**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

**MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.**

**UNIDAD 5. VECTORES EN EL ESPACIO.**

IES LA BAHIA

# ACTIVIDADES

## 1. Vectores libres. Operaciones con vectores.

1. Dados los puntos A(–2, 5, 3), B(5, 4, 8), C(1, –3, 2) y D(8, –4, 7)
a) Calcular las coordenadas de los vectores $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$.
b) ¿Representan los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ al mismo vector libre? Justificar la respuesta.

2. Dado el vector libre $\vec{u}=(5,-3,2)$, hallar el extremo B de su representante en el caso de que el origen sea el punto: a) A(2, 4, –1) b) A(–5, 3, –2)) c) A(0, 0, 0)

3. Dados los puntos A(1, 2, –1), B(0, 3, 1), C(1, 1, 1) y D(0, 2, 5), comprobar si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ representan al mismo vector libre. En caso negativo, hallar las coordenadas del punto D' para que $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD'}$ sean el mismo vector libre.

4. Dados los vectores $\vec{u}=(3,-1,5)$, $\vec{v}=(-2,1,0)$, $\vec{w}=(2,7,1)$, $\vec{x}=(-8,-19,7)$
a) Hallar el vector $\vec{e}=-4\vec{u}+3\vec{v}-\vec{w}$
b) Encontrar los valores de a, b, c para que $\vec{x}=a\cdot\vec{u}+b\cdot\vec{v}+c\cdot\vec{w}$

## 2. Combinación lineal de vectores. Dependencia lineal.

5. En cada uno de los siguientes apartados, averiguar si los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente dependientes o independientes:
a) $\vec{u}=(1,0,3)$, $\vec{v}=(2,2,-1)$, $\vec{w}=(2,-1,3)$ b) $\vec{u}=(2,1,-2)$, $\vec{v}=(0,2,1)$, $\vec{w}=(2,-1,-3)$
c) $\vec{u}=(1,1,2)$, $\vec{v}=(2,1,5)$, $\vec{w}=(1,0,3)$ d) $\vec{u}=(1,0,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$, $\vec{w}=(0,0,1)$

6. En cada uno de los siguientes apartados, determinar si los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ son linealmente dependientes. En caso afirmativo, hallar la relación de dependencia lineal.
a) $\vec{u}=(2,1,1)$, $\vec{v}=(-1,0,2)$, $\vec{w}=(0,1,5)$ b) $\vec{u}=(1,2,1)$, $\vec{v}=(-3,8,1)$, $\vec{w}=(3,-1,1)$

7. En cada uno de los siguientes apartados, hallar el valor de t para que los vectores $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ sean linealmente independientes:
a) $\vec{u}=(1,0,1)$ $\vec{v}=(-1,2,3)$ $\vec{w}=(0,t,4)$ b) $\vec{u}=(1,0,1)$ $\vec{v}=(-1,1,1)$ $\vec{w}=(t,3,1)$
c) $\vec{u}=(1,0,-1)$ $\vec{v}=(2,2,0)$ $\vec{w}=(2,t,-1)$

8. Determinar m para que los vectores $\vec{u}=(-1,1,3)$, $\vec{v}=(5,-2,9)$, $\vec{w}=(2,-m,2m)$ sean linealmente dependientes. En tal caso, hallar la relación de dependencia.

9. Dados los vectores: $\vec{u} = (1, 1, m)$ $\vec{v} = (0, m, -1)$ $\vec{w} = (1, 2m, 0)$

a) Determinar el valor de m para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean linealmente dependientes.

b) Para el valor de m obtenido, expresar el vector $\vec{w}$ como combinación lineal de $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

10. Averiguar el valor o valores de m para que los vectores $\vec{u} = (m, 2, 0)$, $\vec{v} = (m, -2, 1)$, $\vec{w} = (2, -m, -4m)$ sean linealmente independientes.

## 3. Subespacios vectoriales.

11. En cada uno de los siguientes apartados, averiguar si el vector $\vec{v}$ pertenece a la recta vectorial generada por el vector $\vec{u}$. En caso afirmativo, expresar la relación que los liga.

a) $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (2, 4, 6)$ b) $\vec{u} = (3, 6, -9)$, $\vec{v} = (2, 4, -6)$ c) $\vec{u} = (1, 0, 2)$, $\vec{v} = (0, 1, 1)$

12. Dados los vectores $\vec{u} = (2, 1, 3)$, $\vec{v} = (4, 2, 6)$, $\vec{w} = (6, 3, 9)$

a) Justificar que los tres vectores son linealmente dependientes. ¿Cuántos de ellos se puede asegurar que son linealmente independientes?

b) Averiguar las relaciones de dependencia lineal que se dan entre los tres vectores.

c) ¿Qué subespacio vectorial generan?

13. En cada uno de los siguientes apartados, averiguar si el vector $\vec{w}$ pertenece al plano vectorial generado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$. En caso afirmativo, expresar la relación que los liga.

a) $\vec{u} = (2, 1, 1)$, $\vec{v} = (1, 0, 1)$, $\vec{w} = (0, -1, 1)$ b) $\vec{u} = (1, 1, 3)$, $\vec{v} = (1, 2, 0)$, $\vec{w} = (1, -1, 9)$

14. En cada uno de los siguientes apartados, averiguar el valor de t para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sean coplanarios (para que pertenezcan a un mismo plano):

a) $\vec{u} = (1, 0, -1)$, $\vec{v} = (1, -2, 1)$, $\vec{w} = (t, 0, 2)$ b) $\vec{u} = (1, 2, 1)$, $\vec{v} = (1, 1, 0)$, $\vec{w} = (2, t, -1)$

c) $\vec{u} = (-1, 4, 2)$, $\vec{v} = (3, t, -2)$, $\vec{w} = (2, 5, 6)$ d) $\vec{u} = (4, 10, t)$, $\vec{v} = (1, 2, 3)$, $\vec{w} = (1, 3, -1)$

15. Dados los vectores $\vec{u}_1 = (2, 1, 0)$, $\vec{u}_2 = (0, 2, 1)$, $\vec{u}_3 = (2, -1, -1)$, $\vec{u}_4 = (4, 0, -1)$

Justificar que los cuatro vectores son linealmente dependientes. ¿Cuántos de ellos son linealmente independientes? Expresar dos de ellos como combinación lineal de los otros dos.

## 4. Base de vectores. Coordenadas de un vector respecto de una base.

16. En cada uno de los siguientes apartados, averiguar si el conjunto dado es una base de vectores de $V^3$:

a) A = { (1, 3, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 0) } b) B = { (2, 1, 0), (0, 0, 2), (0, 0, 3) }

c) C = { (–1, 1, 2), (2, 1, –1), (1, 0, 3) } d) D = { (0, 1, 1), (1, 1, 2), (1, –1, 0) }

e) E = { (1, 0, 1), (1, 1, –3) } f) F = { (1, 0, 3), (1, 1, 1), (2, 1, 0), (0, 1, –2) }

17. a) ¿Es el conjunto B = { (1, 1, 1), (3, 1, 2), (1, 1, 0) } una base de $V^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas del vector $\vec{w} = (3, 1, 2)$ respecto de B.

b) ¿Es el conjunto B = { (1, 0, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0) } una base de $V^3$? En caso afirmativo, hallar las coordenadas del vector $\vec{v} = (2, 2, 1)$ respecto de B.

18. En cada uno de los siguientes apartados, hallar el valor de m para que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ formen una base de vectores de $V^3$:

a) $\vec{u} = (1, 2, 1) \quad \vec{v} = (1, 0, m) \quad \vec{w} = (1, 3, 2)$ b) $\vec{u} = (0, 1, 1) \quad \vec{v} = (1, m, -1) \quad \vec{w} = (1, -1, m)$

19. a) Se sabe que un vector $\vec{u}$ de $V^3$ tiene coordenadas (–1, 2, –2) respecto de la base B = { (1, 0, 0), (0, 3, 0), (0, 0, –1) }. Hallar las coordenadas de $\vec{u}$ respecto de la base canónica.

20. Dado el conjunto B = { (1, 0, 0), (0, 0, 1), (1, –1, m) }:

a) Hallar el valor o valores de m para los cuales el conjunto B es una base de $V^3$.
b) Obtener el valor de m para que $\vec{w} = (3, -1, 1)$ tenga coordenadas (2, 0, 1) respecto de B.

21. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 1, 1) \quad \vec{v} = (2, 2, t) \quad \vec{w} = (t, 0, 0)$

a) Hallar el valor o valores de t para los cuales el conjunto $\{ \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \}$ no es una base de $V^3$.
b) Para los valores de t obtenidos en el apartado, indicar qué subespacio vectorial generan los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

## 5. Producto escalar.

22. Dados los puntos A(1, 0, 1) y B(3, 2, 2), hallar el módulo del vector $\overrightarrow{AB}$.

23. a) Hallar los valores de m para los que el vector $\vec{u} = (m, 1, 2)$ es ortogonal a $\vec{v} = (1, 0, -1)$.
b) Dados $\vec{u} = (x, 2, 0)$, $\vec{v} = (x, -2, 1)$, $\vec{w} = (2, -x, -4x)$, hallar los valores de x para los que los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son ortogonales dos a dos.

24. Calcular los valores de x e y para que el vector $\vec{u} = (x, y, 2)$ sea ortogonal a los vectores $\vec{v} = (1, -1, 0)$ y $\vec{w} = (2, 0, -1)$.

25. Dado el triángulo de vértices A(0, 3, –1), B(0, 1, 5), C(x, 4, 3), averiguar los valores de x para que haya un ángulo recto en C.

26. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $\vec{v} = (0, 2, 1)$, $\vec{w} = (m, 1, n)$, hallar los valores de m y n sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal al vector $\vec{u}$.

27. Dados los vectores $\vec{u} = (1, 2, 3)$, $\vec{v} = (1, -2, -1)$, $\vec{w} = (2, \alpha, \beta)$

a) Determinar los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los que $\vec{w}$ es ortogonal a los vectores $\vec{u}, \vec{v}$.
b) Determinar los valores de $\alpha$ y $\beta$ para los que los vectores $\vec{v}$, $\vec{w}$ tienen la misma dirección.
c) Para $\alpha = 8$, determinar el valor de $\beta$ para el que $\vec{w}$ es combinación lineal de $\vec{u}, \vec{v}$.

## 6. Producto vectorial.

28. En cada uno de los siguientes casos, hallar un vector ortogonal a los vectores $\vec{v}, \vec{w}$:

a) $\vec{v} = (1, -1, 1) \quad \vec{w} = (0, 1, 2)$ b) $\vec{v} = (2, -1, 0) \quad \vec{w} = (3, 1, -1)$

29. En cada uno de los siguientes apartados, calcular el valor del parámetro m para que el producto vectorial de los dos vectores, sea un vector con la misma dirección que la del eje OZ:

a) $\vec{v} = (1, 2, m) \quad \vec{w} = (1, m, 0)$ b) $\vec{v} = (1, 1, 0) \quad \vec{w} = (2, m, 0)$

30. Dados los puntos A(0, 0, 0), B(0, 5, 0), C(1, 2, 3) y D(1, 7, 3), calcular el área del paralelogramo que determinan.

31. Los puntos A(1, 1, 1), B(2, 2, 2), C(1, 3, 3) son vértices consecutivos de un paralelogramo ABCD. Averiguar las coordenadas del vértice D y calcular el área de dicho paralelogramo.

32. Dado el triángulo cuyos vértices son los puntos A(1, 1, 0), B(1, 0, 2) y C(0, 2, 1):

a) Calcular el área de dicho triángulo. b) Calcular el coseno del ángulo en el vértice A.

33. En cada uno de los siguientes casos, calcular el área del triángulo de vértices:

a) A(1, 3, –1), B(3, –1, –1) y C(5, 1, 5) b) A(2, 2, 2), B(1, –1, 0) y C(0, 1, 2)

c) O(0, 0, 0), A(1, 0, 1) y B(–1, 0, 2)

## 7. Producto mixto.

34. En cada uno de los siguientes casos, hallar el producto mixto de los vectores:

a) $\vec{u} = (2,1,3)$ $\vec{v} = (4,0,9)$ $\vec{w} = (2,3,1)$ b) $\vec{u} = (-2,1,-3)$ $\vec{v} = (4,1,0)$ $\vec{w} = (2,-3,1)$

35. a) Calcular el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $\vec{u} = (1,1,-2)$ $\vec{v} = (2,1,1)$ $\vec{w} = (1,2,-2)$

b) Calcular el volumen del paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, siendo los vectores $\overrightarrow{OA} = (1,0,1)$, $\overrightarrow{OB} = (2,1,-1)$, $\overrightarrow{OC} = (2,2,-1)$

36. En cada uno de los siguientes casos, hallar el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D:

a) A(1, 2, 1) B(3, 2, 2) C(2, 3, 0) D(0, 3, 2) b) A(0, 0, 0) B(0, 1, 1) C(1, 1, 0) D(1, 0, 1)

c) A(1, 1, 1) B(0, –2, 2) C(–1, 0, 2) D(2, –1, –2)

37. Dados los vértices A(2, 1, 1), B(0, 2, 4), C(0, 1, 1) y D(3, 0, 1) de un paralelepípedo de aristas $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{AD}$, calcular las coordenadas de los restantes vértices y su volumen.

38. Dados los vectores $\vec{u} = (2,1,0)$, $\vec{v} = (1,0,-1)$, $\vec{w} = (a,b,1)$

a) Hallar **a** y **b** sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para a = 1, hallar los valores de **b** para que el paralelepípedo determinado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tenga volumen igual a 6 $u^3$.

39. Dados los vectores $\vec{u} = (1,0,1)$, $\vec{v} = (0,2,1)$, $\vec{w} = (m,1,n)$

a) Hallar **m** y **n** sabiendo que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para n = 1, hallar los valores de **m** para que el tetraedro determinado por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tenga volumen igual a 10 $u^3$.

40. Dados los puntos A(t, 2, –1) B(0, 1, 1) C(–1, 0, 2) D(2, 3, –t–1), calcular los valores de **t** para que el volumen del tetraedro de vértices A, B, C, D sea 5 $u^3$.

## SOLUCIONES

1. a) $\overrightarrow{AB} = (7, -1, 5)$, $\overrightarrow{CD} = (7, -1, 5)$; b) Sí, ya que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

2. a) B(7, 1, 1); b) B(0, 0, 0); c) B(5, –3, 2)

3. No representan al mismo vector libre; D' (0, 2, 3)

4. a) $\vec{e} = (-20, 0, -21)$; b) a = 2, b = 4, c = –3

5. a) Son l.i. ya que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$; b) Son l.d. ya que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$;
c) Son l.d. ya que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$; d) Son l.i. ya que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$

6. a) Sí son l.d.; $\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{v}$; b) Sí son l.d.; $\vec{w} = (3/2)\vec{u} - (1/2)\vec{v}$

7. a) Para $t \neq 2$; b) Para $t \neq -5$; c) Para $t \neq 1$

8. Son l.d. para m = 1; $\vec{w} = (-1/3)\vec{u} + (1/3)\vec{v}$

9. a) m = 1; b) $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$

10. Son l.i. $\forall m \in \mathbb{R}$, ya que $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \neq 0$ independientemente del valor de m.

11. a) Sí, ya que $\vec{v} = 2\vec{u}$; b) Sí, ya que $\vec{v} = (2/3)\vec{u}$; c) No, ya que no son proporcionales.

12. a) Son l.d. ya que $\text{rango}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3) = 1$. Hay sólo 1 vector l.i.; b) $\vec{u}_2 = 2\vec{u}_1$, $\vec{u}_3 = 3\vec{u}_1$;
c) Generan una recta vectorial o subespacio vectorial de dimensión 1.

13. a) Sí, ya que son l.d.; $\vec{w} = -\vec{u} + 2\vec{v}$; b) Sí, ya que son l.d.; $\vec{w} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

14. a) t = –2; b) t = 1; c) t = –34/5; d) t = 4

15. Son l.d. ya que $\text{rango}(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3, \vec{u}_4) = 2$. Hay sólo 2 vectores l.i.; $\vec{u}_3 = \vec{u}_1 - \vec{u}_2$, $\vec{u}_4 = 2\vec{u}_1 - \vec{u}_2$. Obsérvese que generan un plano vectorial (subespacio vectorial de dimensión 2)

16. a) Sí; b) No; c) Sí; d) No; e) No; f) No

17. a) Sí es una base; $\vec{w} = (0, 1, 0)_B$; b) Sí es una base; $\vec{v} = (0, 1, 1)_B$

18. a) Para $m \neq -1$; b) Para $m \neq -1$

19. $\vec{u} = (-1, 6, 2)$

20. a) B es una base de $V^3$ $\forall m \in \mathbb{R}$; b) m = 1.

21. a) t = 0 ó t = 2; b) Para t = 0 ó t = 2, $<\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}>$ es un plano vectorial o subespacio vectorial de dimensión 2.

22. $|\overrightarrow{AB}| = 3$

23. a) m = 2; b) x = 2 ó x = –2

24. x = y = 1

25. $x_1 = \sqrt{5}$, $x_2 = -\sqrt{5}$

26. m = –1/4, n = 1/4

27. a) $\alpha = 2$ , $\beta = -2$ ; b) $\alpha = -4$ , $\beta = -2$ ; c) $\beta = 10$

28. a) $\vec{u} = (3, 2, -1)$ ; b) $\vec{u} = (1, 2, 5)$

29. a) m = 0; b) $m \neq 2$

30. El área es $5\sqrt{10}$ u²

31. El vértice D(0, 2, 2) y el área es $2\sqrt{2}$ u²

32. a) El área es $\frac{\sqrt{14}}{2} \cong 1{,}87$ $u^2$; b) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{15}}{15}$; $\alpha \cong 75^{\circ}$

33. a) El área es $6\sqrt{6}$ $u^2$; b) El área es $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ $u^2$; c) El área es $\frac{3}{2}$ $u^2$

34. a) –4; b) 36

35. a) El volumen es 5 $u^3$; b) El volumen es 3 $u^3$

36. a) El volumen es 1 $u^3$; b) El volumen es 1/3 $u^3$; c) El volumen es 5/2 $u^3$

37. E(–2, 2, 4), F(1, 1, 4), G(1, 0, 1), H( –1, 1, 4); el volumen es 6 $u^3$

38. a) Los valores son a = –1/5, b = 2/5; b) Para b = 4 ó b = –2

39. a) m = –1/4, n = 1/4; b) Para m = –59/2 ó m = 61/2

40. Para t = –5 ó t = 6