conmutativo.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & -4 \\ 12 & 9 \end{pmatrix} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 6 & -9 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

Nota 1: si $A \cdot B = O$, esto no implica necesariamente que $A = O$ ó $B = O$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Nota 2: si $A \cdot B = A \cdot C$, esto no implica necesariamente que $B = C$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$

Nota 3: $(A + B)^2$ no es necesariamente igual a $A^2 + B^2 + 2AB$

$(A - B)^2$ no es necesariamente igual a $A^2 + B^2 - 2AB$

$(A + B) \cdot (A - B)$ no es necesariamente igual a $A^2 - B^2$

D) Potencia de una matriz.

Dada una matriz A, la potencia enésima de A equivale a multiplicar la matriz A por sí misma n veces. Es decir, $A^n = A \cdot A \cdot \dots (n \text{ veces}) \dots A$.

Nota: los elementos de la matriz A^n no tienen por qué ser las respectivas potencias enésimas de cada uno de los elementos de la matriz A.

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, entonces $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$!! A^2 no es la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 9 & 16 \end{pmatrix}$!!

Método de inducción: para algunas matrices, es posible obtener una expresión de A^n por inducción, es decir, calcular las tres o cuatro primeras potencias y generalizar el resultado para un valor natural n cualquiera.

Ejemplo 1: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 \\ 0 & 9 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 26 \\ 0 & 27 \end{pmatrix}$ $A^4 = \begin{pmatrix} 1 & 80 \\ 0 & 81 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$

Ejemplo 2: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n & n \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

2. Matriz inversa. Ecuaciones matriciales.

Determinante de segundo orden

Dada una matriz A de orden 2, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A y se representa

por $\det(A)$ al número real $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1) - 4 \cdot (-2) = -3 + 8 = 5$

Determinante de tercer orden

Dada una matriz A de orden 3, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, se llama determinante de A y se

representa por $\det(A)$ al número real

$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}$

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36 + 0 - 5 - 8 + 30 - 0 = -19$

Matriz inversa

Dada una matriz A de orden n , si existe una matriz A^{-1} del mismo orden tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

entonces se dice que A es una **matriz inversible o regular** y que la matriz A^{-1} es la **matriz inversa** de A . Si una matriz no tiene inversa, se dice que es una **matriz singular**.

Cálculo de la matriz inversa mediante determinantes

Dada una matriz cuadrada A , se llama **adjunto** del elemento a_{ij} y se representa por A_{ij} al determinante de la matriz que resulta de eliminar la fila i y la columna j en la matriz A , precedido del signo $(-1)^{i+j}$.

Ejemplo: en $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 7 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -6 \end{pmatrix}$, el adjunto $A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = (-1)^5 \cdot (15 - (-14)) = -29$

Dada una matriz cuadrada A , se llama **matriz adjunta de A** y se representa por $\text{Adj}(A)$, a la matriz que se obtiene al sustituir en A cada elemento a_{ij} por su adjunto A_{ij} .

Si una matriz cuadrada A tiene determinante distinto de cero, entonces existe su matriz inversa y ésta se calcula así: $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot (\text{Adj}(A))^t$

Si $\det(A) = 0$, entonces la matriz A no tiene inversa.

Ejemplo: la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ admite inversa ya que $\det(A) = -2 \neq 0$

La matriz adjunta de $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ es $\text{Adj}(A) = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -4 \quad A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

Se traspone la matriz adjunta de A : $(\text{Adj}(A))^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$

Finalmente, la matriz inversa de A es $A^{-1} = \frac{1}{-2} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & 4 \\ -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 7/2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Obtención de la matriz inversa con la calculadora Casio fx-991 SPX II

- (1) Pulsar la tecla MENÚ
- (2) Tecla 4
- (3) Definir Matriz 1:MatA
- (4) Tecla 1
- (5) Elegir número de filas y columnas
- (6) Introducir elementos de la matriz pulsando la tecla = después de cada número
- (7) Tecla AC
- (8) Tecla OPTN
- (9) Tecla 3
- (10) MatA Tecla x^{-1} Tecla =

Ecuaciones matriciales

La matriz inversa se puede utilizar para resolver ecuaciones matriciales, en las que la incógnita es una matriz X que hay que despejar adecuadamente:

Ejemplos:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } X \cdot A = B \Rightarrow X = B \cdot A^{-1} & \text{b) } A \cdot X = B \Rightarrow X = A^{-1} \cdot B \\ \text{c) } X \cdot A = B + C \Rightarrow X = (B + C) \cdot A^{-1} & \text{d) } A \cdot X + B = C \Rightarrow X = A^{-1} \cdot (C - B) \\ \text{e) } X \cdot A + B = C \Rightarrow X = (C - B) \cdot A^{-1} & \text{f) } A \cdot X + B \cdot X = C \Rightarrow X = (A + B)^{-1} \cdot C \end{array}$$

Algunas propiedades de la matriz inversa

P1. Dados $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, A una matriz regular, entonces la matriz kA también es regular y su

inversa es $(k \cdot A)^{-1} = \frac{1}{k} \cdot A^{-1}$

P2. Si dos matrices A, B son regulares y del mismo orden, entonces la matriz producto $A \cdot B$ también es regular y su inversa es $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$

P3. La traspuesta de una matriz regular también lo es y su inversa es $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$

P4. Si una matriz tiene alguna fila (o columna) que sea combinación lineal de las demás, entonces su determinante es igual a cero y en consecuencia, la matriz no tiene inversa.

3. Propiedades de los determinantes.

Todas las propiedades son igualmente válidas si se cambia el término "fila" por "columna".

$$\mathbf{P1.} \det(F1 + F1', F2, F3) = \det(F1, F2, F3) + \det(F1', F2, F3)$$

$$\begin{vmatrix} a+a' & b+b' & c+c' \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a' & b' & c' \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{P2.} \det(k \cdot F1, F2, F3) = k \cdot \det(F1, F2, F3) \quad \begin{vmatrix} ka & kb & kc \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$$

Esta propiedad permite extraer fuera del determinante los factores comunes a todos los elementos de una fila.

P3. Si A, B son matrices de igual orden, entonces $\det(A) \cdot \det(B) = \det(A \cdot B)$

Ejemplo:
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 8 & 11 & 13 \end{vmatrix} \quad 3 \cdot 2 = 6$$

Como consecuencia de esta propiedad, se cumple que $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Demostración: $\det(A) \cdot \det(A^{-1}) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(I_n) = 1 \Rightarrow \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

P4. El determinante de una matriz coincide con el de su traspuesta: $\det(A) = \det(A^t)$

P5. $\det(F1, F2, F3) = (-1) \cdot \det(F2, F1, F3)$
$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ m & n & p \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} f & g & h \\ a & b & c \\ m & n & p \end{vmatrix}$$

Si se intercambian dos filas en una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo.

P6. El determinante de una matriz es cero en cualquiera de los siguientes casos:

a) Si tiene una fila nula.

$$\det(F1, F2, 0) = 0$$

b) Si tiene dos filas iguales o proporcionales.

$$\det(F1, k \cdot F1, F3) = 0$$

c) Si tiene una fila combinación lineal de las restantes.

$$\det(F1, F2, k \cdot F1 + k' \cdot F2) = 0$$

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ f & g & h \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ kf & kg & kh \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ f & g & h \\ ka + k'f & kb + k'g & kc + k'h \end{vmatrix} = 0$$

Como consecuencia de estas propiedades, se tiene el siguiente resultado:

Las filas de una matriz cuadrada A son linealmente dependientes $\Leftrightarrow \det(A) = 0$

4. Rango de una matriz.

Dada una matriz A, se llama submatriz cuadrada de A a cualquier matriz formada por la intersección (cruce) de r filas con r columnas cualesquiera de A.

Se llama rango de una matriz A al **orden de la mayor submatriz cuadrada de A con determinante distinto de cero.**

En el caso de que A sea una matriz de orden 3, se tiene que: $\text{rango}(A) = 3 \Leftrightarrow \det(A) \neq 0$

Ejemplo: en la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, hay cuatro submatrices cuadradas de orden 3.

Estas submatrices son $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$

Si se aplicara estrictamente la definición para calcular el rango de esta matriz, habría que:

– Ir probando hasta encontrar al menos una submatriz de orden 3 en A con determinante distinto de cero, para confirmar que el rango de A es 3. Sin embargo, en este caso, todos los determinantes de orden tres de las cuatro submatrices incluidas en A son iguales a cero:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 6 & 5 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 6 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 6 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$$

– Por lo tanto, el rango de A no puede ser 3. Ahora habría que ir probando hasta encontrar una submatriz de orden 2 dentro de A con determinante distinto de cero, para confirmar que el rango de A es 2.

Este paso es más bastante más sencillo que el anterior ya que, por ejemplo, $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Esto demostraría que $\text{rango}(A) = 2$, pero obsérvese que se han tenido que calcular hasta cuatro determinantes de orden 3. No es nada aconsejable seguir este camino. Por todo ello, se suelen aplicar las siguientes transformaciones para calcular el rango de una matriz:

El rango de una matriz no cambia en cualquiera de los siguientes supuestos:

1. Si en la matriz se intercambian de posición dos filas (o columnas).
2. Si se multiplican o dividen todos los elementos de una fila (o columna) por un número distinto de cero.
3. Si se suman o restan a todos los elementos de una fila (o columna), los elementos de otra.
4. Si en la matriz se elimina una fila (o columna) nula; una fila (o columna) proporcional a otra; o una fila (o columna) combinación lineal de otras.

Ejemplo 1: para calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix}$, se hace lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 + F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 & 7 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$$

Ejemplo 2: para calcular el rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, se hace lo siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -3 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3+F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-2F_2}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & 12 & -7 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 12 \neq 0 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

Ejemplo 3: analizar el rango de $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ m & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m

$$\det(A) = 9m - 12 - 6m = 3m - 12$$

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow 3m - 12 = 0 \Leftrightarrow m = 4$$

a) Si $m \neq 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$ ya que $\det(A) \neq 0$

b) Si $m = 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que $\det(A) = 0$ y en A se puede encontrar alguna submatriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -4 \neq 0$

Ejemplo 4: analizar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & m+1 & 1 & 1 \\ 2 & m & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m

$$\begin{vmatrix} 1 & m+1 & 1 \\ 2 & m & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = m + 6 - 3m - 2m - 2 = 4 - 4m = 0 \Leftrightarrow m = 1$$

a) Si $m \neq 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = 3$, ya que habría una submatriz de orden 3 con determinante no nulo.

$$\text{b) Si } m = 1 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2, \text{ ya que } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2-2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-3F_1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En la matriz resultante $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$ se puede encontrar una submatriz cuadrada de

orden 2 con determinante distinto de cero, por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$

Ejemplo 5: analizar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & m \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$ según los valores del parámetro m

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & m \\ 3 & 6 & -3 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

a) Si $m \neq 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 2$, ya que en la matriz A habría al menos una submatriz cuadrada de orden 2 con determinante distinto de cero, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix} = m - 4 \neq 0$

b) Si $m = 4 \Rightarrow \text{rango}(A) = 1$, ya que $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & -2 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{Eliminar } F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, en la que solo hay submatrices, a lo máximo de orden 1, "con determinante no nulo"

5. Otros métodos para calcular la matriz inversa.

Dada una matriz A de orden n , si existe una matriz A^{-1} del mismo orden tal que

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n$$

entonces se dice que A es una **matriz inversible o regular** y que la matriz A^{-1} es la **matriz inversa** de A . Si una matriz no tiene inversa, se dice que es una **matriz singular**.

Cálculo de la matriz inversa mediante la definición

Ejemplo: para calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se escribe $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 2a - c = 1 & 2b - d = 0 \\ a + c = 0 & b + d = 1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = 1/3 & b = 1/3 \\ c = -1/3 & d = 2/3 \end{matrix}$$

Por lo tanto, la matriz inversa de A es $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -1/3 & 2/3 \end{pmatrix}$

Cálculo de la matriz inversa mediante el método de Gauss

Se escriben las matrices A e I_n , una junto a la otra separadas por una línea vertical.

Aplicando simultáneamente a las filas de ambas matrices las siguientes transformaciones:

T1. Multiplicar todos los elementos de una fila por un número distinto de cero.

T2. Sumar o restar a todos los elementos de una fila, los elementos de otra.

hay que convertir la matriz A en la matriz I_n . La matriz que resulta junto a ella es A^{-1} .

$$(A|I_n) \rightarrow \text{.....Transformaciones T1 ó T2.....} \rightarrow (I_n|B) \quad \text{La matriz } B \text{ es } A^{-1}$$

Si durante el proceso de conversión, aparece alguna fila nula en la zona izquierda, entonces se detiene el proceso y se concluye que la matriz A no tiene inversa.

Ejemplo 1: para calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$, se aplican los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{F_3 - 2F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_1 - 3F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{F_1 - 3F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \quad \text{Por lo tanto, } A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Ejemplo 2: para calcular la inversa de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$, se aplican los siguientes pasos:

$$\begin{aligned}
 & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \\
 & \xrightarrow{F_3 - F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Dado que la fila F_3 en la zona izquierda es nula, el proceso se detiene y se concluye que la matriz A no tiene inversa.