**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.**

**MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.**

**UNIDAD 5. VECTORES EN EL ESPACIO.**

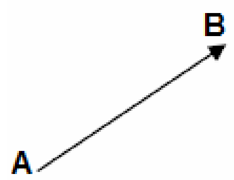
## 1. Vectores libres. Operaciones con vectores.

Un **vector fijo** es un segmento orientado con origen en un punto A y extremo en un punto B. Se representa por $\overrightarrow{AB}$. Los elementos de un vector fijo son: módulo, dirección y sentido.

Su **módulo** es la longitud del segmento AB.
El módulo del vector $\overrightarrow{AB}$ se representa por $|\overrightarrow{AB}|$.

Su **dirección** es la de la recta que pasa por los puntos A y B.

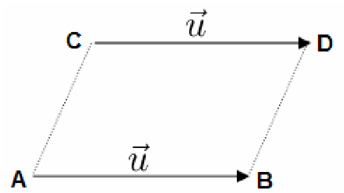
Su **sentido** es el que va del origen A al extremo B.




Un **vector libre** es cualquiera de los vectores fijos que tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido. Se representa por $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\dots$ El conjunto de los vectores libres del espacio se representa por $V^3$.

<u>Ejemplo</u>: los vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$, que tienen el mismo módulo, dirección y sentido, representan al mismo vector vector libre $\vec{u}$.

De la definición se deduce que **un vector libre puede ubicarse en cualquier lugar del espacio** o que el origen de un vector libre puede ser cualquier punto del espacio.




### Coordenadas de un vector

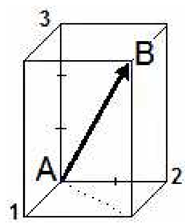
Se llaman **coordenadas** de un vector a la terna ordenada de números reales (a, b, c) que expresan el número de unidades de desplazamiento para ir desde su origen hasta su extremo, en cada una de las tres direcciones del espacio:

– La primera coordenada (a) está referida al desplazamiento delante–atrás.

– La segunda coordenada (b) está referida al desplazamiento derecha–izquierda.

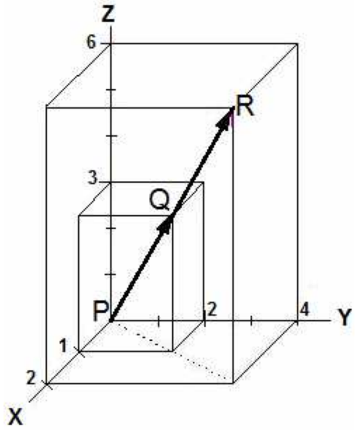
– La tercera coordenada (c) está referida al desplazamiento arriba–abajo.

<u>Ejemplo</u>: que un vector tenga coordenadas $\overrightarrow{AB} = (1, 2, 3)$ significa que para ir desde el origen A hasta el extremo B, hay que desplazarse 1 unidad hacia delante, 2 unidades hacia la derecha y 3 unidades hacia arriba.



**Coordenadas de un vector determinado por dos puntos**

Si dos puntos P y Q del espacio tienen coordenadas $P(p_1, p_2, p_3)$ y $Q(q_1, q_2, q_3)$, entonces las coordenadas del vector $\overrightarrow{PQ}$ son $\overrightarrow{PQ} = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3)$




Ejemplo:

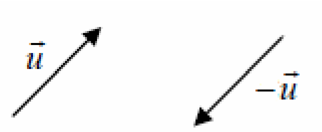
Los puntos P(0, 0, 0) y Q(1, 2, 3) determinan el vector $\overrightarrow{PQ} = (1-0, 2-0, 3-0) = (1, 2, 3)$

Los puntos Q(1, 2, 3) y R(2, 4, 6) determinan el vector $\overrightarrow{QR} = (2-1, 4-2, 6-3) = (1, 2, 3)$

Obsérvese que los vectores $\overrightarrow{PQ} = (1, 2, 3)$ y $\overrightarrow{QR} = (1, 2, 3)$ representan al mismo vector libre $\vec{u} = (1, 2, 3)$

**Vectores opuestos**

Dado un vector $\vec{u} \in V^3$, se llama **vector opuesto** de $\vec{u}$ al que tiene el mismo módulo y la misma dirección pero sentido contrario.




Si el vector $\vec{u}$ tiene coordenadas $\vec{u} = (a, b, c)$, el **vector opuesto** de $\vec{u}$ es $-\vec{u} = (-a, -b, -c)$.

Ejemplo: los vectores $\vec{u} = (-4, 1, 2)$ y $-\vec{u} = (4, -1, -2)$ son opuestos

**Módulo de un vector dado por sus coordenadas**

Dado el vector $\vec{u} = (a, b, c)$, su módulo es el número real positivo $|\vec{u}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Ejemplo: el módulo del vector $\vec{u} = (1, 2, 3)$ es $|\vec{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$

Se llama **vector unitario** al que tiene módulo igual a uno. Para conseguir un vector unitario a partir de otro y con su misma dirección y sentido, basta con dividir las coordenadas del vector dado por su módulo.

Ejemplo 1: $\vec{u} = \left(\frac{-1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es unitario $|\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{2}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{4}{4}} = \sqrt{1} = 1$

Ejemplo 2: un vector unitario con la misma dirección y sentido que el vector $\vec{u} = (1, 2, 3)$ sería el vector $\vec{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right) = \left(\frac{\sqrt{14}}{14}, \frac{2\sqrt{14}}{14}, \frac{3\sqrt{14}}{14}\right)$

### Operaciones con vectores

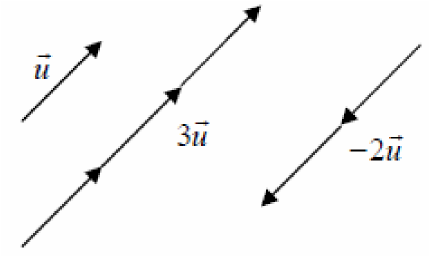
### Producto de un vector por un número real

Dados $k \in \mathbb{R}$, $\vec{u} \in V^3$, el producto de $k$ por $\vec{u}$ es igual a otro vector $k \cdot \vec{u}$ que tiene:

– la misma dirección que $\vec{u}$

– el mismo sentido que $\vec{u}$ si $k > 0$
  y sentido contrario al de $\vec{u}$ si $k < 0$

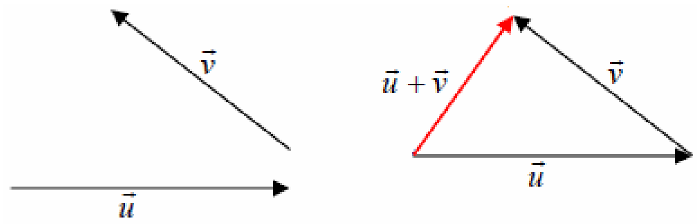
– de módulo, $|k|$ veces el módulo de $\vec{u}$ $\qquad |k \cdot \vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$




Analíticamente, si $\vec{u} = (a, b, c) \quad \Rightarrow \quad k \cdot \vec{u} = (k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c)$

### Suma de vectores

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, la suma de ambos es igual a otro vector $\vec{u} + \vec{v}$ que se obtiene mediante la regla conocida como **Regla del paralelogramo**: al trasladar el origen del vector $\vec{v}$ sobre el extremo del vector $\vec{u}$, el vector suma $\vec{u} + \vec{v}$ es el que tiene como origen, el origen de $\vec{u}$ y como extremo, el extremo de $\vec{v}$.

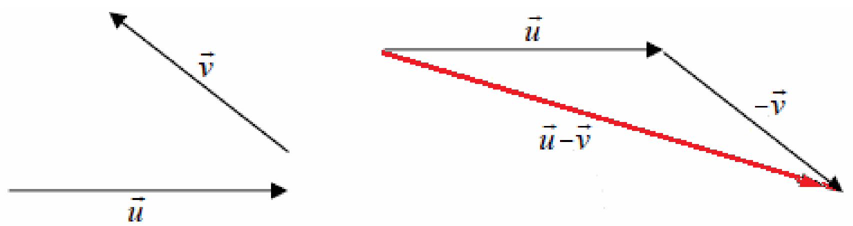



Analíticamente, dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3)$

<u>Ejemplo</u>: dados $\vec{u} = (3, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$, el vector suma es $\vec{u} + \vec{v} = (5, 1, 8)$

### Resta o diferencia de vectores

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, la resta de ambos es igual a otro vector $\vec{u} - \vec{v}$ que se obtiene sumándole al vector $\vec{u}$ el opuesto del vector $\vec{v}$, es decir, $\vec{u} - \vec{v} = \vec{u} + (-\vec{v})$.




Analíticamente, dados $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3) \quad \Rightarrow \quad \vec{u} - \vec{v} = (u_1 - v_1, u_2 - v_2, u_3 - v_3)$

<u>Ejemplo 1</u>: dados $\vec{u} = (3, 2, 5)$, $\vec{v} = (2, -1, 3)$, el vector diferencia es $\vec{u} - \vec{v} = (1, 3, 2)$

<u>Ejemplo 2</u>: dados los vectores $\vec{u} = (1, 3, -2)$, $\vec{v} = (-2, 1, 5)$, $\vec{w} = (1, -4, 3)$, el vector $\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w})$ es:

$$\vec{u} - (\vec{v} - \vec{w}) = (1, 3, -2) - ((-2, 1, 5) - (1, -4, 3)) = (1, 3, -2) - (-3, 5, 2) = (4, -2, -4)$$

## 2. Combinación lineal de vectores. Dependencia lineal.

Un vector $\vec{v} \in V^3$ es **combinación lineal** de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ si existen ciertos números reales $x_1$, $x_2$,..., $x_n$ tales que $\vec{v} = x_1 \cdot \vec{u}_1 + x_2 \cdot \vec{u}_2 + ... + x_n \cdot \vec{u}_n$. En este caso, se dice que el vector $\vec{v}$ depende linealmente de los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$

Se dice que los vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, ..., $\vec{u}_n$ son **linealmente dependientes** (l.d) si al menos uno de ellos es combinación lineal de los restantes. En caso contrario, se dice que son **linealmente independientes** (l.i.).

Como consecuencia de la definición, **dos vectores son linealmente dependientes si y solo si son proporcionales.**

Ejemplo 1: el conjunto { $\vec{u} = (7, 1, -7)$ , $\vec{v} = (1, -2, 4)$ , $\vec{w} = (2, -1, 1)$ } es un conjunto de vectores linealmente dependientes ya que el vector $\vec{u}$ es combinación lineal de $\vec{v}$ y $\vec{w}$

$$\vec{u} = (-3) \cdot \vec{v} + 5 \cdot \vec{w}$$

Ejemplo 2: la pareja { $\vec{u} = (-3, -9, 6)$ , $\vec{v} = (-1, -3, 2)$ } es un conjunto de vectores linealmente dependientes ya que los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son proporcionales: $\vec{u} = 3 \cdot \vec{v}$

Ejemplo 3: los vectores (1, 2, 4) y (2, 4, 7) son linealmente independientes ya que no son proporcionales.

Ejemplo 4: el conjunto { (2, 5, –3), (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } es un conjunto de vectores linealmente dependientes ya que el vector (2, 5, –3) es combinación lineal de los restantes:

$$(2, 5, -3) = 2 \cdot (1, 0, 0) + 5 \cdot (0, 1, 0) - 3 \cdot (0, 0, 1)$$

Ejemplo 5: el conjunto { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } es un conjunto de vectores linealmente independientes ya que es imposible expresar uno como combinación lineal de los otros dos.

### Dependencia lineal y rango de una matriz

Dado un conjunto de vectores de $V^3$, **el número máximo de vectores linealmente independientes coincide con el rango de la matriz formada por dichos vectores.**

Da igual que los vectores se coloquen dentro de la matriz ordenados por filas o por columnas, ya que el número de filas linealmente independientes coincide con el número de columnas linealmente independientes.

Ejemplo 1: en la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ hay 2 vectores linealmente independientes

porque su rango es 2. Obsérvese que $F_3 = 3F_1 - 2F_2$

Por ejemplo, los vectores $\vec{u} = (1, 2, 4)$ y $\vec{v} = (2, 5, 1)$ son linealmente independientes ya que no son proporcionales. El vector $\vec{w} = (-1, -4, 10)$ depende linealmente de los otros dos ya que

$$\vec{w} = 3 \cdot \vec{u} - 2 \cdot \vec{v}$$

Ejemplo 2: en la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{pmatrix}$ hay, como máximo, 2 vectores linealmente independientes ya que su rango es 2.

Por ejemplo, los vectores (1, 2, –1) y (2, 5, –4) son linealmente independientes ya que no son proporcionales. El vector (4, 1, 10) depende linealmente de los otros dos ya que

(4, 1, 10) = 18 · (1, 2, –1) – 7 · (2, 5, –4)

Expresado en función de las columnas de la matriz, se diría que $C_3 = 18C_1 - 7C_2$

Ejemplo 3: en la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \\ -3 & -6 & -12 \end{pmatrix}$ hay, como máximo, un solo vector linealmente independiente ya que su rango es 1.

El vector (2, 4, 8) depende linealmente del vector (1, 2, 4) ya que (2, 4, 8) = 2 · (1, 2, 4)

El vector (–3, –6, –12) depende linealmente del vector (1, 2, 4) ya que (–3, –6, –12) = –3 · (1, 2, 4)

Expresado en función de las filas de la matriz, se diría que $F_2 = 2F_1$ y que $F_3 = -3F_1$

Como consecuencia de todo lo dicho anteriormente, se tiene que:

**1) En $V^3$, el número máximo de vectores linealmente independientes es 3**, ya que la matriz formada por un número cualquiera de vectores tiene como máximo tres columnas.

**2) Tres vectores de $V^3$ son linealmente dependientes si y solo si es igual a cero el determinante formado por los mismos.**

Ejemplo 1: el conjunto { (1, 2, 4), (2, 5, 1), (–1, –4, 10) } es un conjunto de vectores l.d. ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 50 - 2 - 32 + 20 + 4 - 40 = 0$$ (forman una matriz de rango 2)

Ejemplo 2: el conjunto { (1, 0, 1), (0, 1, 3), (1, 1, 2) }, es un conjunto de vectores l.i. ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 1 - 3 = -2 \neq 0$$ (forman una matriz de rango 3)

Ejemplo 3: el conjunto { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } es un conjunto de vectores l.i. ya que

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$ (forman una matriz de rango 3)

## 3. Subespacios vectoriales.

Se llama **subespacio vectorial** generado por los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$ y se representa por

$$<\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n>$$

al conjunto de todas las combinaciones lineales posibles de los vectores $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n$.
Al conjunto de vectores $\{ \vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n \}$ se les llama **sistema de generadores** de dicho subespacio. Los vectores que forman un sistema de generadores no tienen por qué ser todos l.i.

**Recta vectorial o subespacio de dimensión 1**

Es el subespacio vectorial generado por un único vector (no nulo): $<\vec{u}> = \{ a \cdot \vec{u} \ / a \in \mathbb{R} \}$

**Plano vectorial o subespacio de dimensión 2**

Es el subespacio vectorial generado por dos vectores (no nulos) linealmente independientes:

$$<\vec{u}, \vec{v}> = \{ a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v} \ / a, b \in \mathbb{R} \}$$

**Espacio vectorial o (sub)espacio de dimensión 3**

Es el (sub)espacio vectorial generado por tres vectores (no nulos) linealmente independientes, es decir, el propio espacio vectorial $V^3$.

$$<\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}> = \{ x \cdot \vec{u} + y \cdot \vec{v} + z \cdot \vec{w} \ / x, y, z \in \mathbb{R} \} = V^3$$

## 4. Base de vectores. Coordenadas de un vector respecto de una base.

Se llama **base de vectores** de $V^3$ a un conjunto $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ de vectores linealmente independientes tales que cualquier otro vector de $V^3$, puede expresarse como combinación lineal de $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3$.
Por lo tanto, se puede afirmar que **tres vectores no nulos y linealmente independientes forman una base de $V^3$.**

Una **base ortogonal** es la que está formada por vectores tales que dos cualesquiera de ellos son ortogonales (forman un ángulo de 90º).

Si los tres vectores de una base, además de ortogonales, tienen módulo igual a uno, se dice que forman una **base ortonormal**.

Se llaman **coordenadas de un vector $\vec{v}$ respecto de una base** $B = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$ en $V^3$, a la terna ordenada de números reales $(x, y, z)$ tales que $\vec{v} = x \cdot \vec{u}_1 + y \cdot \vec{u}_2 + z \cdot \vec{u}_3$.

Las coordenadas de un vector dependen de la base respecto de la cual esté expresado. Dicho de otra forma, **un vector tiene coordenadas distintas respecto de bases distintas**.

Ejemplo 1: el conjunto $B = \{ (1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1) \}$ es una base de $V^3$

Dado un vector cualquiera de $V^3$, por ejemplo, $\vec{v} = (4, -2, 8)$, éste puede expresarse como

$$(4, -2, 8) = -3 \cdot (1, 1, 0) + 7 \cdot (1, 0, 1) + 1 \cdot (0, 1, 1)$$

Por lo tanto, las coordenadas de $\vec{v} = (4, -2, 8)$ respecto de la base B son $\vec{v}_B = (-3, 7, 1)$

Se llama **base canónica de $V^3$** al conjunto **{ (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) }**. La base canónica es un ejemplo de base ortonormal.

Ejemplo: el conjunto C = { (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) } es la base canónica de $V^3$

Dado un vector cualquiera de $V^3$, por ejemplo, $\vec{v} = (4, -2, 8)$, éste puede expresarse como

$$(4, -2, 8) = 4 \cdot (1, 0, 0) - 2 \cdot (0, 1, 0) + 8 \cdot (0, 0, 1)$$

Las coordenadas de $\vec{v} = (4, -2, 8)$ respecto de la base canónica C son $\vec{v}_C = (4, -2, 8)$

## 5. Producto escalar.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, se llama **producto escalar** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ al número real que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$, entendiendo como tal al menor de los dos ángulos posibles en el sentido de recorrido de $\vec{u}$ a $\vec{v}$.

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

**Interpretación geométrica**: el producto escalar de dos vectores es igual al producto del módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot (|\vec{v}| \cdot \cos\alpha)$ $\quad$ $|\vec{v}| \cdot \cos\alpha$ es la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$

### Propiedades

P1. El producto escalar del vector $\vec{0}$ por otro vector cualquiera es el número 0.

P2. Dos vectores no nulos son ortogonales si y solo si su producto escalar es cero.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0, \text{ siendo } \vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0}$$

Demostración: si $\vec{u} \perp \vec{v} \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 0$

Por otra parte, si $\vec{u} \bullet \vec{v} = 0$, con $\vec{u} \neq \vec{0},\ \vec{v} \neq \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \quad \Rightarrow \quad (\vec{u}, \vec{v}) = 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{u} \perp \vec{v}$

P3. El módulo de un vector es igual a la raíz cuadrada del producto escalar de dicho vector consigo mismo. Es decir, $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$

Demostración: $\vec{u} \bullet \vec{u} = |\vec{u}| \cdot |\vec{u}| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) = |\vec{u}|^2 \cdot \cos 0^\circ = |\vec{u}|^2 \cdot 1 = |\vec{u}|^2 \quad \Rightarrow \quad |\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}}$

P4. Propiedad conmutativa: $\vec{u} \bullet \vec{v} = \vec{v} \bullet \vec{u}$

P5. Propiedad distributiva respecto de la suma de vectores: $\vec{u} \bullet (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \bullet \vec{v} + \vec{u} \bullet \vec{w}$

P6. Propiedad homogénea: $k \cdot (\vec{u} \bullet \vec{v}) = (k \cdot \vec{u}) \bullet \vec{v} = \vec{u} \bullet (k\vec{v})$

**Expresión analítica del producto escalar de dos vectores**

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ tales que respecto de una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tienen coordenadas $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. El producto escalar de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3$$

<u>Demostración</u>:

$$\begin{aligned}
&\vec{u} \bullet \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{i} + u_2 \cdot \vec{j} + u_3 \cdot \vec{k}) \bullet (v_1 \cdot \vec{i} + v_2 \cdot \vec{j} + v_3 \cdot \vec{k}) = \\
&= (u_1 \cdot v_1) \cdot (\vec{i} \bullet \vec{i}) + (u_1 \cdot v_2) \cdot (\vec{i} \bullet \vec{j}) + (u_1 \cdot v_3) \cdot (\vec{i} \bullet \vec{k}) + \\
&+ (u_2 \cdot v_1) \cdot (\vec{j} \bullet \vec{i}) + (u_2 \cdot v_2) \cdot (\vec{j} \bullet \vec{j}) + (u_2 \cdot v_3) \cdot (\vec{j} \bullet \vec{k}) + \\
&+ (u_3 \cdot v_1) \cdot (\vec{k} \bullet \vec{i}) + (u_3 \cdot v_2) \cdot (\vec{k} \bullet \vec{j}) + (u_3 \cdot v_3) \cdot (\vec{k} \bullet \vec{k}) = \\
&= (u_1 \cdot v_1) \cdot 1 + (u_1 \cdot v_2) \cdot 0 + (u_1 \cdot v_3) \cdot 0 + \\
&+ (u_2 \cdot v_1) \cdot 0 + (u_2 \cdot v_2) \cdot 1 + (u_2 \cdot v_3) \cdot 0 + \\
&+ (u_3 \cdot v_1) \cdot 0 + (u_3 \cdot v_2) \cdot 0 + (u_3 \cdot v_3) \cdot 1 = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3
\end{aligned}$$

<u>Ejemplo</u>: dados $\vec{u} = (1, -2, 3)$, $\vec{v} = (-3, 1, 5)$ $\quad \vec{u} \bullet \vec{v} = 1 \cdot (-3) + (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 5 = -3 - 2 + 15 = 10$

**Expresión analítica del módulo de un vector**

Dado un vector $\vec{u} \in V^3$ tal que respecto de una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tiene coordenadas $\vec{u} = (x, y, z)$. El módulo de $\vec{u}$ es:

$$|\vec{u}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

<u>Demostración</u>: $|\vec{u}| = \sqrt{\vec{u} \bullet \vec{u}} = \sqrt{(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \bullet (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k})} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

**Expresión analítica del ángulo formado por dos vectores**

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ tales que respecto de una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tienen coordenadas $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. El ángulo $\alpha$ formado por $\vec{u}, \vec{v}$ es:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}{\sqrt{u_1{}^2 + u_2{}^2 + u_3{}^2} \cdot \sqrt{v_1{}^2 + v_2{}^2 + v_3{}^2}}\right)$$

<u>Demostración</u>: nombrando como $\alpha$ al ángulo formado por $\vec{u}, \vec{v}$, se tiene que:

$$\vec{u} \bullet \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\alpha = \frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arccos\left(\frac{\vec{u} \bullet \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)$$

<u>Ejemplo</u>: el ángulo formado por los vectores $\vec{u} = (4, -7, 3)$, $\vec{v} = (-2, 1, 6)$ es

$$\alpha = \arccos\left(\frac{4 \cdot (-2) + (-7) \cdot 1 + 3 \cdot 6}{\sqrt{4^2 + (-7)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 6^2}}\right) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{74} \cdot \sqrt{41}}\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha \cong 87^{\circ}$$

## 6. Producto vectorial.

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$, se llama **producto vectorial** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ a otro vector representado como $\vec{u} \wedge \vec{v}$ y que se obtiene del siguiente modo:

Caso 1. Si $\vec{u}, \vec{v}$ son dos vectores no nulos y linealmente independientes, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v}$ tiene:

a) Módulo = $|\vec{u} \wedge \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \mathrm{sen}(\vec{u}, \vec{v})$

b) Dirección perpendicular al vector $\vec{u}$ y al vector $\vec{v}$, respectivamente.

c) Sentido igual al del avance de un tornillo que gira desde $\vec{u}$ hasta $\vec{v}$ siguiendo el ángulo menor de entre los dos posibles.

Caso 2. Si $\vec{u} = \vec{0}$ ó $\vec{v} = \vec{0}$ ó son linealmente dependientes, entonces $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

**Expresión analítica del producto vectorial**

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v} \in V^3$ tales que respecto de una base ortonormal B = $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tienen coordenadas $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. El producto vectorial de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

<u>Ejemplo</u>: dados los vectores $\vec{u} = (-1, 2, 3)$, $\vec{v} = (5, 1, -4)$, su producto vectorial es el vector:

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -8\vec{i} + 15\vec{j} - 1\vec{k} - 10\vec{k} - 4\vec{j} - 3\vec{i} = -11\vec{i} + 11\vec{j} - 11\vec{k}$$

Obsérvese que:

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-11, 11, -11)$ tiene dirección perpendicular a la de $\vec{u} = (-1, 2, 3)$ ya que el producto escalar de ambos es $(-11) \cdot (-1) + 11 \cdot 2 + (-11) \cdot 3 = 11 + 22 - 33 = 0$

$\vec{u} \wedge \vec{v} = (-11, 11, -11)$ tiene dirección perpendicular a la de $\vec{v} = (5, 1, -4)$ ya que el producto escalar de ambos es $(-11) \cdot 5 + 11 \cdot 1 + (-11) \cdot (-4) = -55 + 11 + 44 = 0$

<u>Nota</u>: el producto vectorial es anticonmutativo: $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$

$$\vec{v} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & -4 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k} + 1\vec{k} - 15\vec{j} + 8\vec{i} = 11\vec{i} - 11\vec{j} + 11\vec{k}$$ es el opuesto de $\vec{u} \wedge \vec{v}$

**Interpretación geométrica del producto vectorial**

1. El módulo del vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es igual al área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente.

2. La mitad del módulo del vector $\vec{u} \wedge \vec{v}$ es igual al área del triángulo determinado por los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$, respectivamente.

Ejemplo: el producto vectorial de $\vec{u} = (1, 3, -2)$ , $\vec{v} = (-2, 0, 5)$ es $\vec{u} \wedge \vec{v} = (15, -1, 6)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 15\vec{i} + 4\vec{j} + 6\vec{k} - 5\vec{j} = 15\vec{i} - \vec{j} + 6\vec{k}$$

El área del paralelogramo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es

$|\vec{u} \wedge \vec{v}| = \sqrt{15^2 + (-1)^2 + 6^2} = \sqrt{225 + 1 + 36} = \sqrt{262} \cong 16{,}2 \ u^2$

El área del triángulo que tiene por lados los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ es $\frac{1}{2} \cdot |\vec{u} \wedge \vec{v}| = \frac{\sqrt{262}}{2} \cong 8{,}1 \ u^2$

## 7. Producto mixto.

Dados $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V^3$, se llama **producto mixto** de los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ al número real que resulta de multiplicar escalarmente el vector $\vec{u}$ por el producto vectorial de $\vec{v}$ y $\vec{w}$.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \bullet (\vec{v} \wedge \vec{w})$$

### Expresión analítica del producto mixto

Dados los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tales que respecto de una base ortonormal $B = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tienen coordenadas $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. El producto mixto de $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Ejemplo: dados los vectores $\vec{u} = (2, 3, -1)$ , $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ , $\vec{w} = (5, 1, -4)$ , su producto mixto es:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & -4 \end{vmatrix} = -16 + 45 + 1 + 10 - 6 - 12 = 22$$

### Interpretación geométrica del producto mixto

1. El valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es igual al volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

2. La sexta parte del valor absoluto del producto mixto de tres vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es igual al volumen del tetraedro determinado por los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Ejemplo: el producto mixto de $\vec{u} = (2, 3, -1)$ , $\vec{v} = (-1, 2, 3)$ , $\vec{w} = (5, 1, -4)$ es $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 22$

El volumen del paralelepípedo que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es 22 $u^3$

El volumen del tetraedro que tiene por aristas a los vectores $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ es $\frac{22}{6} = \frac{11}{3} \cong 3{,}67 \ u^3$