DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS.

MATEMÁTICAS II DE 2ºBACHILLERATO.

UNIDAD 6. RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO.

IES LA BAHIA

ACTIVIDADES

1. Puntos y vectores en el espacio.

1. a) Dados el vector $\overrightarrow{AB} = (2, -1, 3)$ y el punto B(3, 1, 2), hallar las coordenadas del punto A.
b) Dados el vector $\overrightarrow{AB} = (2, 0, -1)$ y el punto A(1, 2, 1), hallar las coordenadas del punto B.

2. Hallar el punto medio del segmento de extremos A y B en cada uno de los siguientes casos:
a) A(1, 0, 1) y B(3, 2, –1)   b) A(3, 0, 5) y B(3, 4, 7)

3. En cada uno de los siguientes casos, determinar los puntos que dividen al segmento de extremos A y B en tres segmentos de la misma longitud:
a) A(0, 1, –1) y B(3, 1, 2)   b) A(3, 0, 1) y B(0, 3, 1)   c) A(1, 2, 1) y B(–1, 0, 3)

4. Dados los puntos A(2, 1, 2) y B(6, –3, –2), hallar los puntos que dividen al segmento de extremos A y B en cuatro partes iguales.

5. Los puntos medios de los lados de un triángulo ABC son M(1, 1, 0), N(2, 2, 1) y P(3, 2, 0). Hallar las coordenadas de los vértices.

6. Los puntos A(1, –1, 0), B(0, 1, 2) y C(3, –1, 1) son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Hallar el cuarto vértice.

7. Dos vértices consecutivos de un paralelogramo son A(1, 1, 1) y B(0, 1, –1). Las coordenadas del centro del paralelogramo son M(2, 2, 2). Hallar las coordenadas de los vértices C y D.

2. Ecuaciones de un plano. Ecuaciones de una recta.

8. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por el punto P y tiene a los vectores $\vec{u}, \vec{v}$ como vectores directores:

a) P(1, 2, 1) $\vec{u} = (1, -1, 0)$ $\vec{v} = (0, 3, 1)$ b) P(1, 1, 1) $\vec{u} = (1, 0, 1)$ $\vec{v} = (0, 1, -1)$

9. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones paramétricas y la ecuación general del plano que pasa por (contiene a) los puntos A, B y C:

a) A(1, 0, 0) B(0, 2, 0) C(0, 0, 3)   b) A(1, 1, 1) B(1, 2, 2) C(–1, 2, 0)

c) A(0, 2, 0) B(1, 0, 0) C(0, 0, 5)   d) A(2, 0, 0) B(0, 3, 0) C(0, 0, 1)

10. En cada uno de los siguientes casos, averiguar si son coplanarios los puntos que se dan, es decir, si pertenecen a un mismo plano:

a) A(0, 0, –1) B(1, –1, –1) C(2, 2, 1) D(3, 1, 1)

b) A(0, 0, 0) B(0, 1, –1) C(1, 0, 3) D(2, 1, –1) E(1, 1, 1)

c) A(1, 1, –1) B(3, 0, 0) C(2, 1, 0) D(0, 4, 1) E(1, 0, –2)

11. Dados los puntos A(0, 1, 1), B(2, 1, 3), C(–1, 2, 0) y D(2, 1, m), averiguar el valor de m para que los cuatro puntos estén en un mismo plano.

12. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta r que:

a) Pasa por los puntos P(1, 1, 0) y Q(1, 0, –1)

b) Pasa por el punto P(0, –1, 1) y tiene la dirección del vector $\vec{u} = (0, 3, 1)$

c) Pasa por el punto P(1, 1, 0) y es paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x + y = -2 \\ 2y + z = 0 \end{cases}$

d) Pasa por el punto P(0, 5, –1) y es paralela a la recta que pasa por A(1, 1, –1) y B(1, 2, 3)

13. En cada uno de los siguientes casos, averiguar si están alineados los puntos que se dan, es decir, si pertenecen a una misma recta:

a) A(1, 2, 3) B(4, 1, 3) C(7, 0, 3)

b) A(1, 0, –1) B(2, 1, 0) C(3, 2, 1) D(0, –1, –2)

c) A(3, 1, –2) B(1, 1, 0) C(1, 0, 1) D(0, 1, 1)

14. Dados los puntos A(–1, 3, 2), B(2, –1, –1), C(a–2, 7, b), averiguar los valores de **a** y **b** para que los tres puntos estén alineados.

15. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto A y que contiene a (pasa por) la recta r:

a) A(1, 0, –1) $r \equiv \{ x = t;\ y = 2 - t;\ z = 2 + t \}$

b) A(0, 1, 1) $r \equiv \{ x = 1 - t;\ y = 3 + t;\ z = 4 + 2t \}$

c) A(3, 2, 0) $r \equiv \begin{cases} x + y - z - 3 = 0 \\ x + 2z + 1 = 0 \end{cases}$

d) A(1, 0, 1) $r \equiv \begin{cases} x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases}$

16. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto A y que es paralelo a las rectas r y s:

a) A(0, 0, 0) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-3}{3} = z - 1$ $s \equiv \dfrac{x}{0} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z}{-1}$

b) A(1, 1, 0) $r \equiv \begin{cases} 2x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} y + z = 3 \\ x - y - z = 1 \end{cases}$

c) A(–1, 0, 2) $r \equiv \{ x = 1 + 3t;\ y = t;\ z = -2 - t \}$ $s \equiv \begin{cases} x + y = 3 \\ 2x - y + 2z = 1 \end{cases}$

d) A(1, 1, 1) $r \equiv \{ x = 1 + t;\ y = 0;\ z = -2 + t \}$ $s \equiv \{ x = 1 + 2t;\ y = t;\ z = -t \}$

17. Determinar la ecuación general del plano que pasa por los puntos A(0, 1, 5) y B(3, 4, 3) y es paralelo a la recta $r \equiv \begin{cases} x - y + z = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

18. Determinar la ecuación general del plano que contiene a la recta $r \equiv \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+2}{-1} = \dfrac{z}{4}$ y es paralelo a la recta $s \equiv \begin{cases} 3x - 2y + z = 2 \\ -x + 2y - 3z = 2 \end{cases}$

19. Dados los puntos A(1, 1, –1), B(0, 1, 1), C(–1, 2, 1) y D(1, 1, 1), determinar la ecuación general del plano que contiene a la recta AB y es paralelo a la recta que pasa por C y D.

20. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y = 1 \end{cases}$ $s \equiv \begin{cases} 6x - 4y + z = 3 \\ -x + 2y + 3z = 4 \end{cases}$ determinar la ecuación general del plano que pasa por el origen de coordenadas, por el punto de corte del eje OZ con el plano $\pi \equiv x + y - z = 3$ y por el punto de intersección de las rectas r y s.

21. Hallar las ecuaciones cartesianas de la recta r que pasa por los puntos de corte del plano $\pi \equiv 2x + 3y - 6 = 0$ con los ejes de coordenadas.

22. Averiguar si el plano $\pi \equiv 4x - 5y + z + 1 = 0$ pertenece al haz de planos secantes en la recta de ecuaciones: $r \equiv \begin{cases} x - 3y + z - 1 = 0 \\ 2x + y - z + 3 = 0 \end{cases}$

23. Dados los planos $\pi_1 \equiv x + 2y - z = 0$, $\pi_2 \equiv x + y - 3 = 0$, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto P(1, 0, –1) y es paralela a ambos planos.

24. Dados los planos $\pi_1 \equiv x - y + z = 0$, $\pi_2 \equiv x + y - z = 2$, determinar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto P(1, 2, 3) y no corta a ninguno de los dos planos.

25. Hallar la ecuación en forma continua de la recta que pasa por el punto P(–1, 1, 0) y es paralela al plano $\pi_1 \equiv 2x - y + z = 3$ y al plano que pasa por A(3, 0, 0), B(0, –1, 0), C(0, 0, 2).

26. En cada uno de los siguientes casos, hallar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto P y que es paralela a la recta intersección de los planos π_1 y π_2:

a) P(–1, 1, 2) $\pi_1 \equiv x + y - 2z + 3 = 0$ $\pi_2 \equiv 2x - y + z + 1 = 0$

b) P(2, 0, 2) $\pi_1 \equiv x + y - z = 0$ $\pi_2 \equiv 2x + 2y - z = 1$

27. Las rectas $r \equiv \dfrac{x+2}{3} = y + 1 = z + 1$ $r' \equiv x + 2 = y + 1 = \dfrac{z-2}{0}$ se cruzan. Averiguar las ecuaciones cartesianas de la recta que pasa por el punto P(–1, 2, 4) y que corta a ambas.

3. Posiciones relativas de dos o tres planos.

28. En cada uno de los siguientes casos, hallar la ecuación general del plano que pasa por el punto P y es paralelo al plano π:

a) $P(-1, 2, 0)$ $\quad \pi \equiv x + 2y - 3z = 0$ $\qquad$ b) $P(1, 0, -1)$ $\quad \pi \equiv 2x + 3y - z + 1 = 0$

29. Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto P(2, 1, 1) y que es paralelo al plano que contiene al punto A(1, 0, 1) y a la recta $r \equiv \{ x = 2 + t;\ y = 2 - t;\ z = 2 + 3t \}$

30. En cada uno de los siguientes casos, hallar los valores de m y n para que π_1 y π_2 sean paralelos:

a) $\pi_1 \equiv 2x + my + z = 1$ $\quad \pi_2 \equiv nx - 6y + 2z = 0$ $\qquad$ b) $\pi_1 \equiv 2x + my - 4z = -1$ $\quad \pi_2 \equiv 3x + 9y + nz = 3$

31. Dados la recta $r \equiv \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -2y + 3z = 3 \end{cases}$ y el plano $\pi \equiv x - y + 2z = 5$, hallar la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es paralelo al plano π.

32. Determinar, según los valores del parámetro k, la posición relativa de los planos:

$\pi_1 \equiv 3x + y - z = 0 \qquad \pi_2 \equiv 2x + z = 1 \qquad \pi_3 \equiv -x + ky - 3z = -2$

33. Obtener el valor de k para el que los planos siguientes tengan una recta en común:

$\pi_1 \equiv x + y + kz = 1 \qquad \pi_2 \equiv kx + y + z = 1 \qquad \pi_3 \equiv 2x + y + z = k$

Hallar un vector de dirección de dicha recta.

4. Posiciones relativas de una recta y un plano.

34. En cada uno de los siguientes casos, determinar la posición relativa de la recta y el plano. En los casos en los que sean secantes, hallar el punto de corte entre ambos.

a) $r \equiv \begin{cases} x - y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 2x - y - 1 = 0$ $\qquad$ b) $r \equiv \dfrac{x-1}{3} = y - 2 = \dfrac{z}{2}$ $\quad \pi \equiv 2x - y + z - 3 = 0$

c) $r \equiv \dfrac{x}{2} = y + 1 = \dfrac{z-1}{3}$ $\quad \pi \equiv x - y + z + 2 = 0$ $\qquad$ d) $r \equiv \begin{cases} x - 2y + 3z = 0 \\ 2x + y - z = 5 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 2x + y - z - 9 = 0$

35. En cada uno de los siguientes casos, determinar, según los valores del parámetro k, la posición relativa de la recta r y el plano π:

a) $r \equiv \begin{cases} x - y + 2z = 3 \\ x + z = -1 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv 3x - y + kz = 0$ $\qquad$ b) $r \equiv \begin{cases} 3x + ky + z = 1 \\ x + 3y - z = 3 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv x + y + z + 1 = 0$

c) $r \equiv \begin{cases} y - z = 3 \\ -x + 2y = 3 \end{cases}$ $\quad \pi \equiv$ plano determinado por los puntos A(1, 0, 0) B(0, 1, 0) C(0, 0, k)

36. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 3z = 0 \end{cases}$, determinar la ecuación general del plano que la contiene y que no corta al eje OZ.

5. Posiciones relativas de dos rectas.

37. En cada uno de los siguientes casos, determinar la posición relativa de las rectas:

a) $r \equiv \dfrac{x-1}{-2} = \dfrac{y-2}{-1} = z-3 \qquad s \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+2 = \dfrac{z}{-1}$ b) $r \equiv \begin{cases} x+2y=1 \\ 4y+z=-8 \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} 3x-2y+z=2 \\ -x+2y-3z=2 \end{cases}$

c) $r \equiv \begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=2+\mu \\ y=-\mu \\ z=1+\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ d) $r \equiv \begin{cases} x=\lambda \\ y=2+\lambda \\ z=-\lambda \end{cases} \qquad s \equiv \begin{cases} x=\mu \\ y=1+2\mu \\ z=-2+\mu \end{cases} \qquad \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

38. Determinar la posición relativa de la recta $r \equiv \dfrac{x-2}{-1} = \dfrac{y-2}{3} = z-1$ y la recta intersección de los planos $\pi_1 \equiv x=0$ y $\pi_2 \equiv y=0$.

39. Dadas las rectas $r \equiv x = \dfrac{y+1}{2} = z-2 \qquad s \equiv x-2 = \dfrac{y-6}{-1} = \dfrac{z-3}{2}$ determinar su posición relativa y hallar la ecuación general del plano que determinan.

40. Discutir, según los valores del parámetro k, la posición relativa de las rectas r y s, siendo:

a) $r \equiv x-1 = y-2 = \dfrac{z-1}{k} \qquad s \equiv \dfrac{x-3}{-k} = \dfrac{y-3}{-1} = \dfrac{z+1}{2}$ b) $r \equiv x+1 = y = \dfrac{z+6}{3} \qquad s \equiv \begin{cases} x-ky=1-2k \\ 3x-kz=3 \end{cases}$

41. En cada uno de los siguientes casos, averiguar el valor de k para que las rectas r y s sean secantes y hallar, en dicho caso, la ecuación general del plano que las contiene:

a) $r \equiv x-1 = \dfrac{y+1}{2} = \dfrac{z}{3} \qquad s \equiv \dfrac{x+1}{3} = y = \dfrac{z-2}{k}$ b) $r \equiv \dfrac{x-3}{3} = y-2 = \dfrac{z-k}{-1} \qquad s \equiv \dfrac{x-2}{-2} = y = \dfrac{z}{3}$

c) $r \equiv \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y-k}{4} = \dfrac{z}{5} \qquad s \equiv \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{z-3}{3}$ d) $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+1}{k} = z \qquad s \equiv \begin{cases} x+z=-2 \\ y-z=-3 \end{cases}$

42. Dadas las rectas $r \equiv x-k = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z-4}{-1} \qquad s \equiv \dfrac{x-1}{2} = y+2 = \dfrac{z}{3}$ hallar el valor de k para que sean secantes, y calcular el punto de corte en dicho caso.

43. Dadas las rectas $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y = \dfrac{z-3}{-1} \qquad s \equiv \begin{cases} x-y+3z=10 \\ 3x-y+kz=-3 \end{cases}$ hallar el valor de k para que sean coplanarias.

44. Dadas las rectas $r \equiv x-2 = y-2 = z \qquad s \equiv \begin{cases} x=4+t \\ y=4+t \\ z=mt \end{cases} \qquad m \in \mathbb{R}$

a) Determinar el valor de m para que las rectas r y s sean paralelas.
b) Hallar, si existe, un valor de m para el que r y s sean la misma recta.

SOLUCIONES

1. a) A(1, 2, –1); b) B(3, 2, 0)

2. a) M(2, 1, 0); b) M(3, 2, 6)

3. a) M(1, 1, 0), N(2, 1, 1); b) M(2, 1, 1), N(1, 2, 1); c) M(1/3, 4/3, 5/3), N(–1/3, 2/3, 7/3)

4. M(3, 0, 1), N(4, –1, 0), P(5, –2, –1)

5. A(2, 1, –1), B(0, 1, 1), C(4, 3, 1)

6. D(4, –3, –1)

7. C(3, 3, 3), D(4, 3, 5)

8. a) $\pi \equiv x + y - 3z = 0$; b) $\pi \equiv x - y - z + 1 = 0$

9. a) $\pi \equiv 6x + 3y + 2z - 6 = 0$; b) $\pi \equiv x + y - z - 1 = 0$; c) $\pi \equiv 10x + 5y + 2z - 10 = 0$;
d) $\pi \equiv 3x + 2y + 6z = 6$

10. a) Sí; b) No; c) Sí.

11. Los puntos A, B, C y D son coplanarios para m = 3.

12. a) $r \equiv \begin{cases} y - z = 1 \\ x = 1 \end{cases}$; b) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ y - 3z = -4 \end{cases}$; c) $r \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ 2y + z = 2 \end{cases}$; d) $r \equiv \begin{cases} x = 0 \\ 4y - z = 21 \end{cases}$

13. a) Sí; b) Sí; c) No.

14. Los valores son a = –2, b = 5

15. a) $\pi \equiv 5x + 4y - z = 6$; b) $\pi \equiv x - 5y + 3z + 2 = 0$; c) $\pi \equiv x + 2y - 4z = 7$; d) $\pi \equiv 2x - y + z = 3$

16. a) $\pi \equiv 5x - 2y - 4z = 0$; b) $\pi \equiv x - 1 = 0$; c) $\pi \equiv 5x - 7y + 8z = 11$; d) $\pi \equiv -x + 3y + z = 3$

17. $\pi \equiv 13x - 7y + 9z = 38$

18. $\pi \equiv -9x + 2y + 5z + 49 = 0$

19. $\pi \equiv 2x + 4y + z = 5$

20. $\pi' \equiv x - y = 0$

21. $r \equiv \begin{cases} z = 0 \\ 2x + 3y = 6 \end{cases}$

22. Sí, ya que la ecuación del plano es el resultado de sumar a la segunda ecuación de la recta la primera multiplicada por dos.

23. $r \equiv \begin{cases} x + y = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$

24. $r \equiv \dfrac{x - 1}{0} = \dfrac{y - 2}{1} = \dfrac{z - 3}{1}$

25. $r \equiv \frac{x+1}{-3} = \frac{y-1}{4} = \frac{z}{10}$

26. a) $s \equiv \begin{cases} 5x - y + 6 = 0 \\ 3y - 5z + 7 = 0 \end{cases}$; b) $s \equiv \begin{cases} x + y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$

27. $s \equiv \begin{cases} x - 7y + 4z = 1 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$

28. a) $\pi' \equiv x + 2y - 3z - 3 = 0$; b) $\pi' \equiv 2x + 3y - z - 3 = 0$

29. $\pi \equiv -7x + 2y + 3z + 9 = 0$

30. a) m = –3, n = 4; b) m = 6, n = –6

31. $\pi' \equiv x - y + 2z = 3$

32. Si k = 1, los 3 planos se cortan en una recta; si k ≠ 1, los 3 planos se cortan en un punto.

33. Para k = 1, los tres planos se cortan en una recta, cuyo vector de dirección es $\vec{u} = (0, 1, -1)$

34. a) Secantes. P(0, –1, –2); b) Secantes. P(16/7, 17/7, 6/7); c) Secantes. P(–2, –2, –2); d) Paralelos.

35. a) Si k ≠ 4, son secantes; si k = 4, son paralelos; b) Si k ≠ 5, son secantes; si k = 5, la recta está contenida en el plano; c) Si k ≠ –1/3, son secantes; si k = –1/3, son paralelos,

36. $\pi \equiv 2x + 5y - 3 = 0$

37. a) Paralelas; b) Se cruzan; c) Se cruzan; d) Secantes.

38. Se cruzan.

39. Son secantes. Determinan el plano de ecuación $\pi \equiv 5x - y - 3z + 5 = 0$

40. a) Si k = 2 ó k = –2, las rectas son secantes; si k ≠ 2, k ≠ –2, las rectas se cruzan; b) Si k = 1, son la misma recta; si k ≠ 1, las rectas son secantes.

41. a) Son secantes para k = 1, en cuyo caso determinan el plano $\pi \equiv x - 8y + 5z = 9$
b) Son secantes para k = 2, en cuyo caso determinan el plano $\pi \equiv 4x - 7y + 5z = 8$
c) Son secantes para k = –4/7, en cuyo caso determinan el plano $\pi \equiv x - 7y + 5z = 6$
d) Son secantes para k = 3, en cuyo caso determinan el plano $\pi \equiv 2x - 3y + 5z = 5$

42. Son secantes para k = 2, en cuyo caso se cortan en el punto P(3, –1, 3)

43. Son coplanarias para k = –2.

44. a) Son paralelas para m = 1; b) No existe ningún valor de m para el que las rectas r y s sean la misma recta.